

신뢰성 있는 H_∞ 제어 : 선형 행렬 부등식 방법Reliable H_∞ Control : A Linear Matrix Inequality Approach

김성우*, 이종민, 김병국
(Seong-Woo Kim, Jong Min Lee, and Byung Kook Kim)

Abstract : In this paper we address reliable output feedback control problem for a class of linear systems with actuator/sensor failures. An output feedback control method is proposed which stabilizes the plant and guarantees H_∞ -norm constraint against all admissible actuator/sensor failures. The controller can be obtained by solving some LMIs that cover all failure cases. Effectiveness of this controller is validated via a numerical example. This paper addresses reliable output feedback control problem for a class of linear systems with actuator/sensor failures. An output feedback control method is proposed which stabilizes the plant and guarantees H_∞ -norm constraint against all admissible actuator/sensor failures. The controller can be obtained by solving some LMIs that cover all failure cases. Effectiveness of this controller is validated via numerical example.

Keywords : robust control, reliable control, fault-tolerant control

1. 서론

제어 시스템에 고장 및 외란이 있는 경우에도 허용된 수준의 안정성과 성능을 유지하도록 하는 강인 신뢰 제어 문제는 제어 공학 분야에서 높은 관심을 불러일으켰다. 시스템의 신뢰도를 높이는 방법 중의 하나는 구동기와 감지기와 같은 부품들의 고장에 대해서 강인하도록 하는 것이다. 많은 설계 방법들이 다양한 신뢰 제어 목표를 가지고 구동기와 감지기 고장에 대처하도록 제안되었다. Veillette 등은 허용 가능한 구동기/감지기 고장에도 안정성과 LQ/H_∞ 노음 감쇄 성능을 보장하는 제어 방법들을 개발하였다[7,8]. Seo 와 Kim 은 허용 가능한 구동기/감지기 고장과 매개변수 불확실성을 갖는 선형 불확실한 시스템에 대해 대수 리카티 방정식 (Algebraic Riccati Equation) 방법에 기초한 강인 신뢰 제어기 설계 방법을 제공한다[6]. 하지만, 이 방법은 출력 제한 제어에 대해 복잡한 비선형 행렬 방정식을 풀어야 하고 해가 존재하더라도 거의 구하기 힘들다는 단점을 가진다. 반면에 선형 행렬 부등식 방법은 컨벡스 최적화 알고리즘을 가지므로 대수 리카티 방정식에 기초한 방법에 대한 효과적인 대안으로 생각할 수 있다[1]. 선형 행렬 부등식 방법으로 개발된 신뢰 제어 설계 방법이 이전에 제안되었으나, 모든 고장 경우에 대한 개별적인 조건식들과 최적화의 관점에서 동적인 출력 제한 제어기를 만드는데 있어서 교차 분할 알고리즘 (Cross Decomposition Algorithm) 이 필요하였다[3]. 또한, Kim 등은 선형 행렬 부등식 방법에 기초한 신뢰 상태 제한 제어 설계 방법을 제안하였고, 구동기 고장만을 다루고 있다[4]. 하지만, 감지기 고장과 관련된 출력 제한 제어는 상태 제한 제어처럼 바람직한 선형 행렬 부등식을 쉽게 만들지 못한다.

본 논문에서는, 연속 및 이산시간 시스템에 대한 신뢰 출력 제한 제어 문제에 대해 몇 개의 간단한 선형 행렬 부등식들을 이용한 새로운 설계 방법을 제시한다. 더구나, 이 접근

방식은 추가적인 알고리즘을 수행할 필요가 없고, 경성 (*hard*) 의 고장 뿐만 아니라 연성 (*soft*) 의 고장도 처리할 수 있다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. 2장에서는 구동기 및 감지기 고장을 고려한 신뢰 출력 제한 제어 문제를 다루고 있다. 3장에서는 선형 연속 시간 시스템에 대한 신뢰 제어 문제의 주요한 결과를 설명하고 있다. 4장에서는 3장의 결과를 이산 시간 시스템에 대해 확장한다. 5장에서는 간단한 수치 예제를 통해 제시하는 제어기 설계 방법의 효율성을 검증하고 있고. 마지막으로, 6장에서는 결론과 추후 연구 과제에 대해서 언급하고 있다.

II. 문제 정의와 고장 모델

본 논문에서는 다음과 같이 상태 공간 방정식으로 표현되는 선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_z u(t) + D_{z,w} w(t) \\ y(t) &= Cx(t) + D_w w(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, $x(t) \in R^n$ 은 상태 변수, $u(t) \in R^m$ 는 제어 입력 변수, $w(t) \in R^r$ 는 $L_2[0, \infty)$ 또는 $l_2[0, \infty)$ 에 속하는 외란, $z(t) \in R^q$ 는 제어 출력, $y(t) \in R^p$ 는 측정 출력, 그리고 $\alpha x(t)$ 는 연속 시간 시스템의 경우에는 $\dot{x}(t)$ 이고 이산 시간 시스템의 경우에는 $x(t+1)$ 이다. 또한, $A, B, B_w, C_z, D_z, D_{z,w}, C, D_w$ 는 적절한 차원을 가지는 실수 상수 행렬들이다.

이와 같은 시스템에서, 우리는 $D_{z,w} = 0, C_z^T D_z = 0, D_z^T D_z = R > 0, B_w D_w^T = 0, D_w D_w^T = R_w > 0$ 을 가정한다. 이 가정은 일반적인 시스템에서 종종 사용되며, 특히, $C_z^T D_z = 0$ 와 $B_w D_w^T = 0$ 조건식은 간단한 변환을 통해 쉽게 구할 수 있다. 더구나, (A, B, C) 는 안정화 가능하고 감지 가능한 쌍이라고 가정한다.

한편, 시스템에서는 우연히 발생할 수 있는 고장을 고려하여야 한다. 본 논문에서는 다양한 시스템 고장 중에서도 특

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2003. 6. 25., 채택확정 : 2003. 10. 20.

김성우, 이종민 : 동의대학교 컴퓨터 · 소프트웨어공학부

(libero@deu.ac.kr/jongmin@deu.ac.kr)

김병국 : 한국과학기술원 전자전신학과(bkkim@ee.kaist.ac.kr)

히 구동기와 감지기에 고장이 발생하여 어떤 값으로 고정되거나 원하지 않는 값을 출력하는 고장만을 다룬다. 먼저, 구동기 고장은 제어 입력 u 와 관련되며, 우리는 주어진 시스템의 구동기를 두 그룹으로 나눈다. 한 그룹은 고장을 허용하므로 신뢰할 수 없는 구동기 집합이며 $\Omega_a \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ 로 정의한다. 다른 집합은 고장이 발생하지 않는 신뢰할 만한 구동기 집합이며 $\bar{\Omega}_a = \{1, 2, \dots, m\} - \Omega_a$ 로 정의한다. 마찬가지로 센서 고장은 측정 출력 y 와 연관되며, 주어진 시스템의 감지기를 두 그룹으로 나누어 신뢰할 수 없는 감지기와 신뢰할 만한 감지기의 집합을 각각 $\Omega_s \subseteq \{1, 2, \dots, o\}$ 와 $\bar{\Omega}_s = \{1, 2, \dots, o\} - \Omega_s$ 로 정의한다.

그리고, 실제로 구동기 고장 $f_a \in \Omega_a$ 이 일어났다고 하자. 그러면, 정상적으로 동작할 구동기의 집합은 $r_a \in \{1, 2, \dots, m\} - f_a$ 이 되고, B, D_z, u 는 일반적으로 다음과 같이 각각 분해할 수 있다. 이와 같은 변형 방식은 참고문헌[8] 등에서도 사용된 바 있다.

$$B = \begin{pmatrix} B_{ra} & B_{fa} \end{pmatrix}, D_z = \begin{pmatrix} D_{zra} & D_{zfa} \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_{ra} \\ u_{fa} \end{pmatrix} \quad (2)$$

예컨대, 구동기 고장이 최대로 일어났을 때는 모든 허용된 구동기 고장이 발생한 경우를 의미하므로, $f_a \equiv \Omega_a, r_a \equiv \bar{\Omega}_a$ 가 된다.

마찬가지로, 감지기 고장 $f_s \in \Omega_s$ 이 동시에 발생하였다고 하자. 그러면, 정상적으로 동작할 감지기들의 집합은 $r_s \in \{1, 2, \dots, o\} - f_s$ 이 되고, C, D_w, y 는 마찬가지로 다음과 같이 각각 분해할 수 있다.

$$C = \begin{pmatrix} C_{rs} \\ C_{fs} \end{pmatrix}, D_w = \begin{pmatrix} D_{wrs} \\ D_{wfs} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_{rs} \\ y_{fs} \end{pmatrix} \quad (3)$$

예컨대, 감지기 고장이 최대로 일어났을 때는 모든 허용된 감지기 고장이 발생한 경우를 의미하므로, $f_s \equiv \Omega_s, r_s \equiv \bar{\Omega}_s$ 가 된다.

이와 같이, 고장에 대한 기본적인 모델을 정의하고 나면, 본 논문에서 다루는 다음과 같은 문제를 정의할 수 있다.

신뢰 H_∞ 출력 제한 제어 문제 : 구동기 및 감지기 고장을 포함하는 부가 외란 (augmented disturbances) 에 대하여 주어진 H_∞ -노움 제한 조건을 만족하고 선형 시스템을 안정화하도록 하는 동적인 선형 출력 제한 제어를 설계하라.

한편, H_∞ -노움 제한 조건을 선형 행렬 부등식으로 바꾸기 위하여 다음 명제가 필요하다.

명제 1 유계 실 도움정리 (Bounded Real Lemma) : 연속 시간 (또는 이산 시간) 전달 함수 $T(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ (또는 $T(z) = D + C(zI - A)^{-1}B$) 를 고려하자. 그러면, 다음은 모두 같다.

(1) $\|T\|_\infty < \gamma$ 이고 A 는 연속 시간 의미에서 안정 ($\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0$) 이거나 또는 이산 시간 의미에서 안정이다 ($|\lambda_i(A)| < 1$).

(2) 연속 시간의 경우 $\sigma_{\max}(D) < \gamma$ 와 다음 리카티 부등식을 만족하는 대칭 양의 정부호 해 P 가 존재한다.

$$A^T P + PA + (PB + C^T D)(\gamma^2 I - D^T D)^{-1}(B^T P + D^T C) + C^T C < 0 \quad (4)$$

또는, 이산 시간의 경우 $\gamma^2 I - D^T D - B^T PB < 0$ 와 다음 리카티 부등식을 만족하는 대칭 양의 정부호 해 P 가 존재한다.

$$A^T P A - P + (A^T P B + C^T D)(\gamma^2 I - D^T D - B^T P B)^{-1}(B^T P A + D^T C) + C^T C < 0 \quad (5)$$

(3) 연속 시간의 경우 다음 선형 행렬 부등식에 대해 대칭 양의 정부호 행렬 (symmetric positive-definite matrix) P 또는 Q 가 존재한다.

$$\begin{pmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma^2 I & D^T \\ C & D & -I \end{pmatrix} < 0 \text{ 또는 } \begin{pmatrix} QA^T + AQ & B & C^T Q \\ B^T & -\gamma^2 I & D^T Q \\ QC & QD & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (6)$$

또는, 이산 시간의 경우 다음 선형 행렬 부등식에 대해 대칭 양의 정부호 행렬 P 또는 Q 가 존재한다.

$$\begin{pmatrix} -P & PA & PB & 0 \\ A^T P - P & 0 & C^T \\ B^T P & 0 & -\gamma^2 I & D^T \\ 0 & C & D & -I \end{pmatrix} < 0 \text{ 또는 } \begin{pmatrix} -Q & AQ & B & 0 \\ QA^T - Q & 0 & C^T Q \\ B^T & 0 & -\gamma^2 I & D^T Q \\ 0 & QC & QD & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (7)$$

증명 : 유계 실 보조정리를 직접 사용하여 증명은 자연스럽게 만족된다[5].

III. 신뢰 H_∞ 제어 : 연속 시간의 경우

본 장에서는 어떠한 허용된 구동기 및 감지기 고장에 대해서도 H_∞ -노움 제한 조건을 만족하며 선형 연속시간 시스템을 안정화시킬 수 있는 동적인 출력 제한 제어를 설계한다.

(1) 과 같은 선형 연속시간 시스템에서 구동기 및 감지기 고장이 발생한 후 전체 시스템은 다음과 같은 고장 후 모델 (post-fault model) 로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_{ra}u_{ra}(t) + \begin{pmatrix} B_w & B_{fa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w(t) \\ u_{fa}(t) \end{pmatrix} \\ z_{ra}(t) &= C_z x(t) + D_{zra}u_{ra}(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} C_{rs} \\ C_{fs} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} D_{wrs} \\ D_{wfs} \end{pmatrix} w(t) \end{aligned} \quad (8)$$

시스템이 페루프로 동작하는 데 필요한 동적인 출력 제한 제어기는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= A_K \zeta(t) + B_K y(t) = A_K \zeta(t) + B_{Krs} y_{rs}(t) + B_{Kfs} y_{fs}(t) \\ u(t) &= C_K \zeta(t) = \begin{pmatrix} u_{ra}(t) \\ u_{fa}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{Kra} \\ C_{Kfa} \end{pmatrix} \zeta(t) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서, A_K, B_K, C_K 행렬들은 적절한 차원으로 정의된다.

일단, 제어기가 시스템 (2)에 적용되면, 페루프 시스템 $T_{ra,rs}$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$T_{ra,rs} \begin{cases} \dot{x}_{cl}(t) = A_{ra,rs}x_{cl}(t) + B_{ra,rs}w_{fa,fs}(t) \\ z_{ra,rs}(t) = C_{ra,rs}x_{cl}(t) + D_{ra,rs}w_{ra,rs}(t) \end{cases} \quad (10)$$

여기서, $x_{cl}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \zeta(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^{2n}$ 는 페루프 시스템의 상태 벡터

터, $w_{fa,fs}(t) = \begin{pmatrix} w(t) \\ u_{fa}(t) \\ y_{fs}(t) \end{pmatrix}$ 는 구동기 및 감지기 고장을 포함하는

부가적인 외란, $z_{ra}(t) \in \mathcal{R}^p$ 는 제어 출력을 나타내고, 페루프 시스템 행렬들 ($A_{ra,rs}, B_{ra,rs}, C_{ra}, D_{ra,rs}$) 은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{ra,rs} & B_{ra,rs} \\ \hline C_{ra,rs} & D_{ra,rs} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} A & B_{ra}C_{Kra} & B_w & B_{fa} & 0 \\ B_{Krs}C_{rs} & A_K & B_{Krs}D_{wrs} & 0 & B_{Kfs} \\ \hline C_z & D_{zra}C_{Kra} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (11)$$

이처럼 구동기 및 감지기 고장으로 인한 부가 외란을 설정하는 방식은 [9] 등에서도 쉽게 찾아볼 수 있다. 출력 궤환을 통한 페루프 시스템은 그림 1 과 같이 구성할 수 있다. 고장이 발생한 상태에서 제어 출력은 z_{ra} 으로서 고장의 영향을 소거하고 있다.

이제 전체 시스템을 다음과 같은 구조로 재구성하여 보자. 먼저, 다음 식을 정의한다.

$$K_{ra,rs} := \begin{pmatrix} 0 & C_{Kra} \\ B_{Krs} & A_K \end{pmatrix} \quad (12)$$

수식을 간단하게 하기 위해, 다음 행렬들이 쓰여진다.

$$\begin{aligned} A_0 &:= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & B_{0f} &:= \begin{pmatrix} B_w & B_{fa} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{B}_{Kfa} \end{pmatrix}, \\ C_0 &:= (C_z \ 0), & D_{0f} &:= (D_{zw} \ 0 \ 0) = 0, \\ \bar{B}_{ra} &:= \begin{pmatrix} B_{ra} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, & \bar{C}_{rs} &:= \begin{pmatrix} C_{rs} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \\ \bar{D}_{ra} &:= (D_{zra} \ 0), & \bar{D}_{wrs} &:= \begin{pmatrix} D_{wrs} & 0 \ 0 \\ 0 & 0 \ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

그러면 (12) 는 다음과 같이 다시 쓰여진다.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c|c} A_{ra,rs} & B_{ra,rs} \\ \hline C_{ra,rs} & D_{ra,rs} \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{cc|cc} A_0 + \bar{B}_{ra}K_{ra,rs}\bar{C}_{rs} & B_{0f} + \bar{B}_{ra}K_{ra,rs}\bar{D}_{wrs} \\ \hline C_0 + \bar{D}_{ra}K_{ra,rs}\bar{C}_{rs} & D_0 + \bar{D}_{ra}K_{ra,rs}\bar{D}_{wrs} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} A_0 & B_{0f} \\ \hline C_0 & D_{0f} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \bar{B}_{ra} \\ \bar{D}_{ra} \end{array} \right) K_{ra,rs} (\bar{C}_{rs} \ | \ \bar{D}_{wrs}) \end{aligned} \quad (14)$$

이제 이 단계에서, 유계 실 도움정리는 일반 H_∞ 제어 문제에서처럼 신뢰 H_∞ 제어 문제에 대해서도 H_∞ 성능을 만족하여야 한다. 하지만, 도출된 출력 궤환 제어에 대한 행렬 부등식들은 리아푸노프 행렬 P 와 제어기 변수들의 곱을 포함하는 $A_{ra,rs}^T P + PA_{ra,rs}$ 와 같은 항에 의해 비선형이며, 상태 궤환 제어에서와 달리 모든 부등식들이 쉽게 선형화되지 않는다. 그래서, Scherer 등이 제시한 다음과 같은 변환이 필요하다[6].

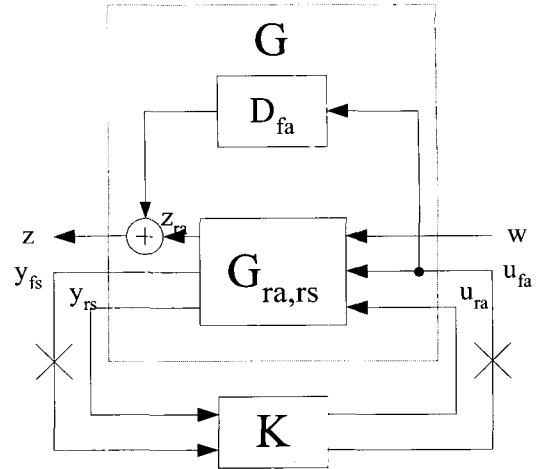


그림 1. 구동기/감지기 고장을 갖는 출력 궤환 제어 시스템.
Fig. 1. The output feedback control system with actuator/ sensor failures.

먼저 P 와 P^{-1} 을 다음과 같이 나눈다.

$$P = \begin{pmatrix} Y & N \\ N^T & * \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} X & M \\ M^T & * \end{pmatrix} \quad (15)$$

X 와 Y 는 $n \times n$ 대칭 행렬이고, $*$ 는 임의의 행렬을 나타낸다. $PP^{-1} = I$ 로부터, 다음 식을 유도할 수 있다.

$$P\Pi_1^{-1} = \Pi_2, \quad \Pi_1 := \begin{pmatrix} X & I \\ M^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi_2 := \begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & N^T \end{pmatrix} \quad (16)$$

이제 다음과 같이 제어기 변수들을 바꾸어 정의해 보자.

$$\begin{aligned} \hat{A}_{ra,rs} &:= NA_KM^T + NB_{Krs}C_{rs}X + YB_{ra}C_{Kra}M^T + YAX, \\ \hat{B}_{rs} &:= NB_{Krs}, \quad \hat{B}_{fs} := NB_{Kfs} \\ \hat{C}_{ra} &:= C_{Kra}M^T, \quad \hat{C}_{fa} := C_{Kfa}M^T \end{aligned} \quad (17)$$

이러한 변환으로 다음과 같은 항등식들을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ra,rs} &:= \Pi_1^T PA_{ra,rs} \Pi_1 = \Pi_2^T A_{ra,rs} \Pi_1 = \begin{pmatrix} AX + B_{ra}\hat{C}_{ra} & A \\ \hat{A}_{ra,rs} & YA + \hat{B}_{rs}C_{rs} \end{pmatrix} \\ \bar{B}_{ra,rs} &:= \Pi_1^T PB_{ra,rs} = \Pi_2^T B_{ra,rs} = \begin{pmatrix} B_w & B_{fa} & 0 \\ YB_w + \hat{B}_{rs}D_{wrs} & YB_{fa} & \hat{B}_{fa} \end{pmatrix} \\ \bar{C}_{ra,rs} &:= C_{ra}\Pi_1 = (C_zX + D_{zra}\hat{C}_{ra} \ C_z) \\ \Pi_1^T P \Pi_1 &= \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

유계 실 도움정리 덕분에 H_∞ -노음 제한 조건 $\|T_{ra,rs}\|_z < \gamma$ 을 갖는 시스템을 안정화하기 위한 요구 조건은 위에 정의된 페루프 행렬들에 대한 2개의 부등식을 만족하는 것이다. $diag(\Pi_1, I, I)$ 로 합동 변환 (congruence transformation) 을 하면, 다음과 같이 선형 행렬 부등식들로 종합된 식을 구할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_{ra,rs} + \bar{A}_{ra,rs}^T & \bar{B}_{ra,rs} & \bar{C}_{ra}^T \\ \bar{B}_{ra,rs}^T & -\gamma^2 I & 0 \\ \bar{C}_{ra} & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AX + X\hat{A} & \hat{A}_{ra,rs}^T + A & * & * & * & * \\ + B_{ra}\hat{C}_{ra} + (B_{ra}\hat{C}_{ra})^T & A^T Y + YA & * & * & * & * \\ \hat{A}_{ra,rs} + A^T & + \hat{B}_{rs}C_{rs} + (\hat{B}_{rs}C_{rs})^T & * & * & * & * \\ \hline B_w^T & (YB_w + \hat{B}_{rs}D_{wrs})^T & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 \\ B_{ja}^T & (YB_{ja})^T & 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ 0 & \hat{B}_{fs}^T & 0 & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ \hline C_2 X + D_{2a} \hat{C}_{ra} & C_2 & 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (19)$$

$$\Pi_1^T P \Pi_1 = \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} > 0 \quad (20)$$

그러므로, 제어기는 적어도 n 차이며, M 과 N 은 꼭 찬 행 랭크 (full row rank) 이며 $\hat{A}_{ra,rs}$, $\hat{B}_{ra,rs}$, \hat{C}_{ra} , X , Y 가 주어지면, 특정 구동기/감지기 고장에 대한 제어 행렬들 A_K , B_{Kra} , C_{Krs} 를 항상 계산해 낼 수 있다.

그럼 이제, 모든 발생 가능한 구동기/감지기 고장의 경우에 대해 시스템을 안정화하는 하나의 신뢰 제어기를 설계하는 문제를 고찰해 보자. Ω_a 의 원소의 개수가 l_a , Ω_s 의 원소의 개수가 l_s 이라고 하자. 그러면, 고장나지 않는 경우를 포함한 모든 발생 가능한 고장에 대한 경우의 수는 $L = L_a \times L_s = 2^{l_a} \times 2^{l_s}$ 이고, $i=1, \dots, L_a$, $j=1, \dots, L_s$ 의 모든 고장의 경우에 대한 L 개의 리아푸노프 행렬들 $P_{i,1}, \dots, P_{L_a,L_s}$ 은 (20)과 함께 개별적인 명제로 배정된 L 개의 선형 행렬 부등식들 (19)을 만족하도록 요구되어진다. 또한, $i=1, \dots, L_a$, $j=1, \dots, L_s$ 에 대해 $A_{ra,rs}^T P_{i,j} + P_{i,j} A_{ra,rs}$ 와 같은 항목들은 $P_{i,j}$ 와 제어기 변수들의 곱을 포함하여 비선형이므로, 볼록함 (convexity) 를 회복하는 동시에 오직 하나의 제어기가 모든 명제를 만족하기 위하여 다음 요구조건을 만족하여야 한다. 첫째, $P_{i,1} = \dots = P_{L_a,L_s} = P$ 를 만족하는 하나의 리아푸노프 행렬 P 를 가져야 하며, 둘째 제어기 변수들 A_K , B_K , C_K 은 모든 고장 발생 경우들에 대해 같아야만 한다는 것이다. 이러한 요구 조건들을 만족하는 신뢰 제어기는 기존의 선형 행렬 부등식들을 이용한 방법을 통해 쉽게 구할 수 있다[3,5].

본 논문에서는 $L + 1$ 개가 아니라 오직 2 개의 선형 행렬 부등식만을 만족하지만 하면 허용된 모든 구동기 및 감지기 고장에 대하여 H_∞ 명제를 만족시키며 시스템이 강인하게 안정할 수 있는 신뢰 H_∞ 제어기를 설계할 수 있는 방법을 다음 정리에 제시한다.

정리 1 : 신뢰성이 없는 구동기와 감지기를 가진 선형 시스템을 고려하고 $(A, B_{\bar{\Omega}_a}, C_{\bar{\Omega}_s})$ 가 안정화 가능하고 감지가 가능한 쌍이라고 가정하자. 그러면 다음 선형 행렬 부등식들을 만족하는 대칭 양의 정부호 행렬들 X 와 Y 가 존재하면 시스템은 어떠한 허용 가능한 구동기 및 감지기 고장에 대해서

도 강인하게 안정화가 가능하고 H_∞ -노름 제한 조건 $\|T_{ra,rs}\|_\infty < \gamma$ 이 만족된다.

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_{\bar{\Omega}_a, \bar{\Omega}_s} + \bar{A}_{\bar{\Omega}_a, \bar{\Omega}_s}^T & \bar{B}_{\bar{\Omega}_a, \bar{\Omega}_s} & \bar{C}_{\bar{\Omega}_a}^T & \Lambda_{\bar{\Omega}_a}^T + \Gamma_{\bar{\Omega}_a}^T R_{\bar{\Omega}_a} & \Xi_{\bar{\Omega}_a}^T + \Psi_{\bar{\Omega}_s}^T R_{w\bar{\Omega}_s} \\ \bar{B}_{\bar{\Omega}_a, \bar{\Omega}_s}^T & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{\bar{\Omega}_a} & 0 & -I & 0 & 0 \\ \Lambda_{\bar{\Omega}_a} + R_{\bar{\Omega}_a} \Gamma_{\bar{\Omega}_a} & 0 & 0 & -R_{\bar{\Omega}_a} & 0 \\ \Xi_{\bar{\Omega}_s} + R_{w\bar{\Omega}_s} \Psi_{\bar{\Omega}_s} & 0 & 0 & 0 & -R_{w\bar{\Omega}_s} \end{pmatrix} < 0 \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} > 0$$

여기서,

$$\bar{A}_{\bar{\Omega}_a, \bar{\Omega}_s} = \begin{pmatrix} AX + B_{\bar{\Omega}_a} \hat{C}_{\bar{\Omega}_a} & A \\ \hat{A}_{\bar{\Omega}_a, \bar{\Omega}_s} & YA + \hat{B}_{\bar{\Omega}_s} C_{\bar{\Omega}_s} \end{pmatrix},$$

$$\bar{B}_{\bar{\Omega}_a, \bar{\Omega}_s} = \begin{pmatrix} B_w & B_{\bar{\Omega}_a} & 0 \\ YB_w + \hat{B}_{\bar{\Omega}_s} D_{w\bar{\Omega}_s} & YB_{\bar{\Omega}_a} & \hat{B}_{\bar{\Omega}_s} \end{pmatrix},$$

$$\bar{C}_{\bar{\Omega}_a, \bar{\Omega}_s} = (C_2 X + D_{2\bar{\Omega}_a} \hat{C}_{\bar{\Omega}_a} \quad C_2)$$

$$R_{\bar{\Omega}_a} = R_{\bar{\Omega}_a}^T = D_{2\bar{\Omega}_a}^T D_{2\bar{\Omega}_a} > 0,$$

$$R_{w\bar{\Omega}_s} = R_{w\bar{\Omega}_s}^T = \frac{1}{\gamma^2} D_{2\bar{\Omega}_s}^T D_{2\bar{\Omega}_s} > 0,$$

$$\Lambda_{\bar{\Omega}_a} = (B_{\bar{\Omega}_a}^T \quad B_{\bar{\Omega}_a}^T Y),$$

$$\Gamma_{\bar{\Omega}_a} = (\hat{C}_{\bar{\Omega}_a} \quad 0),$$

$$\Xi_{\bar{\Omega}_s} = (C_{\bar{\Omega}_s} X \quad C_{\bar{\Omega}_s}),$$

$$\Psi_{\bar{\Omega}_s} = (0 \quad \hat{B}_{\bar{\Omega}_s}^T) \text{ 이다.}$$

증명 : 시스템 (8) 이 f_a 와 f_s 의 실제 고장을 가진다고 생각해 보자. 고장들에 대한 강인 명제를 만족하기 위해서는, (19) 와 (20) 이 만족하여야만 한다. 그러므로, 본 증명은 (21) 이 (19) 와 (20) 을 의미한다는 것을 보이는 것으로 충분하다.

간단한 계산에 의해 (19) 는 다음과 같다.

$$\bar{A}_{ra,rs} + \bar{A}_{ra,rs}^T + \frac{1}{\gamma^2} \bar{B}_{ra,rs} \bar{B}_{ra,rs}^T + \bar{C}_{ra}^T \bar{C}_{ra} < 0 \quad (22)$$

이제 (22) 을 최대 고장이 발생한 구동기 및 감지기 (Ω_a, Ω_s) 에 대하여 표현해 보자. (17) 으로부터

$$\begin{aligned} \hat{A}_{ra,rs} &= \hat{A}_{\bar{\Omega}_a, \bar{\Omega}_s} + NB_{K\Omega_s} C_{\Omega_s} X + YB_{\Omega_a} C_{K\Omega_a} M^T \\ \hat{B}_{rs} &= (\hat{B}_{\bar{\Omega}_s} \quad NB_{K\Omega_s}) \\ \hat{C}_{ra} &= \begin{pmatrix} \hat{C}_{\bar{\Omega}_a} \\ C_{K\Omega_a} M^T \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

이 된다. 그러므로 (22) 은 다음 식으로 재배치된다.

$$\begin{aligned} &\bar{A}_{\bar{\Omega}_a, \bar{\Omega}_s} + \bar{A}_{\bar{\Omega}_a, \bar{\Omega}_s}^T + \frac{1}{\gamma^2} \bar{B}_{\bar{\Omega}_a, \bar{\Omega}_s} \bar{B}_{\bar{\Omega}_a, \bar{\Omega}_s}^T + \bar{C}_{\bar{\Omega}_a}^T \bar{C}_{\bar{\Omega}_a} \\ &+ \Lambda_{\bar{\Omega}_a - f_a}^T \Gamma_{\bar{\Omega}_a - f_a} + \Gamma_{\bar{\Omega}_a - f_a}^T \Lambda_{\bar{\Omega}_a - f_a} + \Gamma_{\bar{\Omega}_a - f_a}^T R_{\bar{\Omega}_a - f_a} \Gamma_{\bar{\Omega}_a - f_a} \\ &+ \Xi_{\bar{\Omega}_s - f_s}^T \Psi_{\bar{\Omega}_s - f_s} + \Psi_{\bar{\Omega}_s - f_s}^T \Xi_{\bar{\Omega}_s - f_s} + \Psi_{\bar{\Omega}_s - f_s}^T R_{w\bar{\Omega}_s - f_s} \Psi_{\bar{\Omega}_s - f_s} \\ &- \frac{1}{\gamma^2} \Lambda_{\bar{\Omega}_a - f_a}^T \Lambda_{\bar{\Omega}_a - f_a} - \frac{1}{\gamma^2} \Psi_{\bar{\Omega}_s - f_s}^T \Psi_{\bar{\Omega}_s - f_s} < 0 \end{aligned} \quad (24)$$

여기서,

$$R_{\Omega a-fa} = R_{\Omega a-fa}^T = D_{z\Omega a-fa}^T D_{z\Omega a-fa} > 0,$$

$$R_{w\Omega s-fs} = R_{w\Omega s-fs}^T = \frac{1}{\gamma^2} D_{z\Omega s-fs}^T D_{w\Omega s-fs} > 0,$$

$$\Lambda_{\Omega a-fa} = (B_{\Omega a-fa}^T \ B_{\Omega a-fa}^T Y), \ \Gamma_{\Omega a-fa} = (\hat{C}_{\Omega a-fa} \ 0),$$

$$\Xi_{\Omega s-fs} = (C_{\Omega s-fs} \ X \ C_{\Omega s-fs}), \ \Psi_{\Omega s-fs} = (0 \ \hat{B}_{\Omega s-fs}^T) \text{ 이다.}$$

이제 이 단계에서, 다음 관계를 이용하여

$$\begin{aligned} & (\Lambda_{\Omega a-fa} + R_{\Omega a-fa} \Gamma_{\Omega a-fa})^T R_{\Omega a-fa}^{-1} (\Lambda_{\Omega a-fa} + R_{\Omega a-fa} \Gamma_{\Omega a-fa}) \\ & = (\Lambda_{\Omega a} + R_{\Omega a} \Gamma_{\Omega a})^T R_{\Omega a}^{-1} (\Lambda_{\Omega a} + R_{\Omega a} \Gamma_{\Omega a}) - (\Lambda_{fa} + R_{fa} \Gamma_{fa})^T R_{fa}^{-1} (\Lambda_{fa} + R_{fa} \Gamma_{fa}) \\ & (\Xi_{\Omega s-fs} + R_{w\Omega s-fs} \Psi_{\Omega s-fs})^T R_{w\Omega s-fs}^{-1} (\Xi_{\Omega s-fs} + R_{w\Omega s-fs} \Psi_{\Omega s-fs}) \\ & = (\Xi_{\Omega s} + R_{w\Omega s} \Psi_{\Omega s})^T R_{w\Omega s}^{-1} (\Xi_{\Omega s} + R_{w\Omega s} \Psi_{\Omega s}) - (\Xi_{fs} + R_{wfs} \Psi_{fs})^T R_{wfs}^{-1} (\Xi_{fs} + R_{wfs} \Psi_{fs}) \end{aligned} \quad (25)$$

제곱을 완성하면 (24)는 다음 식으로 변한다.

$$\begin{aligned} & \bar{A}_{\Omega a, \Omega s}^T \bar{A}_{\Omega a, \Omega s} + \frac{1}{\gamma^2} \bar{B}_{\Omega a, \Omega s}^T \bar{B}_{\Omega a, \Omega s} + \bar{C}_{\Omega a}^T \bar{C}_{\Omega a} \\ & + (\Lambda_{\Omega a} + R_{\Omega a} \Gamma_{\Omega a})^T R_{\Omega a}^{-1} (\Lambda_{\Omega a} + R_{\Omega a} \Gamma_{\Omega a}) \\ & + (\Xi_{\Omega s} + R_{w\Omega s} \Psi_{\Omega s})^T R_{w\Omega s}^{-1} (\Xi_{\Omega s} + R_{w\Omega s} \Psi_{\Omega s}) \\ & - (\Lambda_{fa} + R_{fa} \Gamma_{fa})^T R_{fa}^{-1} (\Lambda_{fa} + R_{fa} \Gamma_{fa}) - \Lambda_{\Omega a-fa}^T (R_{\Omega a-fa}^{-1} + \frac{1}{\gamma^2}) \Lambda_{\Omega a-fa} \\ & - (\Xi_{fs} + R_{wfs} \Psi_{fs})^T R_{wfs}^{-1} (\Xi_{fs} + R_{wfs} \Psi_{fs}) \\ & - \Xi_{\Omega s-fs}^T R_{w\Omega s-fs}^{-1} \Xi_{\Omega s-fs} - \frac{1}{\gamma^2} \Psi_{\Omega s-fs}^T \Psi_{\Omega s-fs} < 0 \end{aligned} \quad (26)$$

주어진 선형 행렬 부등식 (21) 은 (26) 의 왼쪽에서부터 여섯 개의 항이 영보다 작다는 것을 의미하므로, 이 부등식은 항상 만족된다. 그러므로 본 정리는 증명된다. ■

위에 나오는 선형 행렬 부등식들을 풀 후에, 우리는 $MN^T = I - XY$ 를 만족하는 임의의 정칙 행렬들 M 과 N 을 찾을 수 있다. 그러면 M 과 N 은 $I - XY$ 가 가역일 때 꼭 찬 행 랭크 (full row rank) 이다. $I - XY$ 의 가역성은 (22) 에 의해 만족된다. 마침내 다음과 같이 제어를 항상 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} C_K &= \begin{pmatrix} C_{K\bar{\Omega}a} \\ C_{K\bar{\Omega}s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{C}_{\bar{\Omega}a} \\ \hat{C}_{\bar{\Omega}s} \end{pmatrix} M^{-T} \\ B_K &= (B_{K\bar{\Omega}a} \ B_{K\bar{\Omega}s}) = N^{-1} (\hat{B}_{\bar{\Omega}a} \ \hat{B}_{\bar{\Omega}s}) \\ A_K &= N^{-1} (\hat{A}_{\bar{\Omega}a, \bar{\Omega}s} - NB_{K\bar{\Omega}s} C_{\bar{\Omega}s} X + YB_{\bar{\Omega}a} C_{K\bar{\Omega}a} M^T - YAX) M^{-T} \end{aligned} \quad (27)$$

고찰 1. 구동기 및 감지기 고장을 가지는 연속 시간 시스템이 H_∞ -노움 제한 조건을 만족하는 동시에 강인하게 안정화가 가능하기 위한 선형 행렬 부등식 (21) 에서 처음 (3, 3) 블록 행렬들은 고장을 허용하는 구동기 및 감지기 쌍 (Ω_a, Ω_s) 를 사용하지 않고 신뢰성이 있는 구동기 및 감지기 쌍 $(\bar{\Omega}_a, \bar{\Omega}_s)$ 만을 가지는 연속 시간 시스템에 대해 H_∞ -노움 제한 조건을 만족하는 동시에 강인하게 안정화가 가능하기 위한 선형 행렬 부등식과 같다. 하지만, 선형 행렬 부등식 최적화 방법에 따라 $(\bar{\Omega}_a, \bar{\Omega}_s)$ 만을 이용하는 것보다

(Ω_a, Ω_s) 도 함께 제어기에 사용하는 것이 전체적인 시스템 성능을 더욱 높일 수 있을 것이다.

고찰 2. 신뢰 출력 케환 제어 문제는 본 논문에서 제시된 제어기 설계 방법과는 다르게 풀 수 있다[3]. 다음 식을 생각해 보자.

$$\hat{G} := \begin{pmatrix} A & B & B_w \\ C & 0 & D_w \\ C_z & D_z & 0 \end{pmatrix} \in co\{\hat{G}_1, \dots, \hat{G}_k\} \quad (28)$$

여기서, $co(\cdot)$ 는 convex hull 을 나타낸다. 이산 집합 $\{\hat{G}_1, \dots, \hat{G}_k\}$ 의 각 요소가 각각의 고장의 경우에 해당하고 여기에 속하는 모든 \hat{G} 에 대하여 H_∞ -노움 제한 조건을 만족하는 동시에 강인하게 안정화가 가능하기 위한 행렬 부등식에서는 비선형 항들을 제거할 수 없으며, 교차 분할 알고리즘을 사용하여야 하므로, 본 논문에서 제시하는 설계 방법보다 연산의 부담이 더욱 크게 되고, 초기 조건에 따라 알고리즘의 최종 해를 구할 수 없을 수 있다.

고찰 3. 구동기 고장만을 가지는 연속 시간 시스템에 대한 신뢰 상태-케환 제어 문제는 Kim 등의 연구 결과에서 자세하게 논의된 바 있다[4]. 그러므로, 본 논문은 신뢰 상태 케환 제어에 관한 연구 결과 [4]에 대한 출력 케환 제어로의 확장판이라고 볼 수 있다.

IV. 신뢰 H_∞ 제어 : 이산 시간의 경우

구동기 또는 감지기 고장을 가지는 이산 시간 시스템에 대해서도 연속 시간의 경우와 비슷한 방식으로 신뢰 제어를 설계할 수 있다.

다음과 같이 허용 가능한 구동기 및 감지기 고장이 발생한 후의 이산 시간 시스템을 고려해 보자.

$$\begin{aligned} x_D(t+1) &= A_D x_D(t) + B_{Dra} u_{Dra}(t) + (B_{Dw} \ B_{Dfa}) \begin{pmatrix} w_D(t) \\ u_{Dfa}(t) \end{pmatrix} \\ z_{Dra}(t) &= C_{Dz} x_D(t) + D_{Dza} u_{Dra}(t) \\ y_D(t) &= \begin{pmatrix} C_{Drs} \\ C_{Dfs} \end{pmatrix} x_D(t) + \begin{pmatrix} D_{Dwrs} \\ D_{Dwfs} \end{pmatrix} w_D(t) \end{aligned} \quad (29)$$

위 시스템에 대한 동적인 출력 케환 제어기는 다음과 같은 형식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} \zeta_D(t+1) &= A_{DK} \zeta_D(t) + B_{DK} y_D(t) \\ &= A_{DK} \zeta_D(t) + B_{DKrs} y_{Drs}(t) + B_{DKfs} y_{Dfs}(t) \\ u_D(t) &= C_{DK} \zeta_D(t) = \begin{pmatrix} u_{Dra}(t) \\ u_{Dfa}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{DKra} \\ C_{DKfa} \end{pmatrix} \zeta_D(t) \end{aligned} \quad (30)$$

그러므로 페루프 시스템 $T_{Dra,rs}$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$T_{Dra,rs} \begin{cases} x_{Dcl}(t+1) = A_{Dra,rs} x_{Dcl}(t) + B_{Dra,rs} w_{Dfa,fs}(t) \\ z_{Dra,rs}(t) = C_{Dra,rs} x_{Dcl}(t) + D_{Dra,rs} w_{Dra,rs}(t) \end{cases} \quad (31)$$

여기에서, 위와 같은 이산 시간 시스템의 페루프 시스템의 입출력 및 상태 함수들 $x_{Dcl}(t)$, $w_{Dfa,fs}(t)$, $z_{Dra,rs}(t)$ 와 시스템 행렬들 $(A_{Dra,rs}, B_{Dra,rs}, C_{Dra}, D_{Dra,rs})$ 은 앞 장에서 정의된

바와 비슷하다.

연속 시간의 경우와 마찬가지로 유계 실 도움정리로 이산 시간 페루프 시스템이 H_∞ -노움 제한 상수 γ 을 가지며 강인하게 안정화하기 위한 요구 조건은 다음 2개의 부등식을 만족하는 것이다. 이 정리에서 $diag(\Pi_1, \Pi_1, I, I)$ 로 합동 변환을 하면, 다음과 같이 선형 행렬 부등식들로 종합된 식을 구할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} -\Pi_1^T P \Pi_1 & \Pi_1^T P A_{Dra,rs} \Pi_1 & \Pi_1^T P B_{Dra,rs} & 0 \\ \Pi_1^T A_{Dra,rs}^T P \Pi_1 & -\Pi_1^T P \Pi_1 & 0 & \Pi_1^T C_{Dra}^T \\ B_{Dra,rs}^T P \Pi_1 & 0 & -\gamma^2 I & D_{Dra,rs}^T \\ 0 & C_{Dra} \Pi_1 & D_{Dra,rs} & -I \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$= \begin{pmatrix} -\bar{P} & \bar{A}_{Dra,rs} & \bar{B}_{Dra,rs} & 0 \\ \bar{A}_{Dra,rs}^T & -\bar{P} & 0 & \bar{C}_{Dra}^T \\ \bar{B}_{Dra,rs}^T & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & \bar{C}_{Dra} & 0 & -I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -X & I & A_D X + B_{Dra} \hat{C}_{Dra} & A_D \\ I & -Y & \hat{A}_{Dra,rs} & Y A_D + \hat{B}_{Drs} C_{Drs} \\ \hline (A_D X + B_{Dra} \hat{C}_{Dra})^T & \hat{A}_{Dra,rs}^T & -X & I \\ A_D^T & (Y A_D + \hat{B}_{Drs} C_{Drs})^T & I & -Y \\ \hline B_{Dw}^T & (Y B_{Dw} + \hat{B}_{Drs} D_{wrs})^T & 0 & 0 \\ B_{Dfa}^T & (Y B_{Dfa})^T & 0 & 0 \\ 0 & \hat{B}_{Dfs}^T & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_{Dz} X + D_{Dza} \hat{C}_{Dra} & C_{Dz} \end{pmatrix} \dots$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ \hline -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} < 0$$

$$\Pi_1^T P \Pi_1 = \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} > 0 \quad (33)$$

여기서,

$$\bar{A}_{Dra,rs} := \Pi_1^T P A_{Dra,rs} \Pi_1 = \Pi_2^T A_{Dra,rs} \Pi_1$$

$$= \begin{pmatrix} A_D X + B_{Dra} \hat{C}_{Dra} & A_D \\ \hat{A}_{Dra,rs} & Y A_D + \hat{B}_{Drs} C_{Drs} \end{pmatrix}$$

$$\bar{B}_{Dra,rs} := \Pi_1^T P B_{Dra,rs} = \Pi_2^T B_{Dra,rs} = \begin{pmatrix} B_{Dw} & B_{Dfa} & 0 \\ Y B_{Dw} + \hat{B}_{Drs} D_{wrs} & Y B_{Dfa} & \hat{B}_{Dfa} \end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_{Dra,rs} := C_{Dra} \Pi_1 = \begin{pmatrix} C_{Dz} X + D_{Dza} \hat{C}_{Dra} & C_{Dz} \end{pmatrix}$$

이다.

이제, 연속 시간의 경우와 마찬가지로, 이산 사건의 경우에 대해서 신뢰 출력 제한 제어 문제에 대하여 다음 정리를 제시할 수 있다.

정리 2 : 신뢰성이 없는 구동기와 감지기를 가진 선형 이산 시간 시스템을 고려하고 $(A_D, B_{D\Omega_s}, C_{D\Omega_s})$ 가 안정화 가능하고 감지 가능한 쌍이라고 가정하자. 그러면 다음 선형 행렬 부등식들을 만족하는 대칭 양의 정부호 행렬들 X 와 Y 가 존재하면 시스템은 어떠한 허용 가능한 구동기 및 감지기 고장에 대해서도 강인하게 안정할 수 있고 H_∞ -노움 제한 조건 $\|T_{Dra,rs}\|_\infty < \gamma$ 이 만족된다.

$$\begin{pmatrix} -\bar{P} & \bar{A}_{D\Omega_s, \bar{\Omega}_s} & \bar{B}_{D\Omega_s, \bar{\Omega}_s} & 0 & \Lambda_{D\Omega_s}^T & \Psi_{D\Omega_s}^T R_{Dw\Omega_s} \\ \bar{A}_{D\Omega_s, \bar{\Omega}_s}^T & -\bar{P} & 0 & \bar{C}_{D\Omega_s}^T \Gamma_{D\Omega_s}^T R_{D\Omega_s} & \Xi_{D\Omega_s}^T \\ \bar{B}_{D\Omega_s, \bar{\Omega}_s}^T & 0 & -\gamma^2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{C}_{D\Omega_s} & 0 & -I & 0 & 0 \\ \Lambda_{D\Omega_s} & R_{D\Omega_s} \Gamma_{D\Omega_s} & 0 & 0 & -R_{D\Omega_s} & 0 \\ R_{Dw\Omega_s} \Psi_{D\Omega_s} & \Xi_{D\Omega_s} & 0 & 0 & 0 & -R_{Dw\Omega_s} \end{pmatrix} < 0 \quad (34)$$

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} > 0$$

여기서,

$$R_{D\Omega_s} = R_{D\Omega_s}^T = D_{Dz\Omega_s}^T D_{Dz\Omega_s} > 0,$$

$$R_{Dw\Omega_s} = R_{Dw\Omega_s}^T = \frac{1}{\gamma^2} D_{Dz\Omega_s}^T D_{Dw\Omega_s} > 0,$$

$$\Lambda_{D\Omega_s} = (B_{D\Omega_s}^T \ B_{D\Omega_s}^T Y), \ \Gamma_{D\Omega_s} = (\hat{C}_{D\Omega_s} \ 0),$$

$$\Xi_{D\Omega_s} = (C_{D\Omega_s} X \ C_{D\Omega_s}) \Psi_{D\Omega_s} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{B}_{D\Omega_s}^T \end{pmatrix} \text{이다.}$$

증명 : 본 정리의 증명은 정리 1과 같은 과정을 그대로 따른다. 즉, (34) 가 (32) 와 (33) 을 의미한다는 것을 보이는 것으로 본 정리의 증명은 충분하다.

슈르 보수(Schur Complement [1]) 를 이용하여 (32) 는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} -\bar{P} + \frac{1}{\gamma^2} \bar{B}_{Dra,rs} \bar{B}_{Dra,rs}^T & \bar{A}_{Dra,rs} \\ \bar{A}_{Dra,rs}^T & -\bar{P} + \bar{C}_{Dra}^T \bar{C}_{Dra} \end{pmatrix} < 0 \quad (35)$$

이제 위 식을 최대 고장의 경우에 대해 표현하면 다음 부등식으로 재정리된다.

$$\begin{pmatrix} -\bar{P} + \frac{1}{\gamma^2} \bar{B}_{D\Omega_s, \bar{\Omega}_s} \bar{B}_{D\Omega_s, \bar{\Omega}_s}^T & \bar{A}_{D\Omega_s, \bar{\Omega}_s} \\ \bar{A}_{D\Omega_s, \bar{\Omega}_s}^T & -\bar{P} + \bar{C}_{D\Omega_s}^T \bar{C}_{D\Omega_s} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \Psi_{D\Omega_s-fs}^T R_{Dw\Omega_s-fs} \Psi_{D\Omega_s-fs} & \Lambda_{D\Omega_s-fa}^T \Gamma_{D\Omega_s-fa} + \Psi_{D\Omega_s-fs}^T \Xi_{D\Omega_s-fs} \\ \Gamma_{D\Omega_s-fa}^T \Lambda_{D\Omega_s-fa} + \Xi_{D\Omega_s-fs}^T \Psi_{D\Omega_s-fs} & \Gamma_{D\Omega_s-fa}^T R_{D\Omega_s-fa} \Gamma_{D\Omega_s-fa} \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$- \frac{1}{\gamma^2} \begin{pmatrix} \Lambda_{D\Omega_s-fa}^T \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{D\Omega_s-fa} & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\gamma^2} \begin{pmatrix} \Psi_{D\Omega_s-fs}^T \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{D\Omega_s-fs} & 0 \end{pmatrix} < 0$$

다음 관계식을 이용하면

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \Lambda_{D\Omega-fa}^T \\ \Gamma_{D\Omega-fa}^T R_{D\Omega-fa} \end{pmatrix} R_{D\Omega-fa}^{-1} (\Lambda_{D\Omega-fa} R_{D\Omega-fa} \Gamma_{D\Omega-fa}) \\
 &= \begin{pmatrix} \Lambda_{D\Omega}^T \\ \Gamma_{D\Omega}^T R_{D\Omega} \end{pmatrix} R_{D\Omega}^{-1} (\Lambda_{D\Omega} R_{D\Omega} \Gamma_{D\Omega}) \begin{pmatrix} \Lambda_{Dfa}^T \\ \Gamma_{Dfa}^T R_{Dfa} \end{pmatrix} R_{Dfa}^{-1} (\Lambda_{Dfa} R_{Dfa} \Gamma_{Dfa}) \\
 & \begin{pmatrix} \Psi_{D\Omega-fs}^T R_{D\Omega-fs} \\ \Xi_{D\Omega-fs}^T \end{pmatrix} R_{D\Omega-fs}^{-1} (R_{D\Omega-fs} \Psi_{D\Omega-fs} \Xi_{D\Omega-fs}) \\
 &= \begin{pmatrix} \Psi_{D\Omega}^T R_{D\Omega} \\ \Xi_{D\Omega}^T \end{pmatrix} R_{D\Omega}^{-1} (R_{D\Omega} \Psi_{D\Omega} \Xi_{D\Omega}) \begin{pmatrix} \Psi_{Dfs}^T R_{Dfs} \\ \Xi_{Dfs}^T \end{pmatrix} R_{Dfs}^{-1} (R_{Dfs} \Psi_{Dfs} \Xi_{Dfs})
 \end{aligned} \tag{37}$$

위 방정식은 다음 식으로 변환된다.

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} -\bar{P} + \frac{1}{\gamma^2} \bar{B}_{D\Omega, \bar{\Omega}} \bar{B}_{D\Omega, \bar{\Omega}}^T & \bar{A}_{D\Omega, \bar{\Omega}} \\ \bar{A}_{D\Omega, \bar{\Omega}}^T & -\bar{P} + \bar{C}_{D\Omega}^T \bar{C}_{D\Omega} \end{pmatrix} \\
 & + \begin{pmatrix} \Lambda_{D\Omega}^T \\ \Gamma_{D\Omega}^T R_{D\Omega} \end{pmatrix} R_{D\Omega}^{-1} (\Lambda_{D\Omega} R_{D\Omega} \Gamma_{D\Omega}) \\
 & + \begin{pmatrix} \Psi_{D\Omega}^T R_{D\Omega} \\ \Xi_{D\Omega}^T \end{pmatrix} R_{D\Omega}^{-1} (R_{D\Omega} \Psi_{D\Omega} \Xi_{D\Omega}) \\
 & - \begin{pmatrix} \Lambda_{Dfa}^T \\ \Gamma_{Dfa}^T R_{Dfa} \end{pmatrix} R_{Dfa}^{-1} (\Lambda_{Dfa} R_{Dfa} \Gamma_{Dfa}) \\
 & - \begin{pmatrix} \Lambda_{D\Omega-fa}^T \\ 0 \end{pmatrix} (R_{D\Omega-fa}^{-1} + \frac{1}{\gamma^2} I) (\Lambda_{D\Omega-fa} \ 0) \\
 & - \begin{pmatrix} \Psi_{Dfs}^T R_{Dfs} \\ \Xi_{Dfs}^T \end{pmatrix} R_{Dfs}^{-1} (R_{Dfs} \Psi_{Dfs} \Xi_{Dfs}) \\
 & - \begin{pmatrix} 0 \\ \Xi_{D\Omega-fs}^T \end{pmatrix} R_{D\Omega-fs}^{-1} (0 \ \Xi_{D\Omega-fs}) - \frac{1}{\gamma^2} \begin{pmatrix} \Psi_{D\Omega-fs}^T \\ 0 \end{pmatrix} (\Psi_{D\Omega-fs} \ 0) < 0
 \end{aligned} \tag{38}$$

그러므로, 위 식에서 왼쪽 항의 처음 세 개의 항이 0 보다 작으면 선형 행렬 부등식 (34) 를 만족하므로, 증명은 완성된다.

연속 시간 시스템의 경우와 마찬가지로, 이산 시간 시스템의 경우에도 위에 제시된 선형 행렬 부등식들 (32), (33) 을 풀 후에, $MN^T = I - XY$ 를 만족하는 임의의 정칙 행렬들 M 과 N 을 찾아 다음과 같이 제어기를 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 C_{DK} &= \begin{pmatrix} C_{D\bar{\Omega}} \\ C_{D\Omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{C}_{D\bar{\Omega}} \\ \hat{C}_{D\Omega} \end{pmatrix} M^{-T} \\
 B_{DK} &= (B_{D\bar{\Omega}} \ B_{D\Omega}) = N^{-1} (\hat{B}_{D\bar{\Omega}} \ \hat{B}_{D\Omega}) \\
 A_{DK} &= N^{-1} (\hat{A}_{D\bar{\Omega}} - NB_{D\bar{\Omega}} C_{D\bar{\Omega}} X + YB_{D\bar{\Omega}} C_{D\bar{\Omega}} M^T - YA_{D\bar{\Omega}} X) M^{-T}
 \end{aligned} \tag{39}$$

V. 응용 예제

예제 1 : 다음과 같은 두 개의 입력과 세 개의 출력을 가진 MIMO 선형 시스템을 생각해 보자. 이 시스템은 Veillette 등 (1992)[7] 과 Seo 등 (1996)[6] 에서 쓰인 시스템을 약간 확장한 것이다.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} w(t) \\
 z(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \\
 y(t) &= \begin{bmatrix} 0.008 & 0 & -0.008 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w(t)
 \end{aligned} \tag{40}$$

A 의 스펙트럼은 $spec(A) = \{-1.3160 \pm 2.9194j, 0.1906 - 2.5583j\}$ 으로 주어지므로, 공칭 시스템이 불안정한 모드를 가진다는 것을 주목한다.

이제 우리는 구동기 고장과 감지기 고장에 대한 신뢰 H_∞ 출력-궤환 제어기를 설계하려고 한다. 해당하는 선형 행렬 부등식은 정리 1 에 의해 제시된 선형 행렬 부등식들 (21) 이다. 모든 선형 행렬 부등식 관련 계산은 *LMI Control Toolbox* (Gahinet 등 1995) [2] 을 이용하여 수행된다. 해법기는 $trace(X) + trace(Y)$ 를 최소화함으로써 신뢰 제어기를 구할 수 있다. 다음 표는 여러 가지 고장의 경우에 대한 반복적으로 LMI 해법기를 수행함으로써 γ_{min} 값을 구한 것이다. 표에서 알 수 있듯이, u_1 과 u_2 가 모두 고장나는 경우에 이를 고려한 신뢰 H_∞ 제어기의 γ_{min} 이 급격히 증가하므로, 고장에 따른 나쁜 응답 특성을 가진다는 것을 알 수 있다.

표 1. 여러 가지 구동기/감지기 고장을 고려한 신뢰 H_∞ 제어기들의 γ_{min} 값.

Table. 1. γ_{min} values for reliable H_∞ controllers against several failure cases.

제어기	γ_{min}
표준 H_∞ 제어기 (고장 고려 않음)	1.060
신뢰 H_∞ 제어기 (u_1, y_1 고장 고려)	4.757
신뢰 H_∞ 제어기 (u_1, u_2 고장 고려)	25.269
신뢰 H_∞ 제어기 (u_1, u_2, y_1 고장 고려)	25.752

다음으로 구동기 고장 (u_1, u_2) 와 감지기 고장 (y_1) 에 대한 신뢰 출력-궤환 제어기의 응답특성을 살펴보자. $\gamma = 30$ 과 함께 $trace(X) + trace(Y)$ 를 최소화한 후에 구해지는 신뢰 H_∞ 제어기는 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta}(t) &= 10^6 \times \begin{bmatrix} -0.6295 & 0.6629 & -0.5458 & 0.2540 \\ -0.9553 & 1.0061 & -0.8283 & 0.3854 \\ -0.6248 & 0.6580 & -0.5417 & 0.2521 \\ -0.4081 & 0.4298 & -0.3538 & 0.1646 \end{bmatrix} \zeta(t) \\
 & + \begin{bmatrix} 0.9717 & 501.07 & 367.91 \\ 1.4680 & 759.87 & 558.96 \\ 0.9565 & 496.70 & 365.94 \\ 0.6298 & 324.82 & 238.50 \end{bmatrix} y(t) \\
 u(t) &= \begin{bmatrix} -0.2162 & -9.7808 & -0.1767 & 0.0910 \\ -9.3797 & -0.6405 & 0.5183 & -0.2521 \\ -2.7639 & 2.7767 & -2.2525 & -8.7799 \end{bmatrix} \zeta(t)
 \end{aligned} \tag{41}$$

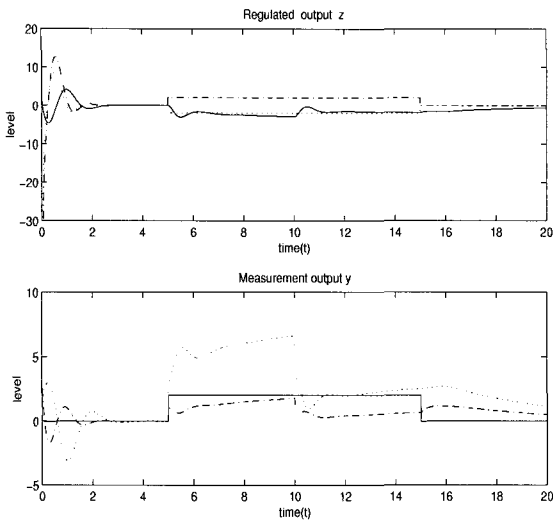


그림 2. 구동기/감지기 고장이 일어났을 때의 시스템 응답 ;
 경우 1, 경성 고장 ; — z1, u1 ; - - - y1, u2 ;
 y2, u3 ; --- y3.

Fig. 2. System responses when actuator and sensor failures ; case 1,
 hard failure ; — z1, u1 ; - - - y1, u2 ; y2, u3 ;
 --- y3.

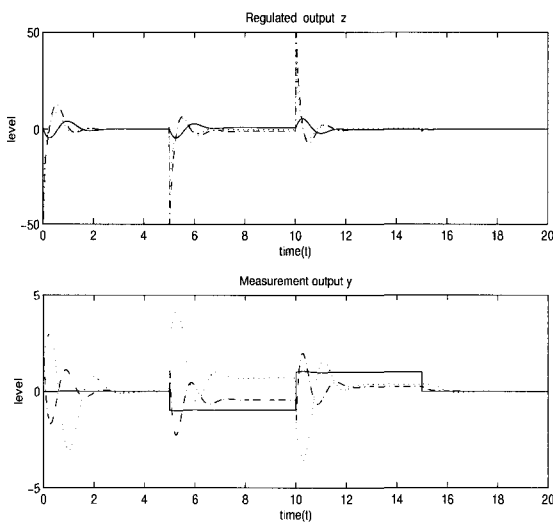


그림 3. 구동기/감지기 고장이 일어났을 때의 시스템 응답 ;
 경우 2, 연성 고장 ; — z1, u1 ; - - - y1, u2 ;
 y2, u3 ; --- y3.

Fig. 3. System response when actuator and sensor failures ; case 2,
 soft bias ; — z1, u1 ; - - - y1, u2 ; y2, u3 ;
 --- y3.

경우 1: 경성 구동기/감지기 고장 (hard failure)

$$\begin{aligned}
 u_1(t) &= \begin{cases} 2 & \text{where } 5 \leq t \leq 15 \\ 0 & \text{where } t > 15 \end{cases}, \\
 u_2(t) &= \begin{cases} -2 & \text{where } 5 \leq t \leq 15 \\ 0 & \text{where } t > 15 \end{cases}, \\
 y_1(t) &= 2 \quad \text{where } 5 \leq t \leq 15
 \end{aligned} \tag{44}$$

경우 2: 연성 구동기/감지기 고장 (soft bias)

$$\begin{aligned}
 u_1(t) &= u_1(t) + 1 \quad \text{where } 5 \leq t \leq 15, \\
 u_2(t) &= u_2(t) + 1 \quad \text{where } 5 \leq t \leq 15, \\
 y_1(t) &= y_1(t) + 1 \quad \text{where } 5 \leq t \leq 15
 \end{aligned} \tag{45}$$

경우 1 과 경우 2 에 대한 시스템 응답 특성은 각각 그림 2 와 3 에 나타냈다. 모의 실험 결과를 요약하면, 제안된 신뢰 제어기는 다양한 구동기 및 감지기 고장에 대해서도 주어진 시스템이 H_∞ -노움 제한 조건을 만족하는 동시에 페루프 안정화를 이루도록 한다.

예제 2 : 다음과 같은 세 개의 입력과 세 개의 출력을 가진 MIMO 이산시간 선형 시스템을 생각해 보자. 이 시스템은 Veillette 등 (1992)[7] 과 Seo 등 (1996)[6] 에서 쓰인 시스템을 약간 확장한 것이다.

$$\begin{aligned}
 x(t+1) &= \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 \\ 0.001 & 0 & 0 \\ 0.001 & 0 & 0 \end{bmatrix} w(t) \\
 z(t) &= \begin{bmatrix} 0.01667 & 0.06667 & 0.1667 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} u(t) \\
 y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} w(t)
 \end{aligned} \tag{47}$$

A 의 스펙트럼은 $spec(A) = \{1, 1, 1\}$ 이므로 공칭 시스템이 불안정한 모드를 가진다는 것을 알 수 있다.

구동기 고장 (u_3) 와 감지기 고장 (y_3) 을 가지는 이산 시간 시스템에 대해 신뢰 출력-폐환 제어기를 설계하기 위해서, 정리 2 에 의해 제시된 선형 행렬 부등식들 (35) 을 이용한다. 모든 선형 행렬 부등식 관련 계산은 *LMI Control Toolbox* (Gahinet 등 1995) [2] 을 이용하여 수행된다. $\gamma = 20$ 과 함께 $trace(X) + trace(Y)$ 를 최소화한 후에 다음과 같은 제어기를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \zeta(t+1) &= \begin{bmatrix} -3.7677 & -3.1164 & -1.4527 \\ 1.6629 & 1.4431 & 0.8513 \\ -0.4547 & -0.0016 & -0.2848 \end{bmatrix} \zeta(t) \\
 &+ \begin{bmatrix} 0.9440 & 0.3892 & 0.0015 \\ -0.2005 & -0.2152 & -0.0008 \\ 0.1743 & 0.1006 & 0.0002 \end{bmatrix} y(t) \\
 u(t) &= \begin{bmatrix} -4.0820 & 4.0035 & -1.6043 \\ -5.4492 & -2.4302 & 1.0104 \\ -2.3572 & -5.3083 & -1.0639 \end{bmatrix} \zeta(t)
 \end{aligned} \tag{48}$$

이 제어기는 시스템에서 허용 가능한 구동기 및 감지기 고장에 대하여 H_∞ -노움 제한 조건을 만족하는 동시에 페루프 안정화를 이루도록 한다.

VI. 결론

본 논문에서는 신뢰성이 없는 구동기/감지기 고장이 있는 선형 시스템에 대한 출력 제한 문제에 대한 해법으로 선형 행렬 부등식 방법을 이용한 신뢰 H_∞ 제어기 설계 방법을 제안하였다. 기존의 제어기는 구동기 및 감지기 고장에 대하여 원하는 H_∞ 성능을 만족하지 못하는 반면에, 제안된 제어기는 고장 발생이 허용된 구동기 및 감지기와 신뢰성이 있는 것들을 구분할 수 있는 경우에 이용이 가능하며, 구동기 및 감지기 고장에 대하여 강인 안정성과 정해진 H_∞ -노름 감쇄 성능을 보장한다. 또한, 제안하는 선형 행렬 부등식 방법에 기초한 알고리즘은 여타의 부가적인 반복 알고리즘을 필요로 하지 않으며, 각 고장 경우에 대한 부등식을 요구하지도 않는다. 추후에, 이러한 신뢰 제어 방법은 구동기 및 감지기 고장에 있는 경우에 대하여 H_2 최적화, 비집중 제어, 강인 추적 제어 등의 수 많은 선형 행렬 부등식을 이용한 신뢰 제어 문제들에 대해 적용하는 문제를 고려할 수 있다.

참고문헌

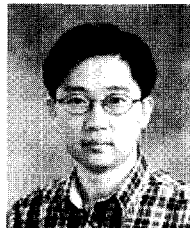
[1] S. Boyd, L. ElGhaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory (SIAM Studies in Applied Mathematics)*, 15, SIAM, PA, 1994.

[2] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, The MathWorks, Natick, MA, 1995.
 [3] J. C. Geromel, J. M. Bernussou, M. C. de Oliveira, " H_2 norm optimization with constrained dynamic output feedback controllers: decentralized and reliable control", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 44, no. 7, pp. 1449-1454, 1999.
 [4] S. W. Kim, B. K. Kim, C. J. Seo, "Robust and reliable H_∞ state-feedback control: a linear matrix inequality approach", *Trans. Contr. Automat. and Sys. Eng.*, vol. 2, no. 1, 2000.
 [5] C. Scherer, P. Gahinet, M. Chilali, "Multiobjective output-feedback control via LMI optimization", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 42, no. 7, pp. 896-911, 1997.
 [6] C. J. Seo, B. K. Kim, "Robust and reliable H_∞ control for linear systems with parameter uncertainty and actuator failure", *Automatica*, vol. 32, no. 3, pp. 465-467, 1996.
 [7] R. J. Veillette, J. V. Medanic, W. R. Perkins, "Design of reliable control systems.", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, no. 3, pp. 290-304, 1992.
 [8] R. J. Veillette, "Reliable linear-quadratic state-feedback control", *Automatica*, vol. 31, no. 1, pp. 137-143, 1995.
 [9] G.-H. Yang, J. L. Wang, Y. C. Soh, "Reliable H_∞ controller design for linear systems.", *Automatica*, vol. 37, pp. 717-725, 2001.



김 성 우

1969년 4월 29일생. 1991년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업. 1993년 동대학원 석사. 1999년 동대학원 박사. 2002년~현재 동의대학교 컴퓨터 · 소프트웨어공학부 교수. 관심분야는 강인 제어, 실시간 시스템, 임베디드 시스템.



이 중 민

1970년 1월 13일생. 1992년 경북대학교 컴퓨터공학과 졸업. 1994년 한국과학기술원 전산학과 공학석사. 2000년 동대학원 박사. 2002년~현재 동의대학교 컴퓨터 · 소프트웨어공학부 교수. 관심분야는 위치관리기법, 무선인터넷, 소프트웨어공학.

어공학.

김 병 국

제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지 제 5 권 제 3 호 참조.