

Theory of specific heat discontinuity of the superconductor under applied magnetic field

Ik Soo Eo and Cheol Ho Kim[†]

Faculty of Advanced Digital Engineering, Honam Univ. Kwangju 506-714, Korea

(Received October 16, 2003)

(Accepted February 2, 2004)

Abstract We derive specific heat gap at the critical temperature as an exact analytical function of applied magnetic field by using the thermodynamics. And we calculate numerical value of specific heat gap for some superconductors with the derived results and discuss the physical meaning. And it will be discussed that gap of specific heat discontinuity under certain magnetic field intensity become zero at the critical temperature.

Key words Superconductor, Superconductivity, Specific heat discontinuity, Magnetic field

인가 자기장 세기에 따른 초전도체 비열 불연속성 변화에 관한 이론

어익수, 김철호[†]

호남대학교 첨단디지털공학부, 광주, 506-714

(2003년 10월 16일 접수)

(2004년 2월 2일 심사완료)

요약 본 논문의 목적은 초전도체에 자기장 H 가 인가되고 있는 경우, 임계온도에서의 비열 불연속폭을 열역학적 방법을 사용하여 인가자기장 H 의 해석적 함수로서 정확히 구하는 데에 있다. 그리고 이러한 결과를 이용하여 몇몇 초전도체의 비열 불연속폭에 대한 수치를 계산하고 그 의미를 분석할 것이다. 특히 초전도체의 일반적 현상인 상태변이 시의 비열불연속 현상이 특정 세기의 자기장하에서는 일어나지 않는다는 주목할 만한 결과에 대해서도 언급할 것이다.

1. 서론

결정의 물성을 논할 때 그 대상은 크게 표면과 벌크의 두 부분으로 나눌 수 있다. Nanometer 정도의 미세한 결정의 물성을 다룰 때는 표면이 중요한 역할을 한다. 그 이유는 결정이 극도로 작아지면 결정 내부의 입자수에 대한 표면입자수의 비율이 증가하게 되어 결정 전체의 성질이 산란, 흡착, 탈리, 확산 등에 의한 표면입자의 거동에 크게 좌우되기 때문이다[1-3]. 본 논문에서 논하고자 하는 비열과 같은 열적성질을 다룰 때는 벌크가 중요한 대상이 된다. 그 이유는 열적성질은 벌크내의 전자 및 격자원자 등에 의한 거시적 현상이기 때문이다.

결정의 비열은 전도전자에 의한 전자비열과 격자에 의

한 격자비열의 합으로서 주어진다. 그러나 결정구조, Debye 온도 등과 같은 격자의 특성은 결정이 초전도상태로 되더라도 변하지 않기 때문에, 격자비열은 초전도상태에서나 상전도상태에서나 동일하여야 한다. 따라서 초전도상태와 상전도상태간의 비열차이는 오직 전자비열의 변화에 의해서만 일어난다.

외부자기장이 없을 경우, 초전도체의 임계온도에서의 비열 불연속폭 Δc 는 Rutgers의 식이라고 불리우는 다음 식으로 주어진다[4].

$$\Delta c = c_s - c_N = \mu_0 T_{c0} \left(\left(\frac{dH_{CT}}{dT} \right)^2 \right)_{T=T_{c0}} \quad (1)$$

여기서 c_s 는 초전도상태의 비열, c_N 은 상전도상태의 비열, μ_0 는 유전율, T 는 온도, T_{c0} 는 인가자기장이 없는 경우의 임계온도 그리고 H_{CT} 는 임계자기장을 의미한다. 임계자기장 H_{CT} 는 온도 T 의 함수이며 많은 초전도체에 대해 다음과 같은 근사식이 유용하게 쓰여진다[4].

[†]Corresponding author
Tel: +82-62-940-5561
Fax: +82-62-940-5077
E-mail: chkim@honam.ac.kr

$$H_{CT} = H_{C0} \left(1 - \left(\frac{T}{T_{C0}} \right)^2 \right) \quad (2)$$

여기서 H_{C0} 는 온도가 절대영도인 경우의 임계자기장을 의미한다. 식 (2)를 식 (1)에 대입하면 Rutgers의 식은

$$\Delta c = c_s - c_N = \frac{4\mu_0 H_{C0}^2}{T_{C0}} > 0 \quad (3)$$

와 같이 된다. 식 (3)은 외부자기장이 인가되고 있지 않은 상태에서 초전도체의 온도를 상승시키면서 비열을 측정하면, 임계온도 $T_{CH} = T_{C0}$ 에서 비열이 불연속적으로 저하한다는 사실을 잘 보여주고 있다.

만약에 자기장이 존재한다면 전이가 일어나는 임계온도는 T_{C0} 보다 낮게 된다. 이 경우에도 해당 임계온도에서 비열 불연속이 존재한다는 사실은 알려져 있으나 [4-8], 구체적으로 인가된 자기장 H 의 세기에 따라 불연속의 폭이 어느 정도 되는지에 대한 정량적인 이론적 고찰은 아직 이루어지지 않고 있다. Bardeen, Cooper, Schrieffer(BCS)에 의한 초전도이론[9] 그리고 Carbotte에 의한 최근의 논문[10]에서도 임계온도에서의 비열 불연속폭이 계산된 바 있으나 이는 모두 자기장이 배제된 조건에서의 결과였다.

본 논문의 목적은 초전도체에 자기장 H 가 인가되고 있는 경우, 해당 임계온도에서의 비열 불연속폭을 열역학적 방법을 사용하여 인가자기장 H 의 해석적 함수로서 정확히 구하는 데에 있다. 그리고 이러한 결과를 이용하여 몇몇 초전도체의 비열 불연속폭에 대한 수치를 계산하고 그 의미를 분석할 것이다. 특히 초전도체의 일반적 현상인 상태변이 시의 비열불연속 현상이 특정 세기의 자기장하에서는 일어나지 않는다는 주목할 만한 결과에 대해서도 언급할 것이다.

2. 이 론

초전도체를 비롯한 자기적 물체에 대한 Helmholtz 자유에너지 F 의 변화량 dF 및 Gibbs 자유에너지 G 의 변화량 dG 는 각각 다음과 같이 주어진다[10].

$$dF = \mu_0 H dM - E dT \quad (4)$$

$$dG = -\mu_0 M dH - S dT \quad (5)$$

여기서 M 은 자화 그리고 E 는 엔트로피를 의미한다.

Helmholtz 자유에너지와 Gibbs 자유에너지 중에서 어떤 양을 주어진 물체의 에너지로 채택할 것 인가는 물체의 상태 혹은 외부 조건등에 따라 달라진다. 즉 자화 M 과 온도 T 를 독립변수로 취급할 수 있는 경우에는 Helmholtz 자유에너지에 관한 식 (4)를 사용할 수 있다.

그러나 통상의 실험조건에서는 전자기장치에 의해 자기장 H 를 인가하면서 물체의 온도 T 를 정해두고 실험을 행하기 때문에, 에너지함수로서는 H 와 T 를 독립변수로 하는 Gibbs 자유에너지가 더 적당하다. 따라서 본 논문에서는 Gibbs 자유에너지에 관한 식 (5)를 사용하여 초전도체의 비열 불연속을 논하기로 한다.

G , M 및 E 의 단위체적당 양을 각각 g , m 및 e 로 표시하면, 단위체적당 Gibbs 자유에너지 g 는 식 (5)으로부터

$$dg = -\mu_0 m dH - s dT \quad (6)$$

로 된다. 물체가 일정온도 T 하에서 초전도상태를 유지하고 있다면 마이스너 효과에 의해 내부 자기유도 $B = \mu_0(m + M) = 0$ 즉 $m = -H$ 가 된다. 따라서 식 (6)으로부터

$$\begin{aligned} g_s(T, H) &= g_s(T, 0) + \int_{T,0}^{T,H} \mu_0 H dH \\ &= g_s(T, 0) + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \end{aligned} \quad (7)$$

이 유도된다. 여기서 첨자 S 는 초전도 상태에서의 양임을 나타내기 위해 붙여진 것이다. 식 (7)로부터 초전도 상태에 있는 물체의 Gibbs 자유에너지는 인가 자기장 H 가 증가함에 따라 자기장의 2승에 비례하여 높아짐을 알 수 있다.

자기장 H 가 인가되고 있는 물체가 어떤 온도 T 에서 상전도상태를 유지하고 있다면 식 (6)에서 $m = 0$, $dT = 0$ 이므로

$$g_N(T, H) = g_N(T, 0) \quad (8)$$

가 얻어진다. 여기서 첨자 N 은 상전도 상태에서의 양임을 나타내기 위해 붙여진 것이다. 식 (8)은 자기장이 존재하더라도 상전도 상태에 있는 물체의 Gibbs 자유에너지는 변화하지 않음을 의미한다.

인가자기장 H 가 온도 T 에서의 임계자기장 H_{CT} 인 경우, 물체는 초전도상태와 상전도상태의 경계상태에 있으므로

$$g_s(T, H_{CT}) = g_N(T, H_{CT}) \quad (9)$$

가 성립한다. 식 (7)~(9)로부터

$$\begin{aligned} g_s(T, 0) - g_N(T, 0) &= \left(g_s(T, H) - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) - g_N(T, H) \\ &= \left(g_s(T, H_{CT}) - \frac{1}{2} \mu_0 H_{CT}^2 \right) - g_N(T, H_{CT}) \\ &= -\frac{1}{2} \mu_0 H_{CT}^2 \end{aligned} \quad (10)$$

임을 알 수 있다. 그리고 식 (7), (8) 그리고 식 (10)에 의해

$$\begin{aligned} g_S(T, H) - g_N(T, H) &= \left(g_S(T, 0) + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) - g_N(T, 0) \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 H^2 - \frac{1}{2} \mu_0 H_{CT}^2 \end{aligned} \quad (11)$$

가 유도된다.

물체의 단위체적당 비열 c 는

$$c = -T \frac{d^2 g}{dT^2} \quad (12)$$

로 주어진다. 따라서 양 상태간의 비열차 $\Delta c(T, H)$ 는 식 (11), (12)으로부터

$$\begin{aligned} \Delta c(T, H) &= c_S(T, H) - c_N(T, H) \\ &= -T \frac{d^2}{dT^2} (g_S(T, H) - g_N(T, H)) \\ &= -T \frac{d^2}{dT^2} \left(\frac{1}{2} \mu_0 H^2 - \frac{1}{2} \mu_0 H_{CT}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 T \frac{d^2}{dT^2} H_{CT}^2 \end{aligned} \quad (13)$$

와 같이 주어진다.

식 (2)로부터 자기장 H 가 인가될 때의 임계온도 T_{CH} 는

$$T_{CH} = T_{C0} \left(1 - \left(\frac{H}{H_{C0}} \right)^2 \right) \quad (14)$$

과 같이 인가자기장 H 의 함수로 된다.

물체에 자기장 H 가 인가되고 있을 때 임계온도 $T = T_{CH}$ 에서의 비열 불연속폭 $\Delta c(T_{CH}, H)$ 는 식(13)으로부터

$$\begin{aligned} \Delta c(T_{CH}, H) &= \left(-\frac{1}{2} \mu_0 T \frac{d^2}{dT^2} H_{CT}^2 \right)_{T=T_{CH}} \\ &= \frac{4\mu_0 H_{C0}^2 T_{CH}^3}{T_{C0}^4} - \frac{2\mu_0 H_{C0} T_{CH} H}{T_{C0}^2} \end{aligned} \quad (15)$$

로 된다. 식 (14), (15)의 유도에는 $(H_{CT})_{T=T_{CH}} = H$ 라는 사실이 적용되었다. 식 (15)에 식(14)를 대입하면 비열 불연속폭 $\Delta c(T_{CH}, H)$ 는 최종적으로

$$\begin{aligned} \Delta c(T_{CH}, H) &= c_S(T_{CH}, H) - c_N(T_{CH}, H) \\ &= \frac{4\mu_0 H_{C0}^2}{T_{C0}} \left(1 - \frac{H}{H_{C0}} \right)^2 \left(1 - \frac{3H}{2H_{C0}} \right), \quad (0 \leq H \leq H_{C0}) \end{aligned} \quad (16)$$

와 같이 된다. 식 (16)은 인가자기장 H 를 일정 값에 고정해두고, 초전도상태에 있던 시료의 온도를 올라가면서 비열을 측정할 때, 상전도상태로의 전이가 일어나는 임계온도 T_{CH} 에서의 비열 변화를 알려준다. 단, 식 (16)에서 인가자기장 H 값은 H_{C0} 이하인 경우에만 유효하다. 그 이유는 H 가 H_{C0} 를 넘으면 어떤 온도하에서도 물체는

상전도상태가 되므로 우리가 지금 논하고 있는 “임계온도” 혹은 “임계온도에서의 비열 불연속”이라는 개념은 존재하지 않기 때문이다. 식 (16)에서 T_{C0} , H_{C0} 그리고 T_{CH} 는 재료의 종류에 따라 결정되는 값이다.

3. 논의 및 결론

Fig. 1은 식 (16)을 무차원으로 환산된 축에 대해 나타낸 것이며, Fig. 2는 식 (16)을 몇가지 초전도체에 적용시켜 수치로 나타낸 그림이다. 식 (16)과 Fig. 1~2로부터 초전도체의 비열 불연속성에 관한 여러 특성들을 말할 수 있다. 비열 불연속폭은 인가자기장 H 가 $0 < H < 2/3 H_{C0}$ 인 경우에는 양의 값을 가지며, $2/3 H_{C0} < H < H_{C0}$ 인 경우에는 음의 값을 갖는다. 즉, 인가자기장 H 의 범위가 $0 < H < 2/3 H_{C0}$ 인 경우에는 비열은 해당 임계온도에서 불연속적으로 떨어지게 된다. 이 경우 떨어지는 비

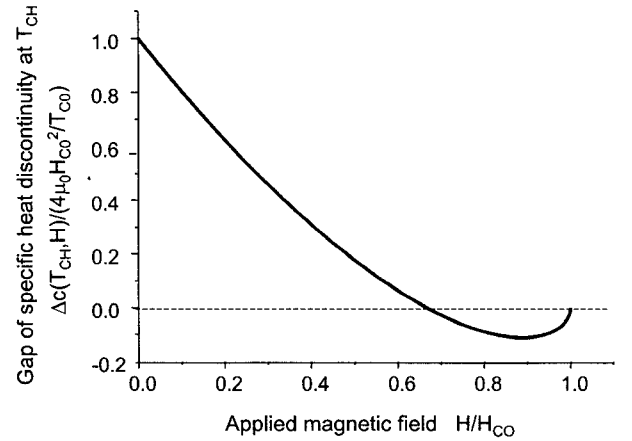


Fig. 1. Plot of gap of specific heat discontinuity at corresponding versus applied magnetic field. Where both horizontal and vertical axes are reduced to dimensionless.

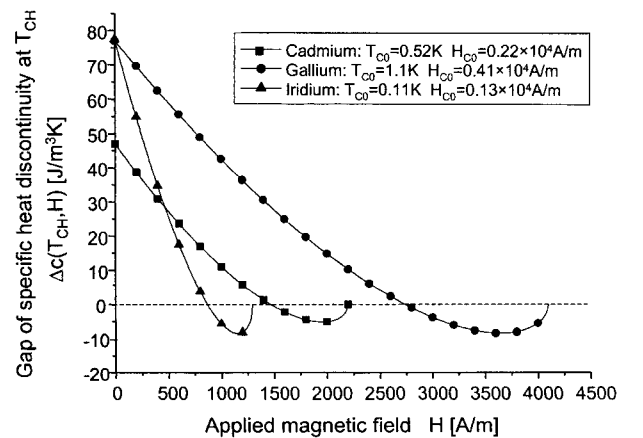


Fig. 2. Plots of gap of specific heat discontinuity at corresponding versus applied magnetic field for some superconductors.

열폭의 크기는 $H=0$ 일때 $4\mu_0 H_{C0}^2/T_{C0}$ 으로 가장 크며, $H=2/3H_{C0}$ 에 가까울수록 영에 근접하게 된다. 인가자기장 H 의 범위가 $2/3H_{C0} < H < H_{C0}$ 인 경우에는 비열은 해당 임계온도에서 불연속적으로 올라가게 된다. 이 경우 올라가는 비열폭의 크기는 $H=8/9H_{C0}$ 까지는 커지다가 $H=H_{C0}$ 에 가까워지면 다시 영으로 돌아간다. $H=8/9H_{C0}$ 인 경우 임계온도는 $T_{CH}=1/3T_{C0}$ 이며, 이 임계온도에서의 비열 상승폭의 크기는 $4\mu_0 H_{C0}^2/9T_{C0}$ 이 된다. 여기서 주목해야 할 점은 인가자기장 H 가 $H=2/3H_{C0}$ 인 경우에는 비열 불연속폭은 영이된다는 점이다. 이는 인가자기장을 $H=2/3H_{C0}$ 에 고정해두고 초전도상태에 있던 시료의 온도를 올려가면서 비열을 측정할 때, 온도가 상전도상태로 전이하는 임계온도 $T_{CH}=1/\sqrt{3}T_{C0}$ 에 도달하더라도 비열 불연속성은 나타나지 않음을 의미한다.

이상에서 기술한 식 (16)과 Fig. 1~2에 대한 해석을 요약하면 다음과 같다. 첫째, 인가 자기장의 세기 H 가 특정치 $2/3H_{C0}$ 보다 낮은 영역일 경우에는, 충분히 낮은 온도에서부터 온도를 올려가면 초전도상태에서 상전도상태로의 상전이가 일어나는 해당 임계온도에서 비열은 불연속적으로 떨어지게 되나, 인가 자기장의 세기 H 가 특정치 $2/3H_{C0}$ 보다 높은 영역일 경우에는 ($< H_{C0}$), 해당 임계온도에서 비열은 불연속적으로 상승하게 된다. 둘째, 인가 자기장의 세기가 특정치 $2/3H_{C0}$ 일 경우에는, 해당 임계온도에서 상전이는 일어나지만 비열이 불연속적으로 변화하는 현상은 보이지 않게 된다.

자기장이 인가되지 않을 때의 비열 불연속폭은 앞서 나타낸 바와 같이 식 (16)에 $H=0$ 을 대입하여

$$\Delta c(T_{C0}, 0) = \frac{4\mu_0 H_{C0}^2}{T_{C0}} \quad (17)$$

으로 주어진다. 이는 Rutger의 식으로부터 얻어진 결과인 식 (3)과 동일하다. 이로부터 자기장이 인가되지 않

을 때의 비열차를 규정한 Rutger의 식은 식 (16)의 특수한 경우임을 알 수 있으며 아울러 식 (16)의 정당성을 뒷받침하는 한 단면일 수도 있다. 그러나 인가 자기장하의 비열 불연속성에 관한 본 논문의 결과 전반에 대한 정량적인 평가는 여러 재료에 대한 실측치와의 상세한 비교를 통해 가능할 것이며 이에 대한 연구는 추후 보고할 예정이다.

참 고 문 헌

- [1] C.H. Kim, "Coverage Dependence of the Surface Diffusion Length for Monolayer Adsorption", J. Phys. Soc. Jpn. 61 (1992) 2154.
- [2] C.H. Kim and M. Fujinohara, "Inelastic Collision and Trapping of a Gas Atom with a Crystal Surface", J. Korean Phys. Soc. 25 (1992) 415.
- [3] C.H. Kim and S. Hwangbo, "Adsorption Isotherm on the Heterogeneous Surface with Spatially Uneven periodic Adsorption Heat Distribution", J. Korean Crystal Growth and Crystal Technology 12(3) (2002) 115.
- [4] A.C. Rose-Innes and E.H. Rhoderick, Introduction to Superconductivity, 2nd ed. (Pergamon Press, New York, 1978) Chap. 4-5.
- [5] M. Tinkham, Introduction to Superconductivity (Pergamon McGraw-Hill, New York, 1975) Chap. 2.
- [6] T. Sakudo, Solid State Physics: Magnetism and Superconductivity, 1st ed. (Shokabo, Tokyo, 1993) Chap. 6.
- [7] N. Michoshiba and K. Suzuki, Introduction to Physics of Superconductivity, 1st ed. (Baifukan, Tokyo, 1995) Chap. 1.
- [8] M. Yamamura, Superconductor Engineering, 5th ed. (Denkigakkai, Tokyo, 1994) Chap. 1.
- [9] J. Bardeen, L.N. Cooper and J.R. Schrieffer, Phys. Rev. 108 (1957) 1175.
- [10] J.P. Carbotte, "Properties of boson-exchange superconductors", Rev. Mod. Phys. 62 (1990) 1027.