

계수의 특성비에 대한 선형계의 파라미터적 감도해석(I) : 일반적인 경우

Parametric Sensitivity Analyses of Linear System relative to the Characteristic Ratios of Coefficient(I) : A General Case

김근식*, 김영철

(Keunsik Kim and Youngchol Kim)

Abstract : The characteristic ratio assignment (CRA) method[1] is new polynomial approach which allows to directly address the transient responses such as overshoot and speed of response time in time domain specifications. The method is based on the relationships between time response and characteristic ratios(α_i) and generalized time constant (τ), which are defined in terms of coefficients of characteristic polynomial. However, even though the CRA can apply to developing a linear controller that meets good transient responses, there are still some fundamental questions to be explored. For the purpose of this, we have analyzed several sensitivities of a linear system with respect to the changes of coefficients itself and α_i of denominator polynomial. They are (i) the unnormalized root sensitivity : to determine how the poles change as α_i changes, and (ii) the function sensitivity : to determine the sensitivity of step response to the change of α_i and to analyze the sensitivity of frequency response as α_i changes. As an other important result, it is shown that, under any fixed τ and coefficient of the lowest order of s in denominator, the step response is dominantly affected merely by α_1, α_2 and α_3 regardless of the order of denominator higher than 4. This means that the rest of the α_i s have little effect on the step response. These results provide some useful insight and background theory when we select α_i and τ to compose a reference model, and in particular when we design a low order controllers such as PID controller.

Keywords : sensitivity, time response, characteristic ratios, coefficients

I. 서론

공정제어분야의 제어시스템 설계에 있어서 가장 기본적인 설계규격은 오버슈트나 정착시간과 같은 시간영역 과도 응답 성능이다. 그럼에도 불구하고 3차 이상의 고차시스템의 시간영역 성능에 대한 해석 방법은 아직 완전히 개발되어 있지 않기 때문에 대개는 고차시스템을 2차 시스템으로 근사화하여 다루고 있다. 고전적 제어에서는 많은 경우, 이득여유와 위상여유 그리고 대역폭 등을 고려함으로써 간접적으로 과도응답 성능을 해석하고 있다.

한편, 특성근이 아닌 특성다항식의 계수와 시스템의 시간 응답 성능과의 직접적인 관계를 찾으려는 시도가 있었다. Naslin[2,3]은 특성다항식 계수로 특성비와 펄서턴스(pulsatance)를 정의하고, 관측에 의한 결과이지만 특성비가 단위시스템응답의 오버슈트와 밀접한 관계가 있음을 제시하였다. 그러나 Naslin의 발견은 1960년대 초에 등장한 상태공간이론에 밀려 학계의 주목을 받지 못하였다. 1990년대에 이르러 Manabe[4]는 특성비에 근거한 계수도법(coefficient

diagram method)을 창안하였다. 이 방법은 Lipatov 안정도 조건[5]에 근거한 페루프 안정도, 페루프 제동특성, 시간응답의 속응성 등을 동시에 알 수 있기 때문에 원하는 과도 응답성능을 갖는 목표특성다항식을 구하기가 용이하다. 그는 여러 가지 실제적인 제어기 설계문제에 이 방식을 성공적으로 적용하였으나 배경이론인 특성비와 제동특성의 관계는 여전히 경험적 사실에 근거하고 있다.

특성다항식의 계수파라미터 공간에서 직접 시스템을 해석하고 설계하는 기법은 Kim 등[1]에 의해 보다 더 해석적으로 접근되기 시작하였다. Kim 등은 주펄서턴스(principal pulsatance)가 일반화시정수(generalized time constant) τ 의 성질을 가지며, 특성비와 독립적으로 선택하여 원하는 응답시간을 갖는 임의 차수의 전극시스템(all-pole systems: APS)를 구성할 수 있음을 보였다. 또한, Butterworth filter의 성질을 확장하여 안정하고 원하는 제동특성을 갖는 목표특성다항식의 구성 방법을 제시하였는데, 단지 주특성비(principal characteristic ratio) α_1 과 τ 만을 사용한다. 이러한 제어기 설계 방법을 특성비지정법(characteristic ratio assignment: CRA)이라 부른다. 그런데 임의 차수의 선형플랜트에 대해 PI, PD, PID 등 저차제어기를 설계하는 경우에는 목표시스템(target model)을 선정하였더라도 차수 부정합 문제가 발생한다. 저차제어기로는 정합시킬 수 있는 목표특성다항식의 차수에 제약이 있기 때문이다. 또한 제어시스템 설계자들이

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2003. 6. 18., 채택확정 : 2003. 11. 25.

김근식 : 대전대학 인터넷정보계열(kskim@dcc.ac.kr)

김영철 : 충북대학교 전기전자컴퓨터공학부(yckim@cbucc.chungbuk.ac.kr)

※ 본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(과제번호:R01-2003-000-11738-0) 지원으로 수행하였음.

흔히 직면하는 문제는 원하는 성능을 만족시키면서 어떻게 강인성을 확보하느냐 하는 것이다. 강인성을 확보하기 위한 방안 중의 하나는 매개변수의 섭동에 덜 민감한 제어를 설계하는 것이다. CRA를 이용하여 제어를 설계하였다 하더라도, 일부 매개변수의 섭동이 시스템 성능에 매우 민감한 영향을 미친다면 실용성이 낮아진다.

본 논문에서는 제어기의 차수 부정합 문제와 강인성 문제를 다루기 위한 방안으로써 다항식 계수의 섭동과 특성비 섭동에 대한 감도를 해석하고자 한다. 더불어 이들 감도 함수와 시간응답과의 관계를 규명하고자 한다. Eslami[6]는, 파라미터 공간이 아닌, 상태공간에서 동적시스템의 감도 해석 결과를 체계적으로 정리하였다. Huelsman[7]은 다항식의 파라미터 섭동에 대한 감도를 종합적으로 정리하였는데, 전달함수의 파라미터 변동에 대한 주파수응답감도를 정리하였으나 시간응답감도는 다루지 않았다. 또한 다항식 계수와 근의 관계가 잘 알려진 저차다항식에 대해서만 근의 감도를 해석하였다. 이 방법은 계수와 근과의 관계를 구하기 힘든 고차다항식에는 적용하기 어렵다. 다항식의 계수와 근의 관계는 부분분수 전개로 구할 수는 있지만, 섭동을 일으키는 계수에 대하여 이 관계를 구하는 것은 매우 복잡한 문제이다. 감도해석은 전달함수의 분모다항식이 일반적인 경우와 Kim 등[1]이 제시한 특별한 다항식인 소위 K-다항식, 두 경우로 나누어서 다루기로 한다. 전자는 본 논문(Part I)에서, 후자는 Part II [16]에서 정리한다.

본 논문의 주요내용은 일반적인 임의 차수 다항식의 계수섭동에 대한 근감도와 함수감도를 해석한다. 이 감도해석 결과를 특성비에 대한 감도 문제로 확장한다. 그리고 함수 감도로부터 시간응답감도와 주파수응답감도를 해석한다. 그 결과로써 CRA기법이 내포하고 있는 차수 부정합 문제의 해결을 시도한다. 스텝응답에 지배적인 영향을 주는 지배특성비(dominant characteristic ratios)가 특성다항식의 저차 쪽 계수에 대응하는 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 임을 보인다. Part II에서는 이 결과를 CRA에서 정의된 K-다항식의 주특성비 섭동에 대한 감도 문제로 확장한다. 각 감도해석마다 관련 예제를 보인다.

II. 정의 및 문제설정

1. 특성파라미터 및 감도함수 정의

양의 실수 계수를 갖는 다음과 같은 다항식을 고려하자.

$$\delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0. \quad (a_i > 0) \quad (1)$$

다항식에 대한 계수의 특성비 α_i 와 일반화시정수 τ 는 다음과 같이 각각 정의 한다. 여기서, $\alpha_1 = \alpha$ 를 주특성비로 부르기로 한다.

$$\alpha_1 := \frac{a_1^2}{a_0 a_2}, \alpha_2 := \frac{a_2^2}{a_1 a_3}, \dots, \alpha_{n-1} := \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2} a_n} \quad (2)$$

$$\tau := \frac{a_1}{a_0} \quad (3)$$

반면 (2)와 (3)를 이용하여 다항식 $\delta(s)$ 의 모든 계수를 다음과 같이 α_i 와 τ 로 표현할 수 있다.

$$a_1 = a_0 \tau \quad (4)$$

$$a_j = \frac{a_0 \tau^j}{\alpha_{j-1} \alpha_{j-2}^2 \alpha_{j-3}^3 \dots \alpha_2^{j-2} \alpha_1^{j-1}}, \quad j = 2, 3, \dots, n \quad (5)$$

즉, (4)와 (5)를 이용하여 다항식 $\delta(s)$ 를 α_k, τ, a_0 로 표현하면,

$$\begin{aligned} \delta(s, \alpha_k) &= \frac{a_0 \tau^n}{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2}^2 \alpha_{n-3}^3 \dots \alpha_2^{n-2} \alpha_1^{n-1}} s^n + \dots + \\ &\frac{a_0 \tau^4}{\alpha_3 \alpha_2^2 \alpha_1^3} s^4 + \frac{a_0 \tau^3}{\alpha_2 \alpha_1^2} s^3 + \frac{a_0 \tau^2}{\alpha_1} s^2 + a_0 \tau s + a_0 \quad (6) \\ &= a_n s^n + \dots + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0. \end{aligned}$$

다음은 일반화시정수 τ 의 역할을 요약한다. 지금까지 1차 시스템이 아니면 시정수의 정의는 명확하지 않았다. 최근 Kim 등[1]은 (3)에서 정의한 τ 가 시스템의 응답속도를 결정함을 해석적으로 보였다. 이 결과에 따르면 동일한 특성비를 갖는 동일 차수의 APS의 응답속도는, 오버슈트 값을 변화시키지 않으면서, τ 에 의해 조절될 수 있다. 즉, 특성비가 동일한 임의의 두 APS에 대하여 일반화시정수가 각각 τ_1, τ_2 이면, 두 시스템의 스텝응답 $y_1(t)$ 와 $y_2(t)$ 는 다음 관계를 갖는다.

$$y_1(t) = y_2\left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \cdot t\right) \quad (7)$$

동작환경의 변화나 모형화오차 등은 시스템 전달함수의 계수섭동으로 표현할 수 있다. 모델계수 변동에 따른 시스템 감도해석은 가장 일반적인 강인성 해석의 하나이며, 특히 α_k 에 대한 시간응답 감도는 어떤 α_k 가 스텝응답에 지배적인 영향을 주는지에 대한 한 척도로서 사용할 수 있다. 이제 본 논문에서 사용할 주요 감도의 정의를 정리하기로 한다.

특성다항식 $\delta(s)$ 에서 임의의 j 번째 계수 섭동에 대한 l 번째 근(p_l)의 감도와 k 번째 특성비 α_k 가 독립적으로 섭동할 때 근의 감도를 다음과 같이 정의한다. 여기서 Θ_{lj} 는 원시감도함수(primitive sensitivity function)[6]이며, 이것을 특성비에 대한 근감도함수를 얻는데 이용한다.

$$(i) \quad \Theta_{lj} := \frac{\partial p_l}{\partial a_j}, \quad (ii) \quad US_{\alpha_k}^{p_l} := \frac{\partial p_l}{\partial \alpha_k / \alpha_k} \quad (8)$$

여기서 $\delta(s)$ 의 근은 복소수인데, 규준화감도함수(normalized sensitivity function)를 사용하면, 근의 변화(∂p_l)가 복소수로 나누어지기 때문에, 근의 섭동 방향을 잃어버린다[7]. 그러므로 특성비 섭동에 대한 근의 섭동크기는 물론 섭동방향을 얻기 위해서는 비규준화감도함수(unnormalized

sensitivity function)를 이용해야한다.

선형계 전달함수 $T(s)$ 의 분모다항식 $\delta(s)$ 에서, j 번째 계수 혹은 k 번째 특성비가 변할 때 $T(s)$ 의 계수와 특성비 각각에 대한 함수감도(function sensitivity)를 다음과 같이 정의한다.

$$(i) US_{a_j}^T := \frac{\partial T(s)}{\partial a_j/a_j}, (ii) US_{\alpha_k}^T := \frac{\partial T(s)}{\partial \alpha_k/\alpha_k} \quad (9)$$

그리고 함수감도에 입력 $R(s)$ 를 인가한 것인 출력함수 감도를 (10)과 같이 정의하여 시간응답감도를 해석하는데 사용한다.

$$Y_{a_j}^*(s) := US_{a_j}^T R(s) \text{ 또는 } Y_{\alpha_k}^*(s) := US_{\alpha_k}^T R(s) \quad (10)$$

규준화감도함수는 파라미터의 변화율에 대한 $T(s)$ 의 변화율로 정의하는데[7,8], 우리는 특성비 섭동에 대한 $T(s)$ 의 규준화함수감도를 다음과 같이 정의한다.

$$S_{\alpha_k}^{T(s)} := \frac{\partial T(s)/T(s)}{\partial \alpha_k/\alpha_k} = - \frac{\alpha_k \delta'(s)}{\delta(s)} \quad (11)$$

여기서 $\delta'(s) = \frac{\partial \delta(s)}{\partial \alpha_k}$ 이다.

주파수응답감도를 $|S_{\alpha_k}^{T(s)}|$ 로 정의하고 $s = j\omega$ 를 대입하면 스칼라 값이 되므로, 주파수응답의 방향을 예측하기 곤란하다. 그러나 (11)에서 $s = j\omega$ 를 대입하여 표현한 (12)는 복소수이므로, 매개변수 섭동에 대하여 주파수응답이 변하는 방향도 예측할 수 있다[9].

$$S_{\alpha_k}^{T(j\omega)} := S_{\alpha_k}^{|T(j\omega)|} + j \frac{\partial \arg T(j\omega)}{\partial \alpha_k/\alpha_k} \quad (12)$$

여기서 주파수크기응답감도 $S_{\alpha_k}^{|T(j\omega)|}$ 는 $S_{\alpha_k}^{T(j\omega)}$ 의 실수부이며, 위상응답감도는 이것의 허수부와 같다[7]. 그러나 주파수응답에서는 (9)와 같은 비규준화감도함수 형태가 성립하지 않으므로 (11)에 $s = j\omega$ 를 대입하여 (12)를 얻는다.

계수는 특성비의 함수이므로 특성비에 대한 계수감도는 다음과 같이 정의한다.

$$S_{\alpha_k}^{a_i} := \frac{\partial a_i/a_i}{\partial \alpha_k/\alpha_k} \quad (13)$$

2. 문제의 설정

본 논문에서는 (8)을 이용하여 선형계의 특성비 섭동에 대한 근감도를 구하고, (9)의 함수감도를 이용하여 (10)의 시간응답감도를 해석한다. 또한 (11)와 (12)를 이용하여 주파수응답 감도를 다룬다. 특히 시간응답 해석과 주파수 응답해석을 통해 특성비와 스템응답과의 관계를 제시한다. 그 결과로써 스템응답에 지배적인 영향을 주는 특성비는 단지 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 3개임을 밝힌다. 이 관계는 CRA기법을 이용한 저차제어기 설계 시 일어나는 차수정합 문제를 해결하기 위한 한 방안으로 활용된다.

III. 감도해석

1. 근감도(root sensitivity)

본 절에서는 다항식의 계수 섭동에 대한 근의 감도함수를 구하고, 이를 이용하여 특성비의 섭동에 대한 근감도를 해석하고자 한다.

(1) 다항식 계수섭동에 대한 근감도

(1)과 같이 주어진 n 차의 다항식 $\delta(s)$ 에 대하여 계수의 변동이 없을 때의 다항식을 $\delta^o(s)$ 라고 하자. 여기에 임의의 한 쌍의 복소근을 $p_l = \sigma_l \pm j\omega_l$ 로 놓고 $\delta^o(s)$ 에 대입하면 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\delta^o(p_l) = a_n(p_l)^n + a_{n-1}(p_l)^{n-1} + \dots + (a_j)(p_l)^j + \dots + a_2(p_l)^2 + a_1(p_l) + a_0 = 0. \quad (14)$$

여기서 다항식의 임의의 계수 하나가 Δa_j 만큼 변할 때, 다항식의 근이 Δp_l 만큼 변한다고 가정하면 그 관계는 다음과 같이 표현된다.

$$\delta(p_l + \Delta p_l) = a_n(p_l + \Delta p_l)^n + a_{n-1}(p_l + \Delta p_l)^{n-1} + \dots + (a_j + \Delta a_j)(p_l + \Delta p_l)^j + \dots + a_2(p_l + \Delta p_l)^2 + a_1(p_l + \Delta p_l) + a_0 = 0. \quad (15)$$

보조정리 1 : n 차 다항식에서 j 번째 계수 a_j 의 섭동에 대한 근($p_l, l = 1, 2, \dots, n$)의 원시감도함수 θ_{lj} 는 다음 성질을 갖는다.

$$(i) \theta_{lj} = \frac{\partial p_l}{\partial a_j} = - \frac{p_l^j}{\sum_{m=0}^{n-1} a_{m+1}(m+1)p_l^m} = - \frac{p_l^j}{\delta'(p_l)},$$

(ii) 만약 $|p_l| \geq 1$ 이면,

$$|\theta_{l1}| \leq |\theta_{l2}| \leq \dots \leq |\theta_{l(n-1)}| \leq |\theta_{ln}|.$$

여기서 $l = 1, 2, \dots, n$ 의 임의의 값이다.

증명 : (i) (14)에서 $\delta^o(p_l) = 0$ 이므로 a_0 는 다음과 같다.

$$a_0 = -a_n p_l^n - a_{n-1} p_l^{n-1} \dots - a_j p_l^j \dots - a_2 p_l^2 - a_1 p_l.$$

이를 (15)에 대입하면 (16)식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \{a_n(p_l + \Delta p_l)^n - a_n p_l^n\} + \\ & \{a_{n-1}(p_l + \Delta p_l)^{n-1} - a_{n-1} p_l^{n-1}\} + \dots + \\ & \{a_j(p_l + \Delta p_l)^j - a_j p_l^j\} + \{\Delta a_j(p_l + \Delta p_l)^j\} + \dots + \\ & \{a_2(p_l + \Delta p_l)^2 - a_2 p_l^2\} + \{a_1(p_l + \Delta p_l) - a_1 p_l\} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

그런데 $x^n - y^n = (x - y) \sum_{i=0}^{n-1} x^{(n-1)-i} y^i$ 의 관계[9]를 이용하면 (16)은 다음과 같다.

$$\left\{ \Delta p_l \cdot \sum_{m=0}^{n-1} a_{m+1} \sum_{i=0}^m (p_l + \Delta p_l)^{m-i} p_l^i \right\} + \Delta a_j (p_l + \Delta p_l)^j = 0 \quad (17)$$

(17)에 대하여 이항정리를 이용하여 전개하면 (18)을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\Delta p_l}{\Delta a_j} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} a_{m+1} \sum_{i=0}^m [(p_l + \Delta p_l)^{m-i-j} p_l^i] \\
 & = -\frac{\Delta p_l}{\Delta a_j} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} a_{m+1} \sum_{i=0}^m [(p_l^m - j + (m-i-j)p_l^{m-j-1}\Delta p_l) + \dots] = 1.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Δa_j 의 변화가 매우 작고, 그 결과로 $|\Delta p_l|$ 의 2계급 이상을 무시할만하다고 가정하고 $\sum_{i=0}^m p_l^i = (m+1)p_l^m$ 의 관계를 적용하면 (18)은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\Delta p_l}{\Delta a_j} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} a_{m+1} \sum_{i=0}^m p_l^{m-j} \approx 1, \\
 \lim_{\Delta a_j \rightarrow 0} \frac{\Delta p_l}{\Delta a_j} & = \frac{\partial p_l}{\partial a_j} \approx -\frac{p_l^j}{\sum_{m=0}^{n-1} a_{m+1} (m+1) p_l^m} \tag{19} \\
 & = -\frac{p_l^j}{\delta(p_l)} = \Theta_{lj}.
 \end{aligned}$$

(ii) (19)의 분자 항과 분모 항을 보면 분모 항은 j 와 무관하므로 상수이고 반면에 분자 항은 j 값에 종속적이다. 따라서, j 값은 정수이므로 $|p_l| \geq 1$ 조건에서 $|\Theta_{l1}| \leq |\Theta_{l2}| \leq \dots \leq |\Theta_{l(n-1)}| \leq |\Theta_{ln}|$ 이다. ■

임의 실수 계수 하나가 변할 경우 근이 공역 복소근 쌍으로 변하므로, 그 쌍 중 하나의 복소근의 감도를 구하면 된다. 보조정리 1로부터, $|p_l| \geq 1$ 조건에서, Θ_{lj} 의 크기는 고차 쪽에 대응하는 계수에 대하여 크기가 증가됨을 알 수 있으며 근의 공칭위치(p_l^o)에서 $\Delta p_l \approx \Theta_{lj} \Delta a_j$ 만큼 변화된 근의 위치를 추정할 수 있다. 즉, 보조정리 1을 사용하여 계수가 변할 때 변화된 근의 위치를 근사하게 예측할 수 있다.

(2) 특성비 섭동에 대한 근감도

(5)의 계수는 특성비의 함수이므로 다항식 계수에 대한 근감도를 이용하여 특성비에 대한 근감도를 얻기로 한다. 다음 보조정리 2는 주 결과인 정리 1을 유도하는데 이용된다.

보조정리 2 : 임의의 k 번째 특성비의 섭동에 대한 계수 ($a_j, j = 1, 2, \dots, n$)의 계수감도 $S_{\alpha_k}^{a_j}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{cases} S_{\alpha_k}^{a_j} = -(j-k), & (k < j) \\ S_{\alpha_k}^{a_j} = 0, & (k \geq j). \end{cases} \tag{20}$$

여기서 $k = 1, \dots, n-1$ 이다.

증명 : (5)로부터 a_j 는 $\alpha_k, k = 1, 2, \dots, j-1$ 의 함수이므로 다음 관계가 얻어진다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial a_j}{\partial \alpha_k} & = \frac{a_0 r^j}{\alpha_{j-1} \alpha_{j-2}^2 \dots \alpha_{k+1}^{j-k-1} \alpha_{k-1}^{j-k+1} \dots \alpha_1^{j-1}} \cdot \\
 & \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left(\frac{1}{\alpha_k^{j-k}} \right), \quad j = 2, 3, \dots, n \\
 & = \begin{cases} -(j-k) \cdot \frac{a_j}{\alpha_k}, & (j > k) \\ 0, & (j \leq k) \end{cases} \tag{21}
 \end{aligned}$$

(21)을 계수감도 정의 (13)에 대입하면 (20)을 얻는다. ■

다음 정리 1은 각각의 특성비가 독립적으로 섭동할 때의 근감도를 정의하는 것이다.

정리 1 : 각각의 특성비가 독립적으로 변하여 n 차 $\delta(s)$ 의 계수 값이 섭동하는 경우 근의 감도와 근의 섭동된 위치(p_l^s)는 다음과 같다.

(i) 근감도 :

$$\begin{aligned}
 US_{\alpha_k}^{p_l} & = \frac{\partial p_l}{\partial \alpha_k / \alpha_k} = -\sum_{m=k+1}^n \Theta_{lm} (m-k) a_m, \\
 & \quad k = 1, \dots, n-1.
 \end{aligned}$$

(ii) 근의 섭동된 위치 :

$$p_l^s = p_l^o + \Delta p_l \approx p_l^o + \frac{\Delta \alpha_k}{\alpha_k} US_{\alpha_k}^{p_l}.$$

여기서 p_l^o 는 l 번째 근의 공칭위치이다.

증명 : (i) $\delta(s)$ 의 근 $p_l = p_l(a_1, \dots, a_n)$ 이 연속해서 편미분 $\frac{\partial p_l}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial p_l}{\partial a_n}$ 이 가능하고, 임의의 계수 a_j 는 α_k 의 함수이므로, α_k 로 미분이 가능하다. 그러므로 미분연쇄 법칙(chain rule)에 의해 다음 관계를 얻는다.

$$\frac{\partial p_l}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial p_l}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial p_l}{\partial a_3} \frac{\partial a_3}{\partial \alpha_1} + \dots + \frac{\partial p_l}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial \alpha_1} \tag{22}$$

따라서 특성비 α_1 의 변동에 따른 근의 감도는 보조정리 1과 2를 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 US_{\alpha_1}^{p_l} & = \Theta_{l2} S_{\alpha_1}^{a_2} a_2 + \Theta_{l3} S_{\alpha_1}^{a_3} a_3 + \dots + \Theta_{ln} S_{\alpha_1}^{a_n} a_n \\
 & = -\sum_{m=2}^n \Theta_{lm} (m-1) a_m.
 \end{aligned} \tag{23}$$

α_2 의 경우에는 $S_{\alpha_2}^{a_2} = 0$ 이고, $j > 2$ 에 대하여 $S_{\alpha_2}^{a_j} = -(j-2)$ 이므로, α_2 에 대한 근감도는 다음과 같다.

$$US_{\alpha_2}^{p_l} = -\sum_{m=3}^n \Theta_{lm} (m-2) a_m \tag{24}$$

마찬가지 방법으로 $S_{\alpha_{n-1}}^{a_n} = 0, S_{\alpha_{n-1}}^{a_{n-1}} = 0, \dots, S_{\alpha_{n-1}}^{a_{j-2}} = 0, S_{\alpha_{n-1}}^{a_{j-1}} = 0$ 이며, $S_{\alpha_{n-1}}^{a_j} = -(n-(n-1))$ 이므로 α_{n-1} 에 대한 근감도는 다음과 같다.

$$US_{\alpha_{n-1}}^{p_l} = -\sum_{m=n}^n \Theta_{lm} (m-(n-1)) a_m. \tag{25}$$

따라서 (23), (24), (25)를 종합하여 정리하면

$$US_{\alpha_k}^{p_i} = - \sum_{m=k+1}^n \Theta_{lm}(m-k)a_m \text{ 이 된다.}$$

(ii) 각각의 특성비가 독립적으로 섭동을 할 때 근감도 정의 (8)로부터 $\partial p_i = \partial \alpha_k / \alpha_k \cdot US_{\alpha_k}^{p_i}$ 이므로 $\Delta p_i \approx \Delta \alpha_k / \alpha_k \cdot US_{\alpha_k}^{p_i}$ 만큼의 근의 섭동을 얻는다. 따라서 특성비가 섭동하였을 때의 근의 섭동된 위치(p_i^s)는 공칭위치(p_i^*)에 Δp_i 을 더한 값으로 근사화 된다. ■

보조정리 1에서는 Θ_{lm} 의 크기가 고차 쪽 계수에 대하여 증가되었다. 그런데, 특성비에 대한 근감도 $US_{\alpha_k}^{p_i}$ 은, Θ_{lm} 에 다항식 계수 a_m 값을 곱한 것을 모두 합한 것이므로 그 크기의 증감경향이 다르다. 다음에서 특성비에 대한 근의 감도를 예제를 통해 살펴보기로 한다.

예제 1 : 5차의 다항식 $\delta(s)$ 를 고려해보자. 이 때 특성비와 근은 다음과 같다. 각각의 특성비에 대한 근의 감도를 구한다. 또한 임의의 특성비를 변경 시켜가면서 근의 감도를 구한 후, 정리 1 (ii)를 사용하여 변경되는 근의 섭동된 위치를 얻고자 한다. 이 결과가 실제 근의 위치와 일치하는지 살펴보자. 여기서 \bar{p}_i 는 p_i 에 대한 공액 복소근이다.

▶ 다항식 :

$$\delta(s) = 0.74s^5 + 15.60s^4 + 137.53s^3 + 678.5s^2 + 1500s + 1500$$

▶ 특성비 : $\alpha_k = [2.3800, 1.9255, 1.9255, 2.3800]$

▶ 공칭근 :

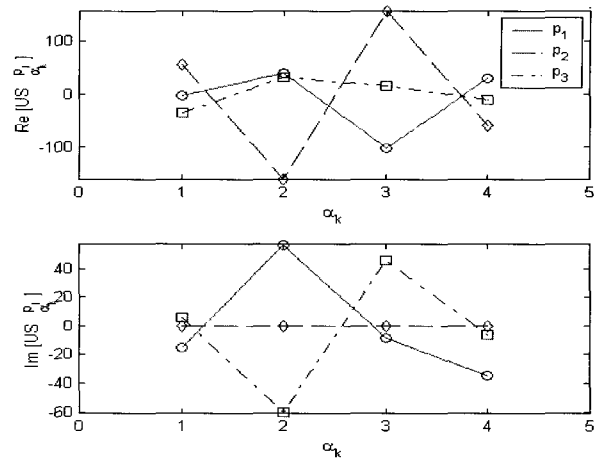
$$\begin{cases} p_i = [p_1, p_2, p_3] = [-4.867 + j2.626, -4.583, -3.342 + j1.803] \\ \bar{p}_i = \bar{p}_1, \bar{p}_3 = [-4.867 - j2.626, -3.342 - j1.803]. \end{cases}$$

그림 1(a)은 각각의 특성비에 대한 근의 감도이다.

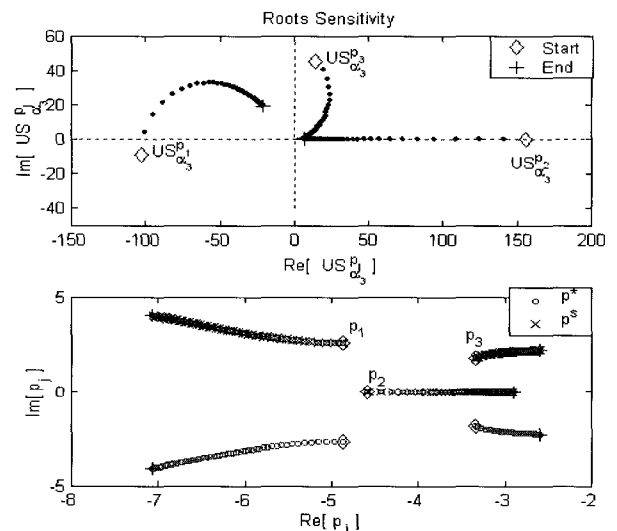
한 예로 α_3 의 섭동에 대하여 근 p_1 의 감도는 $-103-j8.5$ 이다. 이는 α_3 가 증가 값을 가지고 섭동할 때, 감도의 실수부가 매우 크므로 근 p_1 의 실수부 값은 큰 값을 가지고 감소하며, 허수부는 상대적으로 적게 감소한다. 그림 1(b)에서는, α_3 값을 0.1%씩 일정한 간격으로 증가시켜가면서 감도의 변화를 추적하였으며, 이 때 감도로부터 구한 추정 근 위치(p^s)와 실제 근위치(p^*)를 도시하였는데, 각각의 근의 자취가 일치하고 있음을 알 수 있다. 이 때 근 p_1 에 대한 감도의 실수부가 (-) 값을 갖지만 감도크기가 점점 줄어들기 때문에, 근 p_1 의 실수부 값은 감소하지만 상대적으로 감소량이 줄어들고 있다. 반면에 p_1 의 허수부 감도는 (-) 값에서 (+) 값으로 천이하므로, 근 p_1 의 허수부 값이 증가되고 있다. 공액 복소근에 대하여는 (+) 허수부를 갖는 3개의 복소근만을 비교하였다. 본 예제를 통해, 정리 1은 특성비에 대한 근의 성질을 해석하는데 매우 유용함을 알 수 있다. ■

2. 시간응답 감도

전달함수에서 파라미터의 섭동이 일어날 때, 주파수응답



(a) Root sensitivities for characteristic ratios.



(b) Real root loci and root loci using root sensitivity when α_3 changes.

그림 1. 특성비 α_k 의 독립적인 섭동에 따른 근감도.

Fig. 1. Root sensitivity when α_k perturbs independently.

뿐만 아니라 시간응답의 변화를 추정하는 일은 시스템 성능 해석과 설계에 있어서 매우 중요한 일 중의 하나다. 본 절에서는 먼저 선형계의 계수의 섭동에 대한 함수감도를 구하고, 이를 이용하여 특성비의 섭동에 대한 함수감도를 구한다. 이 함수감도 결과를 시간응답의 감도 문제로 확장하고자 한다.

선형계에 대하여 파라미터 변동이 없는 공칭 전달함수를 $T^o(s)$, 파라미터 섭동만큼 변경된 모델을 $\Delta T(s)$ 라고 정의하고, 각각의 시간영역 출력을 $y^o(t)$, $\Delta y(t)$ 라고 하자. 그리고 함수감도에 스텝입력 $R(s) = 1/s$ 이 인가될 때, 출력함수감도(10)에 대한 시간응답감도를 $y^s(t)$ 라고 하자.

(1) 다항식 계수섭동에 대한 시간응답감도

다항식 계수에 대한 함수감도($US_{a_j}^T$)를 구하고, 이를 이용하여 출력의 관점에서 시간응답감도를 해석한다.

보조정리 3 : 안정한 n 차 시스템 $T(s) = \frac{n(s)}{\delta(s)}$ 의 특성다항식 $\delta(s)$ 의 j 번째 계수($a_j, j = 1, 2, \dots, n$)가 섭동할 때, 계수에 대한 함수감도와 출력섭동은 다음과 같다.

$$(i) \begin{cases} US_{a_j}^T := -\frac{a_j s^j}{\delta(s)} \cdot T(s), & (j = 1, 2, \dots, n) \\ \Delta y(t, a_j) \cong \frac{\Delta a_j}{a_j} y_{a_j}^s(t) \end{cases}$$

(ii) 만약 $T(0) > 0$ 이면 $US_{a_j}^T$ 에 대한 스텝응답 $y_{a_j}^s(t)$ 는 0을 중심으로 $(-, +, -, +, \dots)$ 의 방식으로 교번하면서 0으로 수렴하고, $T(0) < 0$ 이면 $y_{a_j}^s(t)$ 는 0을 중심으로 $(+, -, +, -, \dots)$ 의 방식으로 교번하면서 0으로 수렴한다.

증명 : (i) 주어진 n 차 시스템 $T(s) = \frac{n(s)}{\delta(s)}$ 에서 $\delta(s)$ 의 임의의 j 번째 계수가 섭동할 때, 계수에 대한 함수감도 $US_{a_j}^T := \frac{\partial T(s)}{\partial a_j / a_j} = -\frac{a_j s^j}{\delta^2(s)} n(s) = -\frac{a_j s^j}{\delta(s)} T(s)$ 는 쉽게 구해진다. 이 때 계수의 섭동 Δa_j 를 갖는 $T(s)$ 에 대하여 Taylor's Series 로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T(s, a_j + \Delta a_j) &= T^0(s) + \Delta T(s) \\ &= T^0(s) + \frac{\partial T}{\partial a_j} \Delta a_j + \dots \end{aligned} \quad (26)$$

(26)을 일차 도함수 항까지 근사화 하여 계수의 섭동에 대한 영향을 고려하고, 이를 계수에 대한 비규준화함수감도로 표현하면 다음과 같다.

$$\Delta T(s) \cong \frac{\partial T}{\partial a_j} \Delta a_j = \frac{\Delta a_j}{a_j} US_{a_j}^T. \quad (27)$$

$\Delta y(t, a_j)$ 는 $\Delta T(s)$ 의 스텝응답이므로 증명이 완성된다.

(ii) m 개의 영점이 추가되고 중복 근을 갖는 시스템 $T'(s) = s^m n(s) / \delta^2(s)$ 를 고려해보자. 이 시스템의 스텝응답은 영점이 추가되지 않았을 때의 스텝응답을 m 번 미분한 임펄스 응답이 된다. 따라서 $T(0) > 0$ 이면 초기 스텝응답은 항상 (+) 값을 갖는다. dc 이득값이 0이므로 $(+, -, +, -, \dots)$ 의 방식으로 교번하면서 0에 수렴한다. 반면에 $T(0) < 0$ 이면 초기 스텝응답은 항상 (-) 값을 갖고 $(-, +, -, +, \dots)$ 의 방식으로 교번하면서 0에 수렴한다. 이 성질로부터 계수에 대한 함수감도에 입력 $R(s) = 1/s$ 가 인가된 출력함수감도 $Y^s(s) = US_{a_j}^T R(s) = -\frac{a_j s^j}{\delta(s)} T(s) R(s) = -\frac{a_j n(s) s^j}{\delta^2(s)} R(s)$ 의 시간응답감도 $y_{a_j}^s(t)$ 는 $T(0) > 0$ 일 때

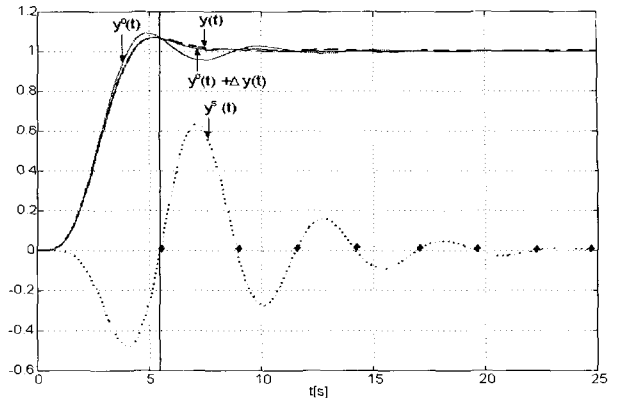


그림 2. 계수의 섭동에 대한 시간응답감도.

Fig. 2. Output sensitivity to coefficient change.

$(-, +, -, +, \dots)$ 의 방식으로 교번하면서 0으로 수렴한다. 마찬가지로 $T(0) < 0$ 의 조건에서는 $(+, -, +, -, \dots)$ 의 방식으로 교번하면서 0으로 수렴한다. ■

보조정리 3은 $T(s)$ 의 특성비 섭동에 대한 시간응답 감도를 해석하는데 사용된다. 이 방법은 Perkins[10,11]의 것과 다르지만 동일한 결과를 낸다. Perkins는 출력 $y(t)$ 를 Taylor's Series로 전개하여 시간응답 성능에 영향을 미치는 파라미터를 추출하였다. 따라서 그 파라미터 추출과정이 상대적으로 복잡하다. 반면에 본 논문에서는, 출력 $y(t)$ 가 아닌 $T(s)$ 를 직접 Taylor's Series로 전개하여 함수감도를 얻은 후, 그 함수감도를 이용하여 시간응답감도를 얻는다. 따라서 본 논문의 접근방법이 Perkins의 방법에 비하여 상대적으로 더 간단하다. 계수의 출력함수감도에 대한 시간응답감도 $y_{a_j}^s(t)$ 의 크기가 0을 중심으로 상하로 천이하는 시점을 감도교차점이라고 하자. 감도교차점과 대응하여 $T(s)$ 계수의 변경 전과 후 각각에 대한 스텝응답이 교차한다. 예제를 통해 다항식 계수의 변동에 대한 시간응답감도와 시스템 출력을 함께 고찰해본다.

예제 2 : 다음과 같은 4차 제어 시스템을 고려해보자. 임의의 계수 변동에 대한 시간영역 출력의 변동을 보기로 한다.

$$T(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2.5s + 1}$$

한 예로서, a_2 가 10% 증가한 경우를 고려한다. a_2 계수에 대한 함수감도를 구하여 시간응답감도 $y^s(t)$ 를 얻는다. 보조정리 3의 $\Delta T(s)$ 를 이용하여 추정 스텝응답 $y^o(t) + \Delta y(t)$ 를 구한다. 그림 2에서 $T(s)$ 의 실제 스텝응답 $y(t)$, 추정치, 공칭치 $y^o(t)$ 를 나타내었다. 최대 편차 1% 이내의 정확도를 보인다.

또한 시간응답감도 $y^s(t)$ 가 (-)일 때, a_2 값 증가 후의 출력은 공칭 출력 $y^o(t)$ 보다 작다. 감도교차점에서는 a_2 증가 전 및 후 각각에 대한 스텝응답도 교차한다. $y(t)$ 가

감도교차점을 지나 (+)가 되면, 반대로 $y(t)$ 가 $y^o(t)$ 보다 커진다. 이러한 성질은 시간영역 과도응답 해석에도 유용할 것이다. ■

(2) 특성비 섭동에 대한 시간응답감도

계수에 대한 함수감도를 이용하여 특성비의 섭동에 대한 함수감도를 구하고, 다시 그것을 이용하여 시간응답감도를 해석하고자 한다. 특성비에 대한 함수감도는 정리2로 나타난다.

정리 2 : 안정한 n 차 시스템 $T(s) = \frac{n(s)}{\delta(s)}$ 에서 k 번

째 특성비가 독립적으로 변할 때, 특성비에 대한 함수감도는 다음과 같은 성질을 갖는다.

(i)

$$\begin{cases} US_{\alpha_k}^T = \frac{T(s)}{\delta(s)} \sum_{m=k+1}^n (m-k)a_m s^m, (k=1,2,\dots,n-1), \\ \Delta y(t) \doteq \frac{\Delta \alpha_k}{\alpha_k} \cdot y_{\alpha_k}^s(t) \end{cases}$$

(ii) 만약 $T(0) > 0$ 이면, $US_{\alpha_k}^T$ 에 대한 스텝응답 $y^s(t)$ 는 0을 중심으로 (+,-,+,-,...)의 방식으로 교번하면서 0으로 수렴하고, $T(0) < 0$ 이면 $y^s(t)$ 는 0을 중심으로 (-,+,-,+,...)의 방식으로 교번하면서 0으로 수렴한다.

증명 : (i) $T = T(a_0, \dots, a_n)$ 는 연속해서 편미분 $\frac{\partial T}{\partial a_0}, \dots, \frac{\partial T}{\partial a_n}$ 이 가능하고, 다항식 계수 a_j 는 α_k 의 함수로서 α_k 로 미분 가능하므로 미분연쇄법칙에 의거 다음 관계를 얻는다.

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial T}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial T}{\partial a_3} \frac{\partial a_3}{\partial \alpha_1} + \dots + \frac{\partial T}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial \alpha_1}. \quad (28)$$

계수에 대한 함수감도 정의 (9)로부터 $\frac{\partial T}{\partial a_2} = \frac{1}{a_2} US_{a_2}^T, \dots, \frac{\partial T}{\partial a_n} = \frac{1}{a_n} US_{a_n}^T$ 를 얻는다. 여기에 보조정리 2와 3의 결과를 대입하여 (28)에 적용하면, 특성비 α_1 의 변동에 따른 함수감도는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} US_{\alpha_1}^T &= \frac{\partial T}{\partial \alpha_1 / \alpha_1} = US_{a_2}^T S_{\alpha_1}^{a_2} + US_{a_3}^T S_{\alpha_1}^{a_3} + \dots + US_{a_n}^T S_{\alpha_1}^{a_n}, \\ &= \sum_{m=2}^n US_{a_m}^T S_{\alpha_1}^{a_m} = - \sum_{m=2}^n US_{a_m}^T (m-1). \end{aligned} \quad (29)$$

α_2 의 경우에는, $S_{\alpha_2}^{a_2} = 0$ 이고, $j > 2$ 이면 $S_{\alpha_2}^{a_j} = -(j-2)$ 이므로, $US_{\alpha_2}^T$ 는 다음과 같이 된다.

$$US_{\alpha_2}^T = \sum_{m=3}^n US_{a_m}^T S_{\alpha_2}^{a_m} = - \sum_{m=3}^n US_{a_m}^T (m-2) \quad (30)$$

같은 방법으로 α_{n-1} 에 대한 각 계수의 감도를 구하면, $S_{\alpha_{n-1}}^{a_1} = S_{\alpha_{n-1}}^{a_2} = 0, \dots, S_{\alpha_{n-1}}^{a_{n-1}} = 0$ 이고 $S_{\alpha_{n-1}}^{a_n} =$

$-(n-(n-1))$ 이므로 $US_{\alpha_{n-1}}^T$ 를 쉽게 얻을 수 있다.

$$US_{\alpha_{n-1}}^T = - \sum_{m=n}^n US_{a_m}^T (m-(n-1)). \quad (31)$$

따라서 (29),(30),(31)을 종합하면 특성비 섭동에 대한 함수감도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} US_{\alpha_k}^T &= - \sum_{m=k+1}^n US_{a_m}^T (m-k) \\ &= \frac{T(s)}{\delta(s)} \sum_{m=k+1}^n (m-k)a_m s^m. \end{aligned} \quad (32)$$

$\Delta T(s) = \frac{\Delta \alpha_k}{\alpha_k} \cdot US_{\alpha_k}^T$ 의 관계는 보조정리 3의 증명과정과 같이 $T(s)$ 에 대한 Taylor's Series를 이용하면 쉽게 구할 수 있으며, $US_{\alpha_k}^T$ 에 대한 스텝응답을 $y_{\alpha_k}^s(t)$ 로 표현하면 $\Delta y(t) = \frac{\Delta \alpha_k}{\alpha_k} \cdot y_{\alpha_k}^s(t)$ 를 얻는다.

(ii) 보조정리 3에서, 계수에 대한 함수감도 $US_{a_j}^T$ 의 스텝응답 $y_{a_j}^s(t)$ 가 $T(0) > 0$ 의 조건에서 (-,+,-,+,...)의 방식으로 교번하면서 0에 수렴하는 성질을 보였다. 이 성질을 이용하면, 특성비의 섭동에 대한 함수감도 $US_{\alpha_k}^T = - \sum_{m=k+1}^n US_{a_m}^T (m-k)$ 에 대한 스텝응답 $y_{\alpha_k}^s(t)$ 가 (+,-,+,-,...)의 방식으로 교번하면서 0 값으로 수렴함을 쉽게 보일 수 있다. 마찬가지로 방법으로 $T(0) < 0$ 의 조건에서 $y_{\alpha_k}^s(t)$ 의 교번 방식은 반대가 된다. ■

각각의 특성비의 출력함수감도에 대한 시간응답감도 $y_{\alpha_k}^s(t)$ 의 크기가 0을 중심으로 상하로 천이하는 감도교차점을 고려해보자. 계수에 대한 시간응답감도와 마찬가지로 감도교차점과 대응하여 $T(s)$ 특성비의 변경 전과 후 각각에 대한 스텝응답이 교차한다.

오버슈트가 없는 전달함수 $T(s)$ 를 구성하였다고 가정하자. 각각의 특성비가 독립적으로 섭동할 때, 시스템 응답에 주도적으로 영향을 주는 특성비가 무엇인지를 예제를 통해 살펴보기로 한다.

예제 3 : 스텝응답이 오버슈트를 갖지 않는 다음의 7차 APS를 고려한다.

$$T(s) = \frac{1500}{0.0025s^7 + 0.11s^6 + 2.18s^5 + 24.13s^4 + 161.7s^3 + 666.5s^2 + 1500s + 1500}$$

위 시스템의 일반화시정수 $\tau = 1$ 이고, $\delta(s)$ 의 특성비는 다음과 같다.

$$\alpha_k^* = [2.285, 1.777, 1.651, 1.651, 1.777, 2.285]$$

(a) 첫 번째로, 특성비의 변동에 대한 시간응답감도와 스텝응답을 함께 고찰해본다. 한 예로서, 특성비 α_1 에 대한 함수감도를 구하여 시간응답감도 $y^s(t)$ 를 구하고, $\alpha_1 = 2.285$ 의 $\pm 10\%$ 변동에 대해 정리 2를 이용하여 추정

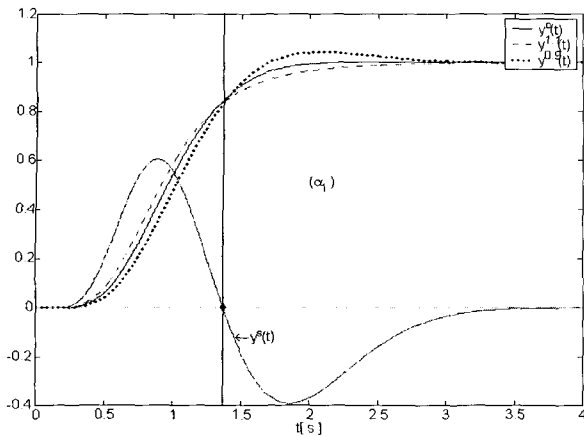


그림 3. 특성비 α_1 섭동에 대한 시간응답감도와 스텝응답.
Fig. 3. Step responses and output sensitivity to the CR α_1 change.

스텝응답 $y^{1.1}(t)$, $y^{0.9}(t)$ 를 구하였다. 그림 3은 이것을 보여준다. 특성비를 증가시킨 경우 $y^s(t)$ 가 (+)영역에 있으면 $y^{1.1}(t)$ 는 $y^o(t)$ 보다 크지만, 반대로 $y^s(t)$ 가 (-)영역에 있으면 작다. 감도교차점에서는 α_1 증가 전 및 후 각각에 대한 스텝응답도 교차한다. 이러한 결과를 이용하여 각각의 특성비에 대한 함수감도를 구하면, 각 특성비의 독립적인 증감이 시간응답에 미치는 영향을 알 수 있다.

(b) 여기서는 각 특성비에 대한 함수감도를 비교함으로써 스텝응답에 주도적으로 영향을 주는 특성비가 무엇인지를 조사하기로 한다. 이를 위해 기준특성비 $\alpha_k^* = [\alpha_1, \dots, \alpha_4]$ 를 각각 독립적으로 증감하되 다음과 같이 고려한다.

(i) 특성비 감소 : Lipatov[5]의 시스템 안정조건을 만족시키는 최저 값으로 각 특성비를 독립적으로 하나씩 감소(이 예에서는 $\alpha_k = 0.8\alpha_k^*$ 로 선택 함.)

(ii) 특성비 증가 : 각 특성비가 4이상 이 되도록 독립적으로 2.5배 증가(모든 특성비가 4이상이면, $\delta(s)$ 의 특성근은 모두 음의 실근을 갖게 되어[5], APS의 경우 스텝응답은 과제동응답 성능을 보인다.)

그림 4에서 $y^o(t)$ 는 $T(s)$ 에 대한 스텝응답이며, $y^{2.5}(t)$, $y^{0.8}(t)$ 는 특성비 $\alpha_1 \sim \alpha_4$ 를 독립적으로 최대 혹은 최소로 증감($2.5\alpha_k^*$, $0.8\alpha_k^*$)시켰을 때의 스텝응답이다. $y_k^s(t)$ 는 출력함수감도($US_{y_k}^T$)로써 얻은 시간응답감도이다. 특성비를 증가시킨 경우, $y_k^s(t)$ 가 (+) 영역에 있으면, $y^{2.5}(t)$ 는 $y^o(t)$ 보다 크며, 반대로 $y_k^s(t)$ 가 (-)영역에 있으면, 작다. 특성비 감소의 경우인 $y^{0.8}(t)$ 는 반대의 대소 관계를 보여준다.

이 결과는 저차의 α_k 의 변동은 스텝응답의 오버슈트 혹은 요동하도록 작용하며, $k \geq 4$ 인 고차의 α_k 의 변동은 시스템이 안정하기만 하면 스텝응답에 거의 영향을 주지

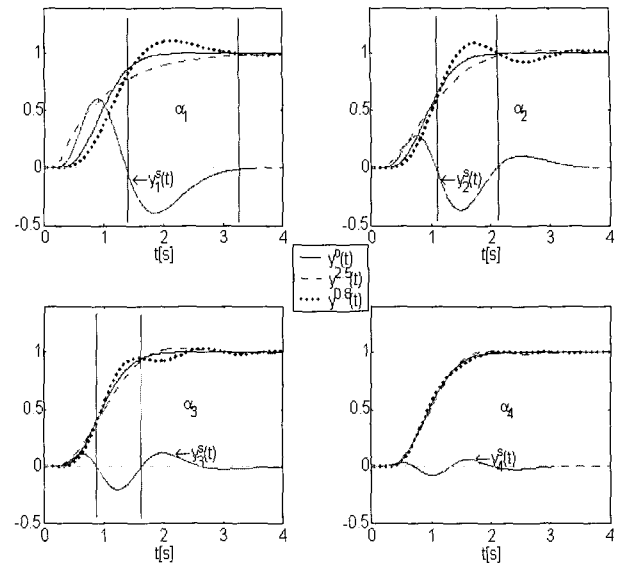


그림 4. 특성비에 대한 시간응답 감도.
Fig. 4. Output sensitivity to independent change of α_k .

않음을 관찰할 수 있다. 그림 4에서 특성비 변경 전후의 스텝응답이 그림 3과 달리 감도교차점에서 정확히 교차하지 않는 것은 특성비의 증감을 매우 크게 고려하였기 때문이다. ■

예제 3으로부터 시간영역 스텝응답 성능에 지배적인 영향을 미치는 특성계수는 일반화시정수를 포함한 $\tau, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 이고, 나머지 α_k 의 영향은 무시할 수 있다는 것을 알 수 있다. 그래서 4차 이상 시스템의 특성비 $\{\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*\}$ 를 지배특성비 (dominant characteristic ratios)라고 정의하기로 한다. 이 성질은 비록 수치 해석적 관찰이긴 하지만 다음과 같은 부등식 조건의 근거가 될 수 있다. 어떤 APS가 $\alpha_1 \geq \alpha_1^*, \alpha_2 \geq \alpha_2^*, \alpha_3 \geq \alpha_3^*$ 의 부등식 조건을 만족하는 특성다항식을 갖는다면, 그 시스템은 지배특성비 $\{\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*\}$ 를 갖는 시스템과 유사하거나 보다 큰 제동특성을 갖는 것으로 분류될 수 있다. 이것은 오버슈트가 없거나 매우 미미한 과도응답성능을 내는 목표 시스템을 다음 부등식 조건을 만족하는 α_k 에 의해 합성할 수 있음을 의미한다. 여기서, 나머지 $\alpha_i, (i \geq 4)$ 는 안정도가 만족하기만 하면 임의로 결정할 수 있다.

$$\alpha_1 \geq \alpha_1^*, \alpha_2 \geq \alpha_2^*, \alpha_3 \geq \alpha_3^*. \quad (31)$$

4. 주파수응답감도

Huelsman[7]은 $\delta(s)$ 의 계수섭동에 대한 $T(s)$ 의 주파수응답감도를 체계적으로 정리하였다. 본 절에서는 이 개념을 도입하여 특성비 섭동에 대한 주파수응답의 감도를 해석한다. Huelsman의 주파수응답감도 정의를 특성비에 대한 주파수응답감도로 확장하기 위하여 함수감도 정의(11)를 사용하고 이를 (6)의 다항식 $\delta(s)$ 에 적용한다. 그 결과를 분자 항과 분모 항으로 나누어 전개하면 다음과 같다.

$$-\alpha_k \delta(s) \Big|_{s=j\omega} = \sum_{t=k+1}^n \frac{t-k}{\alpha_k^{t-k-1}} a_t (j\omega)^t = \delta_{\alpha_k}^e(\omega^2) + j\omega \delta_{\alpha_k}^o(\omega^2) \quad (32)$$

$$\delta(s) \Big|_{s=j\omega} = \sum_{t=0}^n a_t (j\omega)^t = \delta^e(\omega^2) + j\omega \delta^o(\omega^2)$$

(32)의 결과를 실수부와 허수부로 분리하면 다음과 같이 표현된다.

$$S_{\alpha_k}^{T(j\omega)} = \frac{\delta_{\alpha_k}^e(\omega^2) \delta^e(\omega^2) + \omega^2 \delta_{\alpha_k}^o(\omega^2) \delta^o(\omega^2)}{[\delta^e(\omega^2)]^2 + \omega^2 [\delta^o(\omega^2)]^2} + j\omega \frac{\delta_{\alpha_k}^o(\omega^2) \delta^e(\omega^2) - \delta_{\alpha_k}^e(\omega^2) \delta^o(\omega^2)}{[\delta^e(\omega^2)]^2 + \omega^2 [\delta^o(\omega^2)]^2} \quad (33)$$

$$= S_{\alpha_k}^{|T(j\omega)|} + j \frac{\partial \arg T(j\omega)}{\partial \alpha_k / \alpha_k}$$

여기서

(i)

$$\delta_{\alpha_k}^e(\omega^2) = \sum_{t=T}^m \frac{(-1)^t (2t-k)}{\alpha_k^{2t-1-k}} a_{2t} \omega^{2t}, \quad n=2m, n=2m+1$$

$$\delta_{\alpha_k}^o(\omega^2) = \begin{cases} \sum_{t=T}^{m-1} \frac{(-1)^t (2t+1-k)}{\alpha_k^{2t-k}} a_{2t+1} \omega^{2t}, & n=2m \\ \sum_{t=T}^m \frac{(-1)^t (2t+1-k)}{\alpha_k^{2t-k}} a_{2t+1} \omega^{2t}, & n=2m+1. \end{cases} \quad (34)$$

이 때 $k = \text{홀수}$ 이면 $T = \frac{k+1}{2}$, $k = \text{짝수}$ 이면 $T = \frac{k+2}{2}$ 이다.

(ii)

$$\delta^e(\omega^2) = \sum_{t=0}^m (-1)^t a_{2t} \omega^{2t}, \quad n=2m, n=2m+1$$

$$\delta^o(\omega^2) = \begin{cases} \sum_{t=0}^{m-1} (-1)^t a_{2t+1} \omega^{2t}, & n=2m \\ \sum_{t=0}^m (-1)^t a_{2t+1} \omega^{2t}, & n=2m+1. \end{cases} \quad (35)$$

규준화함수감도의 주파수크기응답 값이 최저인 주파수 (w_L)를 최소감도주파수라고 하고 이 감도 값이 (+) 값으로 천이하는 0 값을 갖는 주파수를 감도교점주파수(w_r)라고 정의하자. 주파수크기응답이 $-3[\text{dB}]$ 일 때의 주파수인 차단 주파수(w_c)를 고려한다. Chestnut [12]는, 차단주파수가 증가 될수록 응답속도가 증가하고, 차단주파수 이상에서 주파수 크기응답의 감쇠율이 클수록 스텝응답의 오버슈트가 증가 한다고 주장하였다. 예제를 통해 특성비 섭동에 대한 주파수크기응답을 살펴보기로 한다.

예제 4 : 다음 8차의 APS를 고려한다.

$$T(s) = \frac{1500}{0.00015s^8 + 0.0084s^7 + 0.21s^6 + 3.12s^5 + 29.0s^4 + 175.5s^3 + 672.6s^2 + 1500s + 1500}$$

위 시스템의 일반화시정수 $\tau = 1$ 이고, 특성비는 다음과 같다.

$$\alpha_k^* = [2.230, 1.718, 1.577, 1.542, 1.577, 1.718, 2.230]$$

각각의 특성비에 대한 감도의 주파수크기응답을 구하고, 각 특성비를 Lipatov[5] 안정조건 범위 내 ($\alpha_k = 0.9\alpha_k^*$)에

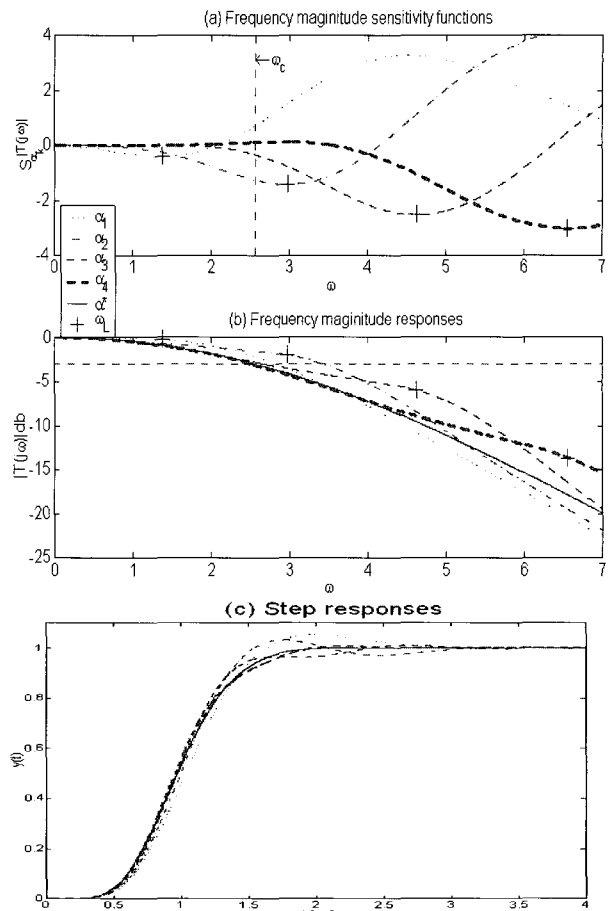


그림 5. 특성비 섭동에 대한 주파수응답감도, 주파수 응답, 시텝응답.

Fig. 5. Frequency sensitivity, frequency responses and step responses to characteristic ratios change.

서 각각 독립적으로 감소시킨 후, 시간응답에 미치는 영향을 조사하였다. α_k 각각에 대한 주파수크기응답 감도를 그림 5(a)에 도시하였다.

또한 그림 5(b)에 특성비를 각각 독립적으로 감소시켰을 때의 주파수크기응답을, 그림 5(c)에는 대응하는 스텝응답을 도시하였다. 결과를 고찰해보면 차단주파수 이하 대역에서는 특성비 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 에서 대한 감도가 크고, α_4 에 대한 감도는 작은 것으로 나타났다. 그리고 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 에 대한 감도크기는 차단주파수 이전에 주로 (-) 값을 가지므로, 특성비를 감소시키면 주파수크기응답의 감쇠율은 작아지고, 따라서 차단주파수가 증가하여 응답속도를 빠르게 한다. 또한, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 에 대하여 $w_L |_{\alpha_1} < w_L |_{\alpha_2} < w_L |_{\alpha_3}$ 이며, 주파수크기응답은 $w_L < w$ 영역에서 급격히 감쇠하므로 스텝응답의 오버슈트나 굽어지는 모양 (bending mode)의 원인이 된다. 한편 α_4 이상의 특성비 섭동에 대한 감도는 차단 주파수이하 대역에서는 거의 없고, 최소감소주파수(w_L)에

서의 주파수크기응답의 약 -15[dB]이기 때문에 시간응답에 미치는 그 영향도 거의 무시할 수 있는 정도다. 이러한 관찰 결과는 앞 절의 특성비에 대한 시간응답감도에 대한 것과 거의 같다. 따라서 지배특성비는 α_1^* , α_2^* , α_3^* 임이 재확인된다. ■

IV. 결론

본 논문에서는 일반다항식을 특성비로 표현하여, 계수와 특성비에 대한 여러 가지 감도를 해석하였다. 이를 이용하여 CRA의 특성을 감도측면에서 고찰하였다. 다항식 계수의 섭동에 대한 근감도의 성질을 보였으며, 다항식 계수에 대한 근감도를 이용하여 특성비의 섭동에 대한 근감도함수를 구하였고, 그 근감도함수를 이용하여 근의 섭동된 위치를 근사적으로 추적할 수 있는 방법을 제시하였다. 이는 CRA를 이용하여 제어기를 설계할 경우, 강인성이나 근의 분포에 대한 고찰이 가능함을 의미한다. 페루프 시스템의 함수 감도를 해석하고, 이 결과를 선형시스템의 시간응답감도와 주파수응답감도 해석에 이용하였으며, 특성비의 섭동이 스텝응답 과도성능에 미치는 영향을 해석하였다. 특히, 특성비에 대한 근감도와 시간응답감도는 둘 다 유리함수에 의해 명확하게 계산할 수 있음을 보였다. 그리고 제어시스템의 과도응답에 지배적인 영향을 미치는 지배특성비가 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 임을 밝혔다. 이 결과들은 CRA를 저차제어기 설계에 적용 시 유용하게 적용할 수 있을 것이다 [13,14,15]. 그러나, 특성비에 대한 계수적 감도해석은 계수의 특정 값에서의 민감도를 나타내는 것이지 응답 자체를 알려 주지는 않는다. 다시말해, 특성비가 주어진 경우 이 값으로부터 직접 그 시스템의 오버슈트 크기, 정착시간 등을 알 수는 없다. 이것은 고차 시스템의 극과 영점의 위치로부터 직접 시간응답성능을 계산하기가 어려운 것과 유사한 문제이다.

참고문헌

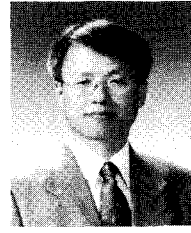
- [1] Y. C. Kim, L. H. Keel, and S. P. Bhattacharyya, "Transient response control via characteristic ratio assignment", *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-48, no. 12 pp. 2238-2244, Dec. 2003.
- [2] P. Naslin, *The Dynamics of Linear and Non-Linear Systems*, Cordon and Breach Science Publishers, New York, NY, 1965.
- [3] P. Naslin, *Essentials of Optimal Control*, Boston Technical Publishers, Inc., Cambridge, MA, 1969.
- [4] S. Manabe, "Coefficient diagram method", *Proceedings of the 14th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, pp. 199-210, Seoul, Korea, 1998.
- [5] A. V. Lipatov and N. I. Sokolov, "Some sufficient conditions for stability and instability of continuous linear stationary systems," *Automation and Remote Control*, vol. 39, pp. 1285-1291, 1979
- [6] M. Eslami, *Theory of sensitivity in Dynamic Systems*, Springer-Verlag, 1994
- [7] L. P. Huelsman, *Active and Passive analog Filter Design - An Introduction*, McGraw-Hill Book Company, 1993
- [8] H. W. Bode, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, D. Van Nostrand Company, Inc., princeton, N. J, 1945
- [9] W. H. Beyer, *CRC Standard Mathematical Tables*, 27th Edition, CRC Press, Inc. 1984
- [10] W. R. Perkins, *Sensitivity Analysis*, Chapter 2 in *Feedback Systems* edited by J. B. Cruz, Jr., McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.
- [11] W. R. Perkins, P. V. Kokotovic, T. Bourret and J. L. Schiano, "Sensitivity Function Methods in Control System Education," *Proceedings of IFAC Symposium on Advances in Control Education*, pp.23-28, Massachusetts, USA, 1991
- [12] H. Chestnut and R. W. Mayer, *Servomechanisms and Regulating System Design*, vol. I, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1959.
- [13] K. S Kim, Y. C. Kim, L. H. Keel, and S. P. Bhattacharyya, "PID Controller Design with Response Specifications," *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, Denver, Colorado, 2003
- [14] 김근식, 조태신, 김영철, "시간응답 설계규격을 만족하는 PI, PD, PID제어기 설계". 제어 · 자동화 · 시스템공학논문지 제9권 4호, pp. 259-268, 2003.
- [15] Kim Keunsik, Woo Youngtae, Kim Youngchol, "Design of First Order Controllers with Time Domain Specifications". *International Conference on Control, Automation, and Systems*, pp. 1-7, Geongju, Korea, 2003.
- [16] 김근식, 김영철, "계수의 특성비에 대한 선형계의 파라미터적 감도해석(II): K-다항식의 경우". 제어 · 자동화 · 시스템공학논문지 제10권 제4호, 2004년 게재예정.



김근식

1963년 5월 2일생. 1985년 한양대학교 전자공학과(공학사), 1987년 한양대학교 전자공학과(공학석사), 2003년 충북대학교 전자공학과(공학박사). 1987년~1994년 국방과학연구소, 1994년~1996년 자동차부품연구원, 1996년~

현재 대천대학 인터넷정보계열 부교수. 관심분야는 저차 제어기 설계 및 구현, 감도해석.



김영철

1954년 12월 29일 생. 1981년 고려대학교 전기공학과(공학사), 1983년 서울대학교 전기공학과 (공학석사), 1987년 서울대학교 전기공학과(공학박사), 1988년~현재 충북대학교 전기전자컴퓨터공학부 교수. 1992년~

1993년 미국 Texas A&M Univ. Post-Doctoral Fellow. 2001년~2002년 미국 Vanderbilt Univ./Tennessee State Univ. 방문교수. 대한 전기학회 편집이사, 관심분야는 Linear Control Theory, Parametric Robust Control 등.