大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 14 卷 第 1號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XIV, No.1, 19-37. Feb 2004

다각형, 다면체, 면에 대한 교수학적 분석

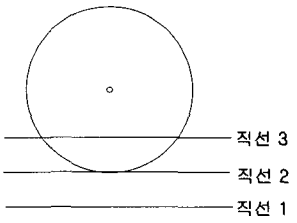
박 교 식* · 임 재 훈**

학교 수학에서는 다각형이나 다면체를 '둘러싸인'이나 '이루어진'과 같은 중의적이거나 불명료한 표현을 사용하여 정의하며, 맥락에 따라 때로는 경계만 때로는 내부까지 의미하는 것으로 사용한다. 다각형과 다면체는 학교수학에서 맥락 의존적 개념으로 취급된다. 초등학교수학에서는 면이 입체라는 맥락 속에서 등장하지만 중학교에서는 보다 일반적인 맥락에서 선이 움직인 자리로 도입된다. 오류주의의 관점에서 볼 때, 다각형, 다면체, 면 개념 지도에 있어 학생들이 기존에 가지고 있는 관념을 수정하고 개선해 가도록 하는 학습 지도가 가능할 뿐 아니라 바람직하다. 한편, 교과서에서 다면체의 면, 다면체의 모서리, 다면체의 꼭지점이라는 표현 대신 단순히 면, 모서리, 꼭지점이라고 하는 것이 적절하다. 중학교 수학 교과서에서 사용되는 '다각형인 면'이라는 표현은 초등학교의 직관적인 접근과 중학교의 논리적인 접근의 충돌을 보여준다.

Ⅰ. 서 론

다음은 어느 중학교 수학 수업 시간에 일어난 일화이다.

교사: 직선2는 원과 몇 개의 점에서 만나지? 철수가 말해볼까?
철수: 한 점에서 만납니다.
교사: 그러면 직선3은 원과 몇 개의 점에서 만나지?
민희가 말해 볼까?
민희: 제 생각에는 무한히 많은 점에서 만나는 것 같습니다.
교사: 왜 무한히 많은 점에서 만난다고 생각하니?
민희: 원의 내부에서 무한히 많은 점들과 만나기 때문입니다.



교사가 학생들에게 직사각형이나 원 위에 점을 찍으라고 했더니 선 위에 점을 찍지 않고 직사각형이나 원의 내부에 점을 찍는 학생들이 있었다는 일화도 있다. 이러한 일화들은 학교수학에서 다각형이나 원을 취급하는 방식 속에 학생들이 그 내용을 학습하는 과정에서 가질 수 있는 여러 관념들이 관련된 미묘하고 복잡한 문제가 숨어 있음을 시사한다.

교사가 학교수학에서 다각형이나 원, 그리고

* 경인교육대학교, pkspark@ginue.ac.kr
** 경인교육대학교, jhyim@ginue.ac.kr

그와 관련된 다면체나 구, 면이 취급되는 방식에 대해 교수학적으로 충분히 이해하고 있지 못하면, 교육과정과 교과서가 의도하는 바를 제대로 살려 학생들에게 의미 있는 경험의 성장이 일어나도록 학습 지도를 하기 어려울 것이다. 이에 이 논문에서는 학교수학에서 취급하는 다각형과 다면체, 면, 원, 구[1]에 대한 교수학적 분석을 시도하고자 한다. 다각형과 다면체의 정의와 관련된 문제, 면의 개념과 관련된 문제, 다각형과 다면체의 구성 요소와 관련된 문제로 나누어 논의하고자 한다.

II. 다각형과 다면체의 정의

1. 문제의 제기

학교수학에서는 여러 가지 종류의 평면도형을 다룬다. 그 중에는 다각형이나 원과 같은 단일폐곡선이 있다. 학교수학에서 이 단일폐곡선은 그 내부를 포함하는가 아니면 포함하지 않는가? 이것이 이 논문에서 제기하고자 하는 문제이다. 어쩌면 이 문제의 답이 간단하다고 생각할 수도 있다. 이를테면 중학교수학에서 원은 일반적으로 평면 위의 한 점으로부터 같은 거리에 있는 점들로 이루어진 도형 또는 그러한 점들의 집합으로 정의되기 때문이다(강옥기, 정순영, 이환철, 2001: 86; 최용준, 2002: 79). 이 정의에 따르면 원은 그 내부를 포함하지 않는다. 할선이 원과 두 점에서 만난다고 하는 것은 원이 그 내부를 포함하지 않는다고 보기 때문이다. 그런데 또한 여러 교과서에서 원기둥과 원뿔의 밑면이 원이라고 하고 있다.

이를테면, "원기둥의 전개도는 원기둥의 밑면인 두 원과 원기둥의 옆면인 직사각형으로 되어 있다"고 한다(최용준, 2001: 95). 이때는 원이 그 내부를 포함하고 있다고 보고 있는 것이다. 한편 초등학교수학에서는 원을 동그란 물건의 본을 떠 그린 동그란 모양의 도형으로 정의하고 있다(교육인적자원부, 2003: 36). 이 정의에서는 원이 그 내부를 포함하는 것인지 아닌지 애매하다.

초등학교 4-나 교과서에서는 다각형을 선분으로만 둘러싸인 도형으로 약속한다(교육인적자원부, 2001: 68). 여러 중학교 수학 교과서에서도 다각형을 몇 개의 선분으로 둘러싸인 평면도형으로 정의하고 있다(강옥기 외, 2002: 82; 금종해, 이만근, 이미리, 김영주, 2002: 80; 박두일, 신동선, 강영환, 윤재성, 김인종, 2002: 80; 박윤범, 박혜숙, 권혁천, 육인선, 2002: 78; 배종수, 박종률, 윤행원, 유종광, 김문환, 민기열 외, 2001: 82; 이준열, 장훈, 최부림, 남호영, 이상은, 2001: 76; 조태근, 임성모, 정상권, 이재학, 이성재, 2002: 81; 최용준, 2002: 77; 황석근, 이재돈, 2002: 78). 이를테면 삼각형은 세 개의 선분으로 둘러싸인 도형이다. 이 표현만으로 보면, 삼각형은 그 내부를 포함하는 것으로, 달리 말해 하나의 면을 가진 것으로 간주될 수 있다. 사실 다각형이 그 내부를 포함하는 것으로 간주하는 것은 학교수학의 여러 곳에서 볼 수 있다. 이를테면 초등학교 수학 5-가 교과서에서 직육면체를 직사각형 6개로 둘러싸인 도형으로 정의하고 있다(교육인적자원부, 2002: 49). 이 정의에서는 직사각형이 그 내부를 포함하는 것으로 보고 있다. 중학교수학 교과서에서도 입체도형의 밑면, 옆면이 다각형이 된다는 설명

1) 이 논문에서 원과 구에 대한 논의는 원과 구가 그 내부를 포함하는가의 문제에 한정하기로 한다.

을 볼 수 있다. 이를테면 밑면이 다각형이고 옆면이 모두 삼각형인 다면체를 각뿔이라고 한다(금종해 외, 2001: 95).

이전 교육과정기에서는 단일폐곡선을 다룰 때 다각형이 단일폐곡선에 속하는 것으로 포함 관계를 설정하였다. 6차 교육과정기의 중학교 수학 교과서에서는 원과 연결 상태가 같은 도형을 단일폐곡선으로 정의하였으며, 삼각형, 사각형, 오각형을 단일폐곡선의 예로 제시하였다(김연식, 김홍기, 1999: 285; 김호우 외, 1995: 274-275). 3차 교육과정기의 중학교 교과서에서는 더 분명하게 "몇 개의 선분으로 이루어진 단일폐곡선을 다각형이라고 한다"고 기술하였다(문교부, 1979: 235). 이 때는 다각형이 내부가 아닌 경계의 선만 의미하는 것으로 보는 것이다.

이상으로부터 원과 다각형의 정의와 사용에 있어 두 가지 문제점이 발견된다. 첫째, 학교수학에서는 다각형이나 원과 같은 단일폐곡선을 때로는 경계만 의미하는 것으로, 때로는 내부까지 포함하는 것으로 보고 있다. 이것은 논리적인 관점에서 보면 일종의 오류라고 할 수 있다. 둘째, 중학교 수학에서 사용되는 정의만 놓고 볼 때, 원은 경계의 선을 나타내고 다각형은 내부까지를 나타낸다고 볼 수 있다. 원은 곡선이고 다각형은 직선으로 되어 있다는 차이를 제외하면 둘은 매우 유사하다. 그럼에도 불구하고, 원은 내부를 포함하지 않는 것으로, 다각형은 내부를 포함하는 것으로 정의하고 있는 것은 불합리하다.

2. 양자택일의 문제인가

다각형이나 원이 (내부와 외부가 아닌) 경계의 선만 의미하는 것으로 하거나 경계의 선 및 그 선으로 둘러싸인 내부를 의미하는 것으로 하고 일관성 있게 재구성하는 방법으로 위의 문제점을 벗어날 수 있을까?

다각형을 선만 의미하는 것으로 할 경우에는 원과 통일성을 기할 수 있다는 장점이 있다. 다각형을 선만 의미하는 것으로 할 경우, 평면 위의 한 점으로부터 일정한 거리에 있는 모든 점들의 집합이라는 원의 정의와 통일성이 있게 된다. 또 단일폐곡선과 다각형의 포함 관계를 구축할 수 있으며, 고등학교의 도형의 방정식 및 부등식의 영역과도 일관성이 있다. 그러나 단점도 있다. 다각형은 넓이라는 용어와 바로 어울릴 수 없으므로, '다각형으로 둘러싸인 부분의 넓이'를 줄여서 간단히 '다각형의 넓이'라고 한다는 식의 처리가 필요하다.[2] 그리고 다면체를 정의하는 데 어려움이 있다. 직육면체를 직사각형 6개로 이루어진 도형 또는 직사각형 6개로 둘러싸인 도형이라고 정의할 때, 직사각형이 그 내부를 포함하지 않으면 직육면체가 면이 없는 뼈대와 같은 것이 되어 곤란하다. 그래서 이를테면 '직사각형 모양의 면' 6개로 이루어진 도형과 같은 식으로 표현해야 하는 번거로움이 있으며, 여기서 '면'과 관련된 다른 문제가 생겨난다. 이에 대해서는 다음 절에서 자세히 논의할 것이다.

다각형을 내부를 포함하는 것으로 정의할 경

2) 그러나 이러한 처리가 항상 의도한 것과 같은 효과를 가져 올 것이라고 보장할 수는 없다. 그러한 의도를 가지고 '다각형의 넓이'라는 표현을 사용해도, 그것을 접하는 사람은 여전히 다각형이 내부를 포함하기에 넓이를 고려할 수 있다고 생각할 수 있기 때문이다. 이러한 점에 대하여 교사는 경각심을 가질 필요가 있다.

우에는 넓이와 다각형이 곧바로 어울린다는 장점이 있고, 다면체가 면이 없는 뼈대가 아닌 면이 있는 입체가 된다. 또 원, 부채꼴, 다각형이 그 내부를 포함하고 있다고 간주하면 입체도형을 묘사할 때 편리하다. 이를테면 원뿔은 원과 부채꼴로 이루어져 있고, 다면체는 다각형만으로 이루어져 있다고 묘사할 수 있다. 그러나 다각형이 내부를 포함한다면 다면체도 그 내부를 포함해야 한다는 일관성의 측면에서 보면, 입체의 내부도 다면체에 포함되게 되며 이는 새로운 문제를 낳는다. 이에 대해서는 다음 절에서 논의하기로 한다. 한편, 원의 정의와의 통일성이 깨지고 단일폐곡선과의 포함 관계 및 도형의 방정식 및 부등식의 영역과의 일관성이 없다는 단점이 있다.

위의 두 방법 중 하나를 선택한다면, 원과의 통일성, 상위 학년 또는 학교의 내용인 도형의 방정식 및 부등식의 영역과의 일관성을 고려할 때 다각형을 경계의 선만 의미하는 것으로 정의하는 것이 적절해 보인다. 그러나 다각형이나 원의 정의는 다면체나 원기둥과 같은 입체의 정의와 관련되며, 아래에서 살펴 볼 것처럼 위의 두 방법 중 하나를 택하는 것으로 간단히 해결할 수 없는 딜레마가 생겨난다.

3. 딜레마

다면체나 원기둥과 같은 입체와의 관련을 생각하지 않는다면, 원이나 다각형을 경계의 선만 의미하는 것으로 정의하든, 또는 선과 내부를 의미하는 것으로 정의하든 각각 나름대로 장점과 단점이 있는 체계를, 앞에서 보았듯이, 구축할 수 있다. 그러나 다각형과 다면체의 정의와의 관련을 생각하면 다각형을 둘 중 어느 쪽으로 정의해도 해결하기 어려운 딜레마에 직면하게 된다.

학교수학에서는 각기둥, 각뿔 등을 비롯한 다면체와 원기둥, 원뿔, 그리고 구와 같은 회전체 등 여러 가지 입체도형을 학습한다. 그런데 이 입체도형은 속이 꽉 차 있는 것인가 아니면 비어 있는 것인가? 원이나 다각형을 속이 비어 있는, 즉 선만 해당하는 것으로 할 때, 평면도형과 입체도형의 일관성이라는 관점에서 보면 다면체나 원기둥도 속이 비어 있는 것이어야 한다. 다면체를 속이 빈 것으로 보는 것은, 직육면체가 이를테면 속이 빈 상자를 추상하여 만든 도형이라는 것과 잘 어울리며, 전개도를 생각할 때도 적절하다. 그런데 다면체나 원기둥과 같은 입체도형이 속이 비어 있는 것이라고 하면 다음과 같은 문제가 생긴다. 각뿔을 밑면에 평행인 평면으로 잘라 각뿔대를 만드는 맥락을 생각해 보자. 만약 각뿔이 속이 비어 있는 도형이라면, 밑면에 평행인 평면으로 잘랐을 때 위가 터진 도형이 될 것이다. (이는 원기둥이나 원뿔에서도 마찬가지이다.) 이렇게 보면, 윗면이 없으므로 각뿔대의 밑면을 2개라고 하기 곤란하다. 그런데 중학교 수학 교과서에서는 각뿔대의 두 평행한 면을 밑면이라고 하고 있다(강옥기 외, 2002: 95; 박윤범 외, 2002: 89). 이는 교과서가 각뿔대나 원뿔대를 만들 때는 다면체를 속이 꽉 차 있는 도형으로 본다는 것을 뜻한다. 한편, 다각형이나 원이 내부를 포함하는 것으로 보면 다면체나 원기둥도 내부를 포함하는 것으로 보는 것이 일관성이 있다. 그런데 다면체가 내부를 포함한다면, 직육면체는 속이 빈 상자가 아니라 속이 꽉 찬 벽돌과 같은 것을 추상한 것이 되며, 전개도와 같이 모서리를 잘라 펼치는 것이 용이하지 않다.

지금까지의 논의를 정리하면, 입체도형에서는 각뿔대 맥락과 같이 '평면으로 절단하는 맥락'과 전개도 맥락과 같은 '펼치는 맥락'에서 딜레마가 생겨난다. 즉, 다면체가 속이 찬 것으로 보아도 속이 빈 것으로 보아도 이 두 맥락을 동시에 만족시킬 수는 없다. 다각형이나 원과 같은 평면도형에서는 '직선으로 절단하는 맥락'이 입체도형에서 '평면으로 절단하는 맥락'에 해당한다. 다각형에서는 '직선으로 절단하는 맥락'과 '펼치는 맥락' 사이의 딜레마는 심각하지 않다. 다각형에서는 '펼치는 맥락'에 해당하는 것이 없기 때문이다. 그렇지만 직선으로 절단하는 맥락 내에서 평면도형을 다의적으로 해석할 수 있다는 데서 혼동이 생길 우려가 있다. 예를 들어 초등학교 5-가 교과서에서는 "직사각형을 접은 후 잘라 합동인 사각형 2개를 만들어 보시오"(교육인적자원부, 2002: 35)와 같은 활동이 나온다. 이 절단하는 맥락에서 직사각형은 안이 채워져 있는 것으로 간주된다. 원과 할선의 관계도 원을 직선으로 자르는 맥락으로 볼 수 있다. 그런데 이때는 원의 속이 비어져 있는 것으로 간주된다. 둘 다 직선으로 평면도형을 자르는 맥락이지만, 한 경우는 속이 채워진 것으로 다른 한 경우는 속이 빈 것으로 본다. 서론에 제시한 일화에서 학생이 원과 할선이 무한히 많은 점에서 만난다고 한 것은 초등학교에서 평면도형을 직선으로 자르는 맥락에서 속이 채워진 것으로 보는 관점이 연장되어 나타난 결과로 볼 수 있다.[3] 교사는 평면도형을 직선으로 자르는 맥락에 이와 같은 혼동의 가능성이 내재되어 있음에 주의하여야 한다.

4. 학교수학의 특성

가. 맥락 의존적 정의의 사용

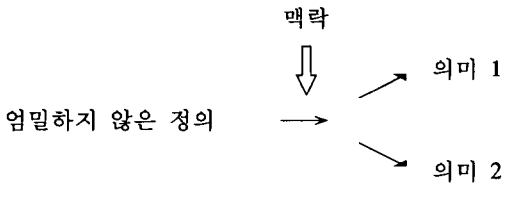
'영역'이라는 용어를 사용하여 도형과 도형의 영역을 구분하면 이상과 같은 문제를 해결할 수 있다. 과거 3차 교육과정기에는 그렇게 하였다. 3차 교육과정기의 중학교 수학 교과서에서는 삼각형을 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있지 않을 때 세 개의 선분 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$의 합집합으로 정의하고 $\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$와 같이 표현하였다. 또 삼각형의 영역과 같은 단일폐곡선 C의 영역을 단일폐곡선 C와 그 내부의 모든 점으로 이루어지는 집합이라고 정의하였다(문교부, 1979: 227, 233). 그러나 현재 학교수학에서는 그렇게 하지 않는다. 수학교육현대화 운동에 대한 반성 과정에서, 영역이라는 용어를 초·중학교에 도입하여 도형과 도형의 영역을 구분하여 정의하고 사용하는 것이 교육적으로 그다지 적절하지 않다는 결론에 이르렀기 때문이다.

그러면 영역이라는 용어를 도입하지 않고 위의 문제를 해결할 수 있는가? 현재 학교수학에서는 용어를 엄밀하게 정의하지 않은 채 맥락에 따라 상이한 의미로 해석하는 것을 허용하는 방식으로 이 문제를 다루고 있다. 논리적 엄밀성과 같은 관점에서 보면, 한 용어의 의미가 맥락에 따라 바뀌는 것은 적절하지 않아 보일 수 있다. 이런 입장에서 보면, 좋은 정의는 맥락에 따라 해석이 달라지지 않는 맥락 무관한 정의이다. 이를테면 '삼각형'과 '삼각형의 영역'을 각각 정의하여 논리적인 혼란을 없애는 것이 이 입장에 부합한다. 그러나 학교수학

3) 입체도형에서도 원뿔을 평면으로 잘라 (면이 아닌) 이차곡선을 만드는 맥락에서는 입체도형의 속이 빈 것으로 간주한다. 그러므로 입체도형에서도 '평면으로 자르는 맥락' 내에서도 유사한 충돌이 있다고 할 수 있다.

에서는 논리적인 혼란을 없애는 것보다 우선하여 고려해야 할 사항이 있다. 이를테면 "초등학교 저학년에서부터 영역이라는 새로운 용어를 도입하고 삼각형과 삼각형의 영역을 구분해 사용하는 것이 교육적으로 적절한가"를 고려해야 한다.

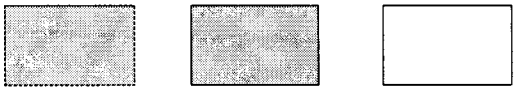
학교교육은 긴 시간에 걸쳐 이루어지는 일이며, 그 기간 중 특정 단계에서는 엄밀하지 않은 정의를 사용하면서 맥락에 따라 그 의미를 다르게 사용할 수 있다. 위의 딜레마는 논리적으로는 딜레마이지만, 역으로 학교수학의 고유한 특성을 잘 보여준다고 할 수 있다. 학교수학에서는 '중의적인 정의' 또는 '맥락 의존적 정의'의 사용을 허용한다. 이를테면, 직육면체의 정의로 '직사각형 6개로 둘러싸인 도형'이라는 엄밀하지 않은 다소 애매한 표현을 사용하며, 자르는 맥락에서는 '속이 꽉 차 있는 도형'이라는 의미를 선택하고, 펼치는 맥락에서는 '속이 빈 도형'이라는 의미를 선택하는 것이다. 이것은 논리적 일관성이나 엄밀성의 기준에서 보면 결함으로 보이나, 학습자의 발달 단계나 교육적 타당성 등을 고려하는 과정에서 개발된 학교수학이 지닌 고유한 교육적 논리라고 할 수 있다. 교사는 이 사실을 알고 경각심을 가지고 학습 지도에 임해야 할 것이다.



학교수학에서 다각형, 원과 같은 평면도형과 다면체, 원기둥과 같은 입체도형의 의미를 이와 같이 맥락 의존적으로 사용하고 있다는 점을 고려하면서, 다각형과 다면체를 정의할 때 사용되고 있는 '둘러싸인'과 '이루어진'이라는 표현을 검토해 보자. 이를테면 초등학교 수학 2-가 단계 교과서에서 삼각형은 세 선분으로 둘러싸인 도형으로 정의되고 있다(교육인적자원부, 2003: 35) 한편, 본 연구에서 참고한 7차 교육과정에 따른 중학교 7단계 수학 교과서 13종 중 9종의 교과서가 '둘러싸인'이라는 표현을 사용하여 다각형을 '몇 개의 선분으로 둘러싸인 평면도형'과 같이 정의하고 있다(강옥기 외, 2002: 82; 금종해 외, 2002: 80; 박두일 외, 2002: 80; 박윤범 외, 2002: 78; 배종수 외, 2001: 82; 이준열 외, 2001: 76, 조태근 외, 2002: 81; 최용준, 2002: 77; 황석근, 이재돈, 2002: 78). 또 4종의 교과서가 '이루어진'이라는 표현을 써서 다각형을 정의하고 있다(박규홍, 한옥동, 김성국, 임창우, 고상군, 김유태 외, 2002: 63; 신항균, 2002: 83; 양승갑, 박영수, 박원선, 배종숙, 성덕현, 이성길 외, 2002: 84; 전평국, 신동윤, 방승진, 황현모, 정석규, 2002: 75).

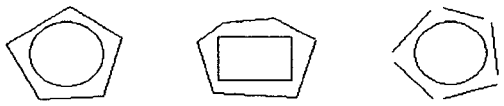
일상적으로 'A가 B를 둘러싸다'라고 할 때 '아군이 적군을 둘러싸다', '사면이 바다로 둘러싸인 섬'에서와 같이, A와 B는 일반적으로 다른 대상이다. 마찬가지로 생각하면, 몇 개의 선분만으로 둘러싸인 도형'에서 도형은 몇 개의 선분과는 다른 것이므로 다각형의 내부를 의미하게 된다([그림 Ⅱ-1]의 왼쪽 그림). 그러나 학교수학에는 '둘러싸인 도형'을 [그림 Ⅱ-1]의 가운데 그림처럼 둘러싼 선분들까지 포함하는 것으로 보는 맥락들이 있다. 다면체 역시 겉의 껍데기만을 의미하는 것이 아니라 속의 것도 모두 포함하는, 그래서 '속이 꽉 찬 것'으

로 받아들여야 하는 맥락이 있다. 한편, '둘러싸인'이라는 표현은 [그림 Ⅱ-1]의 오른쪽 그림처럼 내부를 제외한 경계의 선만을 나타내기에는 적합하지 않은 표현이다.



[그림 Ⅱ-1]

또한 '둘러싸다'라는 표현은 다각형을 엄밀하게 정의하기에 충분할 정도로 명확한 표현이 아니다. 이를테면 다음 [그림Ⅱ-2]의 도형들은 모두 평면에서 몇 개의 선분만으로 둘러싸인 도형으로 볼 수 있다.



[그림 Ⅱ-2]

그래서 대부분의 교과서에서는 다각형을 정의할 때 오해의 소지를 줄이기 위해 그림을 같이 제시한다. 그렇게 함으로써 다소 불완전한 언어적 정의보다는 그림에 의존하도록 안내하고 있다.

학교수학에서 다각형이 본질적으로 closed라는 것을 알기 쉽도록 나타내기 위해 '둘러싸인'이라는 표현을 사용한 것으로 보이지만, '둘러싸인'으로부터 closed를 연상하기는 쉽지 않다. closed의 우리말 표현인 '닫힌'이 있으나 이를 초등학교 저학년에서부터 사용하는 것이 적절한지 등에 대해서는 별도의 연구와 논의가 필요하다. 다각형의 정의에서 closed와 '둘러싸인'의 거리를 좁히는 방편으로 '완전히 둘러싸인' 또는 '빈틈없이 둘러싸인'과 같이 수식어를 넣어 주는 것도 고려할 수 있다. 그러나 이와 같은 방식으로 '둘러싸인'을 수용한다고 해도 여전히 일상어로서의 '둘러싸인'과 다각형 정의에서 사용하는 '둘러싸인' 사이에는 차이가 있다.

이제 '이루어진'에 대해 생각해 보자. 다음 두 표현을 생각해 보자.

(표현1) 대한민국의 영토는 한반도와 그 부속도서로 이루어졌다.
(표현2) 물은 수소와 산소로 이루어졌다.

(표현1)에서 대한민국의 영토는 한반도와 부속도서의 합집합이라고 할 수 있다. 한반도도 대한민국의 영토이고 부속도서도 대한민국의 영토이다. 그러나 물 속에도 산소와 수소가 다 들어 있지만, 산소도 수소도 물은 아니다. 그러므로 물은 단순히 산소와 수소의 합집합이라고 하기 어렵고, 산소도 수소도 아닌 제3의 것이라고 할 수 있다. 이 점을 고려하면서 '세 선분으로 이루어진 도형'을 생각해 보자. 이 표현을 (표현1)과 같은 것으로 해석하여 '도형'은 '세 선분의 합집합'을 의미하는 것으로 볼 수도 있고, (표현2)와 같이 해석하여 '도형'에는 세 선분이 들어 있지만 꼭 그것만이라고 하지 않을 수 있다. (표현2)의 해석에는 그 내부도 '도형'에 들어가는 것으로 볼 여지가 있다. 한편, '둘러싸인'을 사용하여 다각형을 정의할 때 그림의 도움이 필요한 것처럼, '이루어진'이라는 표현도 충분히 엄밀한 표현이 아니므로 그림의 도움이 필요하다. 이를테면 다음의 그림들은

모두 세 선분으로 이루어진 것이라고 할 수 있기 때문이다([그림 II-3]).

[그림 II-3]

학교수학에서 다각형이 경계의 선만 의미하는가 내부까지 의미하는가와 관련하여 몇 가지 문제점이 있다. 현재 학교수학에서는 다각형이 선만 의미하거나 또는 그 내부까지 포함한다고 하고, 그에 따라 모든 내용을 일관성 있게 명확히 정리하지 않고 있다. 이렇게 일관성 있게 정리하는 것이 불가능하지는 않지만 그것이 교육적으로 필요하고 타당한지에 대해서는 좀 더 복잡한 논의가 필요하다. 현재 교과서에서는 앞서 논의한 '딜레마'와 같은 것을 받아들이는 것을 교수학적인 장치로 사용하고 있다. 때로는 경계의 선만 의미하는 것으로 때로는 내부의 영역까지 의미하는 것으로 문맥에 따른 해석을 허용하는 학교수학의 입장을 따르기로 한다면, 그에 들어맞는 다의적인 의미를 지닌 '이루어진'이 '둘러싸인'보다 적절해 보인다.

나. 학교 학년급의 상승에 따른 정의의 개선

Bruner는 EIS 이론을 주장하였는데, 그 핵심 아이디어는 하나의 개념을 그 표현 양식을 바꾸어 나선형으로 반복하여 가르친다는 것이다(Bruner, 1995). 이때 가르치는 개념은 동일하며 다만 그 표현 양식이 바뀐다. 그러나 Lakatos의 오류주의에 따르면, 역사적으로 수학적 정의도 반례의 출현과 같은 맥락 속에서 이전의 정의를 수정, 개선하는 방식으로 발전되어 왔으며, 이와 같은 과정을 경험하도록 수학을 가르치는 것이 바람직하다(Lakatos, 1991).

이와 같이 학교 학년급이 올라감에 따라 다각형과 다면체의 정의를 수정, 개선해 가는 방식으로 교육과정과 교과서와 수업을 구성할 수 있다. 학년, 학교급이 올라감에 따라 새로운 맥락이 등장하게 되며, 이렇게 새롭게 등장하는 맥락은 동일한 용어의 의미를 이전보다 더 분명하게 하거나 다소 다르게 수정할 것을 요구하기도 한다. 이를테면 원은 초등학교에서는 동그란 모양의 도형으로, 중학교나 고등학교에서는 한 점에서 일정한 거리에 있는 점들의 집합으로 정의된다. 또 함수는 중학교에서는 비례와 반비례 관계의 맥락에서 두 양 x, y에서 x의 값에 따라 y의 값이 하나로 정해지는 것으로 정의되지만, 고등학교에서는 두 집합 X, Y 사이의 특수한 대응으로 정의된다(양승갑 외, 2002: 139; 우정호, 류희찬, 문광호, 박경미, 2002: 93).

학교수학에서는 어느 한 시점에서 모든 맥락을 도입할 수 없으며, 학년, 학교급이 올라감에 따라 점진적으로 맥락들이 도입된다. 각 학년 학교급에서 사용하는 용어의 의미는 고등수학의 관점에서 볼 때 수학적으로 완전한 것일 수 없다. 그 해당 학년 학교급에서 사용하는 맥락에 적합한 것이어야 하기 때문이다.

맥락이 정의를 개선할 필요를 만들 수 있다. 역사적으로 반례가 이전의 정의와 추측에 대한 반성을 거쳐 새로운 정의와 추측을 만들게 한 것과 마찬가지로, 학교수학에서도 새로 등장하는 맥락을 매개로 하여 이와 같은 과정을 경험하게 할 수 있다. 예를 들어, 단일폐곡선과 다각형의 포함 관계가 등장하기 전까지는 삼각형을 세 선분으로 이루어진 도형과 같이 중의적인 표현으로 정의하고 사용해도 무방하다. 그러나 이것은 초등학교에서 고등학교에 이르는

학교수학 전체에 대해서 이 표현을 계속 사용하는 것이 좋다는 것은 아니다. 학교수학의 교육은 긴 기간에 걸쳐 행해지는 여정이다. 이 긴 여정의 중간에 단일폐곡선과 다각형의 포함관계가 다루어질 수도 있을 것이다. 이 맥락에서 기존의 다각형의 정의가 반성되고, 다각형은 경계만 의미하는 것으로 정의될 수 있을 것이다. 또 이 긴 여정의 후반부 어디에선가 '부등식의 영역'이라는 맥락이 등장할 때, 도형과 영역을 각각 다시 이전보다 명확하게 재정의할 수 있을 것이다.

Ⅲ. 학교수학에서의 면의 개념에 대한 고찰

우리나라 학교수학에서 사용된 면의 개념으로 '입체를 둘러싸고 있는 부분', '선이 움직인 자리', '단일폐곡선으로 둘러싸인 부분'의 세 가지를 볼 수 있다. 이 절에서는 이 각각에 대하여 약술한 후, 다면체의 정의에서 사용되는 '다각형인 면'과 관련된 문제와 면 개념의 수정·개선이 이루어지도록 하는 학습 지도의 문제에 대해 논의한다.

1. 학교수학에서 면의 개념

가. 입체를 둘러싸고 있는 부분으로서의 면

수학과 교육과정에 따르면(교육부, 1997), 면이 처음으로 도입되는 것은 5-가 단계이다. 5-가 단계의 교과서에서는 '직육면체를 둘러싸고 있는 직사각형'을 직육면체의 '면'이라 하고 있다. 초등학교수학에서 "입체를 둘러싸고 있는 부분을 면이라고 한다"와 같은 진술은 제시되지 않는다. 다만 직육면체, 원기둥과 같은 구체적인 입체에서 각각 면이 무엇인지를 말하고 있을 뿐이다.

초등학교수학에서는 면이 입체라는 맥락 속에서 등장하며, 입체라는 맥락을 벗어난 일반적인 평면과 곡면을 모두 포함하는 것으로 취급되지 않는다. 초등학교에서의 면은 직육면체, 각기둥, 각뿔을 둘러싸고 있는 다각형 또, 원기둥, 원뿔 등과 같은 회전체를 둘러싸고 있는 부분으로 취급된다. 입체를 둘러싸고 있는 부분으로서의 면은 영어의 face(겉면, 표면)에 해당한다.[4] 초등학교 수학에서는 면이 거의 언제나 face의 의미로 사용된다. 반면에 중학교 수학에서 면은 surface와 face의 의미로 동시에 사용되고 있다. 그러나 이 둘은 문맥상 구별될 수 있다. 입체를 둘러싼 면이 영어 face라면, 입체라는 맥락에 국한되지 않는 선이 움직인 자리로서의 면은 영어 surface에 해당한다고 볼 수 있다. surface는 곡면을 의미하며, 평면은 곡면의 특수한 경우이다.[5]

나. 선이 움직인 자리로서의 면

본래 '면'이라고 할 때, 그것은 흔히 점, 선, 면의 맥락에서 사용된다. 교육과정에 따르면, 7-나 단계에서는 이러한 맥락에서 면이 다루어진다. 7-나 단계 교과서에는 점이 움직이면 선이 생기고, 선이 움직이면 면이 생긴다는 내용

4) 한 영어 수학 사전에는 face의 뜻으로 'any of the plane surfaces of a geometrical solid bounded by its edges.'라고 나와 있다(Borowski & Borwein, 1991: 215). 또 미국의 수학 교재들에서, "The flat polygonal surfaces of a polyhedron are called its faces."와 같이, 다면체의 면을 face라 칭하는 것을 볼 수 있다(Serra, 1997: 525; Musser & Burger, 1997: 565)

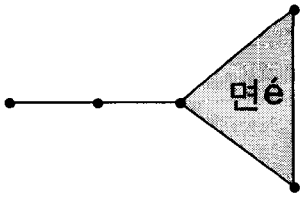
5) 한 수학사전에 따르면(한국사전연구원, 1989: 55), 곡면(surface)은 평면으로부터 가역적인 변환에 의하여 유도되었다고 간주되는 공간의 기하학적 도형이다.

이 그림과 함께 나온다(박윤범 외, 2002: 38; 조태근 외, 2002: 36) 그리고 뒤이어 교점, 교선과 같은 선과 선의 위치 관계, 면과 면의 위치 관계가 다루어진다.

선이 움직인 자리라는 면 개념은 입체라는 맥락에 얽매여 있지 않으며, 일반적인 평면과 곡면을 모두 포함한다. 또한 입체도형을 둘러싼 부분도 선이 움직인 자리로 볼 수 있다는 점에서 입체도형을 둘러싼 부분이라는 개념보다 더 일반적인 것으로 볼 수 있다.

다. 단일폐곡선으로 둘러싸인 부분으로서의 면

7차 중학교 교과서에서는 이와 같은 정의가 등장하지 않는다. 그러나 6차 교육과정기의 교과서 중에는 오일러의 '다면체 정리' 맥락에서 단일폐곡선으로 둘러싸인 부분으로서의 면 개념을 소개한 것이 있다. 김연식과 김홍기의 교과서에서는 아래 그림과 같이 꼭지점과 변으로 이루어진 도형에서 단일폐곡선이 있을 때, 그 단일폐곡선으로 둘러싸인 부분을 면이라고 한다고 기술되어 있다. 또한 꼭지점과 변으로 이루어진 도형 중에는 면이 없는 경우도 있다고 부언하고 있다(김연식, 김홍기, 1999: 295).



[그림 Ⅲ-1]

단일폐곡선으로 둘러싸인 부분으로서의 면 개념은 다른 두 개념보다 특수한 것으로 볼 수 있다. 선이 움직인 자리로 볼 수 있는 원기둥에서의 옆면이나 구는 단일폐곡선으로 둘러싸인 부분이라고 보기 어렵다. 또 단일폐곡선으로 둘러싸인 부분은 어떤 짧은 길이의 선분이 여러 번 움직인 것으로 본다면 선이 움직인 자리로 볼 수 있다.

2. 다면체 정의에서 '다각형인 면'

대부분의 7-나 단계 교과서에서는 다면체를 '다각형인 면으로만 둘러싸인 도형'으로 정의하고 있다(강옥기 외, 2002: 94; 금종해 외, 2002: 94; 박규홍 외, 2002: 69; 박두일 외, 2002: 88; 배종수 외, 2001: 92; 신항균, 2002: 92; 양승갑 외, 2002: 94; 전평국 외, 2002: 84; 조태근 외, 2002: 92; 최용준, 2002: 86; 황석근, 이재돈, 2002: 89).[6] '다각형인 면'에서 면은 face, 곧 입체를 둘러싼 부분을 의미하는 것으로 보인다. 초등학교 수학에서 face로서의 면을 직육면체, 각기둥, 각뿔을 학습하는 과정에서 이미 학습하였으므로, '다각형인 면'은 삼각형, 사각형, 오각형 등의 모습을 한 것을 한번에 나타내는 표현으로 이해할 수 있다. 또, '다각형인 면'에서 다각형은 회전체의 옆면과 같이 곡면으로 된 face와의 구별을 위해서 필요하다. 곧 원기둥에는 다각형으로 이루어지지 않은 면이 있으므로, 그것은 다면체가 아니다.

그런데 이 '다각형인 면'은 두 가지 측면에서 문제점이 있다. 첫째, 이 표현은 '다각형이 면의 일종이다'라는 것을 나타내고 있다. 앞 절에서 논의한 바와 같이, 학교수학, 특히 초등학

6) 본 연구에서 참고한 7-나 단계 교과서 13종 가운데 2종은 '다각형인 면' 대신 '다각형의 면'(이준열 외, 2001: 87), '삼각형, 사각형 … 등의 면'(박윤범 외, 2002: 88)이라는 표현을 쓰고 있다.

교 수학에서는 다각형이라는 말을 맥락에 따라 내부까지 포함하거나 경계만 의미하는 것으로 사용하고 있다. '다각형인 면'이라는 표현은 다각형이 그 내부를 포함한다는 입장을 명확히 드러내는 표현인데, 이 입장은 원과의 통일성이나 도형의 방정식과의 일관성 면에서 적절하지 않다. 다각형이 면이라면, 다각형인 면으로만 둘러싸인 도형이라는 표현은 실상 다각형으로만 둘러싸인 도형과 같은 것이다. 곧 '~인 면'이라는 표현은 불필요하다. 이렇게 다각형 자체를 면으로 보고 다면체를 다각형으로 둘러싸인 도형으로 정의하면, 다면체도 그 내부를 포함하는 속이 꽉 찬 것이 된다. 이 경우, 각기둥과 각뿔 등의 겉넓이를 구하기 위해 전개도를 학습할 때 다시 다면체가 다면체를 구성하는 면 그 자체만을 의미한다고 받아들여야 하는 맥락과 충돌하게 된다. 둘째, '다각형인 면'을 써서 다면체를 정의하고 다시 다면체를 둘러싸고 있는 다각형을 면으로 정의하는 것은 면을 이중으로 사용하는 일종의 순환 논법이다. '다각형인 면'을 이용하여 입체를 정의하고 입체의 구성 요소로 면을 다시 정의하는 것은 마치 다각형을 이루는 선분을 '선'이라고 부르는 것과 같이 어색하다. 따라서 다각형인 면을 써서 입체를 정의하려면, 논리적으로 면, 모서리와 꼭지점이 미리 정의되어야 할 필요가 있다. 그렇지 않고 다면체의 구성 요소로서 면, 모서리, 꼭지점을 정의해야 한다면 '다각형인 면'이라는 표현을 포기해야 한다.

이상과 같은 문제점을 피하기 위해, 다면체를 구성하는 별도의 기본 성분을 도입하는 방안을 고려해 볼 수 있다. 다각형의 정의에 앞서 직선의 연결된 일부인 선분이 먼저 정의되고 선분을 이용하여 다각형을 정의한다. 이와 마찬가지로 다면체의 정의에 앞서 평면의 연결된 한 부분을 나타내는 것을 정의하는 것이다. 이것을 '평면분(平面分)'이라고 하자. '평면분'은 평면의 연결된 한 부분을 나타내기 위해 '선분'을 흉내낸 것이다. '평면분'은 이를테면 단일폐곡선과 그 내부로 이루어진 도형과 같이 정의할 수 있다. 또 평면분의 특수한 경우로 '다각형평면분'을 다각형과 그 내부로 이루어진 도형과 같이 정의할 수 있다. 이렇게 하면 다면체를 '몇 개의 다각형평면분으로 둘러싸인 (또는 이루어진) 도형'으로 정의할 수 있다. 이렇게 평면분을 이용해서 다면체를 정의하고, 그 다음에 다면체의 구성 요소인 면(face), 모서리, 꼭지점을 정의하면 위에서 기술한 문제점을 피할 수 있을 것이다.

이와 같은 평면분의 정의는 본 절의 처음에 살펴본 학교수학에서 사용되거나 사용되었던 세 가지 면 개념 중 세 번째 '단일폐곡선으로 둘러싸인 부분'과 매우 유사하다. 6차 교육과정기의 김연식과 김홍기(1999)의 중학교 수학 교과서에서 이 정의는 다면체 정리가 적용되는 다면체의 범위를 넓히는 기능을 하고 있다. 이 면의 개념은 '평면분' 개념과 유사하기 때문에, 다면체 정리의 범위를 확장하는 데만이 아니라, 다면체를 정의하는 데 있어 발생하는 논리적인 문제의 해결을 도와줄 수 있다. face로서의 면이 아닌 별도의 개념으로 면이 먼저 정의된다면, 다면체를 면이 많은 입체도형으로 간주하는 것도 다면체를 정의하는 한 가지 방법이 될 수 있다. 이것은 다각형을 각이 많은 평면도형으로 간주하는 것과 유사하다. 그러나 다면체 정의의 어려운 문제를 해소하기 위해 평면분과 같은 일련의 낯선 개념을 도입하고 복잡한 선행 학습을 하게 하는 것이 교육적으

로 나은 결과를 가져온다고 확신할 수 없다. 학교수학에서는 논리적인 엄밀성이나 타당성보다 교육적 타당성을 일차적인 고려의 대상으로 삼아야 한다.

초등학교수학에서는 직육면체를 직사각형 6개로 둘러싸인 도형으로 정의하고, 다시 직육면체를 둘러싸고 있는 직사각형을 직육면체의 면이라고 하고 있으며, 그림의 도움을 받는 직관적인 이해를 도모하고 있다.[7] 5단계에서 직육면체와 그 구성 요소로 면을 정의한 다음, 6단계에서 각기둥, 각뿔에서는 직육면체의 구성요소로서 정의했던 면을 확대 사용하고 있다. 초등학교 수학에 이미 내재되어 있었으나 직관적인 접근을 시도했기 때문에 뚜렷이 드러나지 않았던 문제는 7단계에서 논리적인 접근을 시도하는 부분에서 외적으로 드러난다. 7단계 수학 교과서들에서 다면체를 정의할 때 등장하는 '다각형인 면'에서의 면은 초등학교에서 직육면체에서 각기둥과 각뿔을 거치며 확대 사용된 '면'을 그대로 수용하고 있는 것이다. 이는 초등학교 수학의 접근 방식을 중학교에 나름대로 연결하려는 고려의 결과로 볼 수 있다. 그러나 중학교 수학에서는 초등학교 수학과는 달리 직관적인 접근에 머물지 않고 논리적인 접근을 시도한다. '다각형인 면'은 초등학교의 직관적인 접근과 중학교의 논리적인 접근이 만나 발생한 충돌을 보여주는 사례라고 할 수 있다.

3. 면 개념의 수정·개선을 도모하는 학습 지도

가. 입체를 둘러싸고 있는 부분으로서의 면으로부터 선이 움직인 자리로서의 면으로

학교수학에서 면 개념의 학습 지도는 여러 해에 걸쳐 학생들이 이전의 맥락에서 형성할 수 있는 관념을 새롭게 수정, 발전시켜 가는 과정을 경험하도록 이루어질 수 있다. 초등학교에서 면은 입체도형의 면이며, 5-가 단계에서 "직육면체를 둘러싸고 있는 직사각형을 직육면체의 면이라 한다"와 같이 도입된다. 이 직육면체 맥락에서 면을 학습하는 가운데 다음과 같은 관념이 형성될 수 있다.

(관념1) 면은 입체도형을 둘러싼 여러 개의 평평한 부분이다.

(관념1)은 각뿔이나 각기둥에 그대로 확장되어 적용될 수 있다. 각기둥과 각뿔에서 밑면과 옆면이 구별되기는 하나 본질상 이전에 직육면체 맥락에서 생길 수 있는 (관념1)에 어떤 수정을 요구하지 않는다. 여기서 각각의 면은 한 평면의 부분집합이다. 그러나 원뿔이나 원기둥은 (관념1)을 수정할 것을 요구한다. 원뿔이나 원기둥에서는 한 평면의 부분집합이 아닌 곡면이 등장하기 때문이다. 원뿔이나 원기둥에서 옆면을 면으로 보는 것이 좋을지 아닌지를 탐구하는 활동을 하게 할 수 있다. 그리고 그것까지 면으로 보기 위해서는 (관념1)을 어떻게 수정하면 좋을지를 탐구하게 할 수 있다. 이러한 과정을 통해 평평하다는 것이 빠진 다음과 같은 (관념2)가 출현할 수 있다.

(관념2) 입체도형을 둘러싼 여러 개의 부분

(관념2)는 구를 소재로 하여 다시 한번 수정, 개선의 과정을 거칠 수 있다. 구는 초등학교에서 회전체 단원에서 다루어진다. 초등학교 교

7) '직사각형인 면'과 같은 표현은 나오지 않으나 맥락상 여기서 직사각형은 내부를 포함하므로 '다각형인 면'이라는 표현에 내재된 문제가 실상 똑같이 내재되어 있다고 볼 수 있다.

과서에 구에서의 면에 대해서 어떤 명시적인 언급은 나오지 않는다.[8] 구 또는 반구를 소재로 하여 이것도 면이라고 할 수 있을지, 면으로 보기 위해서는 (관념2)를 어떻게 수정하면 좋을지를 탐구하는 활동을 하게 할 수 있다. 그리고 이 과정을 통해 수정된 (관념3)이 구성될 수 있다.

(관념3) 입체도형을 둘러싼 부분

(관념1)보다는 (관념2)가, (관념2)보다는 (관념3)이 좀더 일반성을 지닌다는 차이가 있지만, 모두 입체라는 맥락에 한정되어 면을 생각한다는 공통점이 있다. 이제 직육면체에서 떼어낸 직사각형, 원뿔에서 떼어낸 옆면, 반구, 그리고 아래 [그림Ⅲ-2]와 같이 곡면의 좌우 (또는 상하) 끝의 선의 모양이 동일한 도형들을 탐구하는 과정을 통해, 입체라는 맥락을 벗어난 면의 관념을 구성하게 할 수 있다.

[그림 Ⅲ-2]

이것들의 공통 성질을 찾아보는 활동을 하는 과정에서, 입체의 표면이라는 맥락에서 벗어나 면의 고유한 성질을 추상화하는 활동을 하게 할 수 있을 것이다. 그리고 이 과정에서 면을 선이 움직인 자리로 볼 수 있다는 관념에 이르도록 할 수 있다. 원판은 어떤 선이 움직인 자리인지, 원뿔의 옆면은 어떤 선이 움직인 자리인지, 구나 반구는 어떤 선이 움직인 자리로 볼 수 있는지 등을 조사해 보는 활동도 도움이 될 것이다.

(관념4) 면은 선이 움직인 자리이다.

위의 (관념4)는 다시 다음 두 가지로 나누어질 수 있다.

(관념4-1) 면은 선이 움직인 자리이다. (선의 모양은 움직이는 과정에서 변하지 않는다.)
(관념4-2) 면은 선이 움직인 자리이다. (선의 모양은 움직이는 과정에서 변할 수 있다.)

직사각형이나 반구, 원뿔의 옆면, 그리고 위의 [그림 Ⅲ-2]에 제시된 도형을 가지고 하는 활동에서는 (관념4-2)보다 (관념4-1)이 구성되기 쉽다. 직사각형을 가로나 세로 선분이 평행하게 움직인 것으로, 구를 반원이 회전하여 움직여서 생긴 것으로, 원뿔의 옆면을 모선이 회전하여 움직여서 생긴 것으로 볼 때, 움직이는 선 자체는 그 모양이 변하지 않는다. 곧 위의 그림의 예들에서 움직인다는 것은 평행이동과 회전이동이라는 강체 운동을 의미한다. 선 자체는 강체로서 움직이는 과정에서 그 모양이 변하지 않는다. 참고로, 7-나 단계 교과서들을 보면, 선이 움직인 자리로서의 면 개념을 설명

8) 어느 중학교 교과서에서는 '구는 곡면만으로 둘러싸여 있다. 특히 구의 겉면을 구면이라 한다(금종해 외, 2002: 39)'와 같이 구면이라는 용어를 사용하는데, 이것은 구를 이루는 부분이 면임을 인식하는 데 도움이 되나 구와 구면을 다른 것으로 보게 할 수 있다.

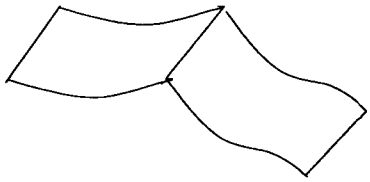
하면서 [그림Ⅲ-3]과 같은 그림을 제시하고 있다(박두일 외, 2002; 39 등).

[그림 Ⅲ-3]

위의 (관념4-1)은 다음 [그림Ⅲ-4]와 같은 도형을 어떤 선이 움직인 자리로 볼 수 있는가를 탐구하는 활동을 통해 재차 수정되어 (관념4-2)에 이를 수 있다.

[그림 Ⅲ-4]

이 예들에서는 고정된 모양의 선이 정해진 방향으로 한 번 평행이동하거나 회전이동하는 방식으로 움직였을 때 움직인 자리로 보기 어렵다.[9] 위의 예들은 (관념4-1)에 대해 일종의 반례와 같은 기능을 할 수 있다. (관념4-2)는 연속 함수를 이용하여 표현될 수 있을 것이다. 또한 (관념4-2)도 여전히 수정될 가능성에 대해 열려 있다. 예를 들어 두 개의 곡면이 한 선에서 이어져 있는 [그림Ⅲ-5]와 같은 곡면은 하나의 면인가 두 개의 곡면인가를 생각해 보는 활동이 도움이 될 수 있다.



[그림 Ⅲ-5]

(관념4-2)의 입장에서 볼 때, [그림Ⅲ-5]의 곡면은 한 선이 연속적으로 한번에 움직여 생긴 것으로 볼 수 있으므로 하나의 면이라고 할 수도 있다. 이 곡면을 한 곡면이 아닌 두 곡면이 이어져 있는 것으로 보기 위해서는 연속을 넘어서 미분과 유사한 개념을 생각할 필요가 있을지 모른다. (관념1)에서 (관념4)로의 개선 과정은 대체로 특수에서 일반으로의 발전이라고 할 수 있다. 입체를 둘러싸고 있는 부분과 선이 움직인 자리라는 두 개념은 좀더 세분화된 관념으로 나누어질 수 있으며, 관념에서 관념으로의 이행은 이전의 관념을 반성, 수정, 개선하는 과정으로 이루어질 수 있다.

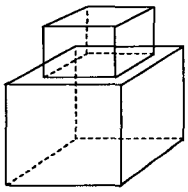
나. 다면체 정리에서 단일폐곡선으로 둘러싸인 부분으로서의 면 개념의 지도

다면체 정리는 6차 교육과정에서는 기본 내용이었으나 7차 교육과정에서는 심화 과정의 내용이 되었다(교육부, 1997). 오일러의 다면체 정리는 다면체를 분류하는데 도움이 되는 정리로, 그 내용은 다음과 같다. "구와 연결 상태가 같은 다면체에서 꼭지점의 개수를 v, 모서리를 e, 꼭지점을 f라 할 때, $v-e+f=2$이다." 다면체가 다각형으로 된 면으로만 둘러싸인 입체도형이므로 원기둥과 같이 다각형이 아닌 면을

9) 삼각형 모양의 면의 경우, 세 변의 길이 중 가장 짧은 선분(또는 그것보다 더 짧은 길이의 어떤 선분)이 여러 번 왔다 갔다 움직인 것으로 해석할 수도 있다.

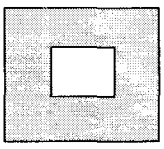
갖는 것은 다면체가 아니다. 따라서 원기둥에서는 오일러 정리가 성립하지 않는다. 다면체를 단순히 문자 그대로 면(面)이 많은(多) 입체라고 생각하고 있는 학생들에게는 원기둥에서 다면체 정리가 성립하는지를 조사하는 활동을 하게 하여 자신의 관념을 수정할 기회를 갖게 해야 할 것이다. 이런 기회를 가진 학생들은 다면체는 단순히 면이 많은 입체라는 관념을 버리고 다각형으로 된 면만을 갖는 입체라는 새로운 관념을 구성하게 될 것이다.

다면체 정리와 관련하여, 면의 정의가 문제가 될 수 있는 맥락이 있다. 예를 들어 다음 [그림Ⅲ-6]의 입체를 생각하자.



[그림 Ⅲ-6]

김연식과 김홍기의 교과서(1999)에서는 위 [그림Ⅲ-6]의 다면체에서 v, e, f 를 조사하고 $v-e+f$의 값을 구하는 문제가 연습문제로 제시되어 있다(303쪽). 이 교과서에 제시된 이 문제의 답은 $v=16$, $e=24$, $f=10$, $v-e+f=2$ 이다(320쪽). 관건은 위와 아래의 정육면체가 만나 이루어진 사각 고리(ring) 모양([그림Ⅲ-7])을 면으로 볼 것인가 아닌가 하는 것이다.



[그림 Ⅲ-7]

다각형으로 이루어진 면을 '여러 개의 선분으로 둘러싸인 도형'이라고 생각하면, 위 사각 고리 모양은 8개의 선분으로 둘러싸인 면으로 볼 수 있다. 또 '입체를 둘러싸고 있는 부분'이라는 관점에서 보아도 위의 사각 고리 모양의 면은 분명 다면체를 둘러싸고 있는 부분이므로 면으로 보인다. '선이 움직인 자리'라는 관점에서 보아도 여전히 면으로 보인다. 그러므로 이러한 면의 개념을 가지고 이 문제를 풀면, 면은 11개가 되며 $v-e+f=3$이 된다. 그러나 '단일폐곡선으로 둘러싸인 부분'을 면으로 보면, 위의 사각 고리 모양은 면이 아니다. 여기서 위와 같은 다면체를 오일러 정리의 반례가 아닌 예로 전환하기 위해서는 면의 정의를 수정할 필요가 있게 된다. 이 교과서의 정의는 이러한 점을 고려하여 다면체 정리 맥락에서 면을 특수하게 재정의한 것으로 보인다.

교과서의 전개 순서상 위와 같은 면의 정의는 다면체 정리의 도입 이전에 나와 있다. 그러나 학습 지도시 교사가 교과서의 전개 순서대로 면을 이렇게 정의한다고 일러주는 것만으로는 학생들이 면을 왜 그렇게 정의했는지 충분히 납득하여 내면화하기 어렵다. 적어도 이전에 학생들이 이미 가지고 있는 면의 여러 관념과 교과서에 제시된 개념을 비교하는 활동을 하는 가운데 이 정의를 도입해야 한다. 이뿐만 아니라, 다면체 정리의 학습 이후에 연습문제에 나와 있는 위의 그림과 같은 다면체에 대해 다면체 정리가 성립하는지를 토론하는 가운데, 그 입체에 대해 다면체 정리가 성립하도록 하기 위해서는 면의 개념을 어떻게 수정하면 좋을지 등을 토의하면서 다면체 맥락에서 특수하게 기술된 교과서의 면의 정의를 다시 한번 재음미할 수 있게 하는 지도가 이루어져야 한다.

Ⅳ. 다면체의 구성 요소

7차 교육과정에 따르면 다면체의 학습은 7-나 단계에서 이루어진다(교육부, 1997: 70). 그 선행 학습으로 5-가 단계에서 직육면체와 정육면체를 학습하며, 6-가 단계에서 각기둥과 각뿔을 학습한다. 5-가 단계의 교과서에서는 직육면체를 직사각형 6개로 둘러싸인 도형으로 정의하고 뒤이어 "직육면체를 둘러싸고 있는 직사각형을 직육면체의 면이라 하고, 직육면체의 면과 면이 만나는 선분을 모서리라고 한다. 또, 직육면체의 세 모서리가 만나는 점을 꼭지점이라고 한다."고 하고 있다(교육인적자원부, 2002: 49). 직육면체의 구성 요소인 면, 모서리, 꼭지점을 정의할 때, 이 세 용어를 오직 직육면체에 한정하여 사용한다면, 일관되게 '직육면체의 면, 직육면체의 모서리, 직육면체의 꼭지점'이라고 해야 할 것이다.

5-가 단계 교과서에서는 직육면체의 면, 직육면체의 모서리, 직육면체의 꼭지점이라는 표현도 사용하고 면, 모서리, 꼭지점이라는 표현도 사용하고 있다. 이 두 가지 표현이 모두 가능하지만 후자의 표현으로 통일해도 문제될 것은 없다. 사실 전자의 표현을 사용하는 것이 오히려 번거롭고 혼동을 가져올 수도 있다. 이를테면 사면체, 오면체, 육면체, ... 각각의 경우에 대해 사면체의 면, 사면체의 모서리, 사면체의 꼭지점, 오면체의 면, 오면체의 모서리, 오면체의 꼭지점, 육면체의 면, 육면체의 모서리, 육면체의 꼭지점, ... 이라고 부르는 것은 매우 번거롭다.

사실 위에서 인용한 교과서의 진술을 보면 면, 모서리, 꼭지점만 두꺼운 글씨로 되어 있다. 면만 두꺼운 글씨체로 처리한 것은 교육과정 문서에 용어와 기호로 제시되어 있는 것이, 이를테면 '직육면체의 면'이 아니라 그냥 '면'임을 고려한 조치로 보인다(교육부, 1997: 57). 이렇게 보면, 교과서의 진술에서 면 앞에 붙어 있는 '직육면체의'는 직육면체 맥락에서 도입하면서 붙인 일종의 수식어로 보인다. 그런데 이 수식어는 꼭 필요한 것이 아니며, 각뿔과 같은 다른 다면체의 경우를 고려할 때 없는 것이 낫다. 직육면체에서 면과 면이 만나는 선분을 그냥 모서리, 모서리와 모서리가 만나는 점을 꼭지점이라고 해야 이후의 각기둥, 각뿔, 다면체의 경우에 그대로 확장될 수 있다. 사실 6-가 단계 교과서에서도 각기둥과 각뿔의 구성 요소인 모서리와 꼭지점을 정의할 때는 후자의 표현을 사용하고 있다. 즉, 각기둥의 경우에 '면과 면이 만나는 선을 모서리라 하고, 모서리와 모서리가 만나는 점을 꼭지점'이라고 정의하고 있다. 각뿔의 경우에도 '면과 면이 만나는 선을 모서리, 모서리와 모서리가 만나는 점을 꼭지점이라고 정의하고 있다(교육인적자원부, 2002: 18, 23).

그런데 각뿔의 경우 특별히 '각뿔의 꼭지점'을 정의한다. 각뿔의 꼭지점은 옆면을 이루는 모든 삼각형의 공통인 꼭지점이다. 이와 같이 각뿔의 꼭지점을 정의하기 위해서는 전자의 방법을 사용할 수 없고, 그래서 도리 없이 후자의 방법을 사용하게 된 것이다.[10]

앞서 5-가 단계 교과서에서 직육면체의 구성 요소로 면, 모서리, 꼭지점을 정의한 것처럼 여기서도 각기둥과 각뿔의 구성 요소로 면, 모서리, 꼭지점을 모두 정의해야 일관적이다. 그런데도 초등학교 수학에서는 각기둥, 각뿔의 경우에 면에 대한 정의 없이 무정의 용어처럼 면

10) 원뿔에서는 꼭지점이 하나뿐이므로 각뿔에서와 같은 문제는 생기지 않으나, 각뿔과 원뿔의 통일성이라는 점에서 그냥 꼭지점이라 하지 않고 '원뿔의 꼭지점'이라고 한 것으로 보인다.

을 사용하고 있다. 각기둥, 각뿔에서도 그 구성 요소로서 면, 모서리, 꼭지점을 모두 정의해야 한다. 그리고 그것이 7-나 단계에서 다면체의 구성 요소를 정의할 때 통합되어야 한다.

V. 결론

본 논문에서는 학교수학에서 취급하는 다각형과 다면체 관련 내용에 대한 교수학적 분석을 다각형과 다면체의 정의와 관련된 문제, 면의 개념과 관련된 문제, 다각형과 다면체의 구성 요소와 관련된 문제 등으로 나누어 분석하고, 학습 지도에 관한 몇 가지 제안을 하였다. 본 논문의 결과를 요약하면 다음과 같다.

수학적으로는 도형과 그 영역을 구분하여 정의하고 모든 맥락에 일관되게 사용할 수 있다. 곧 다각형은 다각형을 구성하는 선 자체만을 의미하며 다각형의 영역은 그 내부까지 포함하는 것으로 정의할 수 있다. 다면체의 경우도 유사하다. 그러나 현재 초등학교수학과 중학교 수학에서는 도형과 구분되는 영역이라는 용어를 도입하지 않고 다각형을 때로는 경계만 의미하는 것으로, 때로는 내부까지 포함하는 것으로 본다. 다면체와 같은 입체도 때로는 속이 빈 것으로, 때로는 속이 찬 것으로 본다. 학교수학에서 다각형과 다면체의 정의에는 '둘러싸인'이나 '이루어진'과 같은 중의적이거나 불완전한 표현을 사용하며, 이러한 다소 불완전한 언어적 정의를 그림으로 보완하여 직관적인 이해를 도모하고 있다. 또 다각형과 다면체를 엄밀하게 정의하지 않은 채 맥락에 따라 상이한 의미로 해석하는 것을 허용하고 있다. 곧, 다각형과 다면체는 학교수학에서 맥락 의존적 개념으로 취급되고 있다.

우리나라 학교수학에서 사용된 면의 개념에는 입체를 둘러싸고 있는 부분, 선이 움직인 자리, 단일폐곡선으로 둘러싸인 부분의 세 가지가 있다. 초등학교수학에서는 면이 입체라는 맥락 속에서 등장하며, 일반적인 평면과 곡면을 모두 포함하는 것으로 취급되지 않는다. 중학교에서 면은 입체를 둘러싸고 있는 부분이라는 의미와 더불어 입체라는 맥락을 벗어나 선이 움직인 자리라는 의미로 동시에 사용된다. 초등학교수학의 입체도형을 이루는 부분으로서의 면 개념은 이전의 관념을 수정, 개선하는 방식으로 중학교수학의 선이 움직인 자리로서의 면의 개념으로 연결될 수 있다. 한편, 단일폐곡선으로 둘러싸인 부분으로서의 면 개념은 '다면체 정리'라는 특수한 맥락에서 특수한 필요와 목적에 따라 도입된 개념이다. 그러므로 이 면 개념은 이러한 목적 및 필요, 그리고 다른 면 개념과의 관련 속에 지도되어야 한다.

또한 다면체의 면, 다면체의 모서리, 다면체의 꼭지점은 단순히 면, 모서리, 꼭지점이라고 표현하는 것이 좋다. 그리고 현재 중학교 수학 교과서에서 다면체를 정의할 때 사용하는 '다각형인 면'이라는 표현은 초등학교의 직관적인 접근과 중학교의 논리적인 접근이 만나 발생한 충돌을 보여주는 사례이다.

수학적 또는 논리적으로 오류나 오해의 소지가 없게 명확히 정리하여 제시할 수 있는 사항이라도 학교수학에서는 그렇게 제시하기 어려운 경우가 있다. 이것은 학교수학의 결점이 아니라 학교수학이 학문으로서의 수학과 구분되는 고유한 특성이라 할 수 있다. 이 논문에서 살펴본 다각형과 다면체도 그러한 경우이다. 교사는 학교수학에서 원, 다각형, 다면체, 면의 의미가 각 단계에서 어떻게 제시되며 왜 그렇게 제시되는지, 이들 용어의 의미가 단계나 맥

락에 따라 어떻게 달라지는지, 각 단계나 맥락에서 사용되는 정의 또는 의미에 어떤 장점과 제한점이 있는지, 각 맥락들이 학생들에게 어떤 관념을 형성시킬 수 있는지, 또 이 관념들이 교육의 과정 속에 어떻게 수정되고 개선되어 갈 수 있는지를 잘 알고 학습 지도에 임해야 한다. 이 논문에서 제시한 바와 같이, 현재 교육과정과 교과서의 구성 방식 하에서도, 학년이 올라감에 따라 학생들이 자신들이 이미 가지고 있는 다각형, 다면체, 면의 의미를 수정하고 개선해 가도록 하는 오류주의 또는 구성주의적인 학습 지도가 가능하다. 교사가 다각형, 다면체, 면과 같은 개념이 학교수학에서 다루어지고 있는 방식에 내재되어 있는 교수학적 의도를 잘 이해하고, 그로부터 파생되는 딜레마 등 미묘한 문제점에 대해 경각심을 가지고, 학생들이 자신의 기존의 관념을 지속적으로 수정, 개선, 발전시키는 교육적 경험을 하게 하는 학습 지도를 할 때, 이들 내용에 담겨 있는 교육적 가치가 충분히 실현될 수 있을 것이다.

참고문헌

강옥기 · 정순영 · 이환철(2002). **중학교 수학 7-나**. 서울: 두산.

교육부(1997). **수학과 교육과정**. 서울: 대한교과서주식회사

교육인적자원부(2001). **수학 4-나**. 서울: 대한교과서주식회사

교육인적자원부(2002). **수학 4-가**. 서울: 대한교과서주식회사

교육인적자원부(2002). **수학 5-가**. 서울: 대한교과서주식회사

교육인적자원부(2002). **수학 5-나**. 서울: 대한교과서주식회사

교육인적자원부(2002). **수학 6-가**. 서울: 대한교과서주식회사

교육인적자원부(2002). **수학 6-나**. 서울: 대한교과서주식회사

교육인적자원부(2003). **수학 2-가**. 서울: 대한교과서주식회사

금종해 · 이만근 · 이미라 · 김영주(2002). **중학교 수학 7-나**. 서울: 고려출판.

김연식 · 김홍기(1999). **중학교 수학 1**. 서울: 두산.

김호우 · 박교식 · 신준국 · 정은실(1996). **중학교 수학 1**. 서울: 지학사

문교부(1979). **중학교 수학 1**. 서울: 국정교과서주식회사

박규홍 · 한옥동 · 김성국 · 임창우 · 고성군 · 김유태 · 육상국 · 박재용(2002). **중학교 수학 7-나**. 서울: 두레교육.

박두일 · 신동선 · 강영환 · 윤재성 · 김인종(2002). **중학교 수학 7-나**. 서울: 교학사.

박윤범 · 박혜숙 · 권혁천 · 육인선(2002). **중학교 수학 7-나**. 서울: 대한교과서.

배종수 · 박종률 · 윤행원 · 유종광 · 김문환 · 민기열 · 박동익 · 우현철(2001). **중학교 수학 7-나**. 서울: 한성교육출판사.

신항균(2002). **중학교 수학 7-나**. 서울: 형설출판사.

양승갑 · 박영수 · 박원선 · 배종숙 · 성덕현 · 이성길 · 홍우철(2002). **중학교 수학 7-나**. 서울: 금성출판사.

우정호 · 류희찬 · 문광호 · 박경미 (2002). **고등학교 수학 10-나**. 서울: 대한교과서.

이준열 · 장훈 · 최부림 · 남호영 · 이상은(2001). **중학교 수학 7-나**. 서울: 디딤돌.

전평국 · 신동윤 · 방승진 · 황현모 · 정석규(2002). **중학교 수학 7-나**. 서울: 교학연구사.

조태근 · 임성모 · 정상권 · 이재학 · 이성재(2002).

중학교 수학 7-나. 서울: 금성출판사.
최용준(2002). **중학교 수학 7-나**. 서울: 천재교육.
한국수학사전연구원(1989). **최신 수학사전**. 서울: 교육문화원.
황석근 · 이재돈(2002). **중학교 수학 7-나**. 서울: 한서출판사.
Borowski, E. J. & Borwein, J. M. (1991). *The harpercollins dictionary of mathematics*. N.Y.: HarperCollins Publishers, Inc.
Bruner, J. S. (1995). **브루너 교육의 과정**. (이홍우 역). 서울: 배영사. (영어 원작은 1960년 출판).
Lakatos, I. (1991). **수학적 발견의 논리**. (우정호 역). 서울: 민음사. (영어 원작은 1976년 출판)
Musser, G. L. & Burger, W. F. (1997). *Mathematics for elementary teachers* (4th ed.). NJ: Prentice-Hall, Inc.
Serra, M. (1997). *Discovery geometry* (2nd ed.). CA: Key Curriculum Press.

Didactical Analysis of Polygon, Polyhedron, and Surface

Park, Kyo Sik (Gyeongin National University of Education)
Yim, Jae Hoon (Gyeongin National University of Education)

In school mathematics, polygon and polyhedron are defined by vague terms such as "surrounded" or "formed". Moreover, the inclusion of boundary and interior in the definition of polygon and polyhedron is varied according to the context. Polygon and polyhedron are considered as "context-dependent concept" in school mathematics.

Elementary school mathematics introduces a surface only in the context of solid, yet secondary school mathematics explains a surface as the trace of the line movement. From the perspective of fallabilism, it is possible and desirable to lead students to revise and improve their conceptions on polygon, polyhedron, and surface.

It is more appropriate to name a face, an edge, and a vertex rather than to express a face of polyhedron, an edge of polyhedron, and a vertex of polyhedron in textbooks. The term "surface as a polygon" in secondary mathematics textbooks shows a conflict between intuitive approach in elementary school and logical approach in secondary school.

* **Key words**: didactical analysis(교수학적 분석), polygon(다각형), polyhedron(다면체), surface (면), context-dependent definition(맥락의존적 정의)