KJHM Vol. 17, No. 1, 2004, 119-125

공리의 문화적 의미

경북대학교 수학교육과 **유윤재**

Abstract

Truth, goodness, and beauty are originated from the Greek philosophy and these concepts are unified by Kant. This article shows that these three concepts correspond to three conditions of axiomatics, that is, consistency, completeness, and independence, respectively.

0. 들어가기

유클리드의 원론은 그 당시의 다른 교과서보다 내용면에서 풍부하다는 것은 이미 널리 알려진 사실이다. 그러나 유클리드의 원론이 가지고 있는 본질적 가치는 이론의 전개 체계의 독창성이라고 할 수 있다. 이 독창성으로 말미암아 유클리드의 원론의 내용은 많은 오류를 가지고 있었음에도 불구하고 그 가치가 상실되지 않고 지금까지 내려오고 있다.

공리적 사고가 수학에 미치는 영향은 그것이 악성 순환논법이나 악성 무한퇴행논법 같은 논리적 약점을 극복할 수 있다는 점에서 우선 수학자를 매료시킨다. 그러나 공리적 사고방식은 수학에만 머물지 않고 그 후 자연과학과 더불어 인문과학으로까지 확대되었다는 사실을 보면 공리적 사고가 논리적 완성도를 넘어 인류사의 보편적인 요소가 있다는 것을 시사한다. 이 보편성을 이해하기 위해서는 공리의 구성요소를 재해석 필요가 있다. 이러한 필요성에 의하여 본 연구는 공리의 구성요소인 무모순성, 완전성, 독립성을 문화적 관점에서 재조명한다.

1. 공리적 구성의 의의

공리는 하나의 명제로서 그 명제는 무정의 용어로 구성되어 있다. 이러한 공리가 모여 공리계가 구성된다. 공리계는 그것으로부터 유도되는 명제, 즉, 정리를 가지면서 그 정리의

모임을 하나의 수학적 체계를 구성한다. 이것을 수학적 체계 또는 수학적 모형이라고 한다. 여기서 공리계로부터 나온 수학적 체계가 단 하나 밖에 없을 수도 있고 여러 개가 존재할 수 있는데 만약 수학적 체계가 단 하나 밖에 없을 때 이 공리계를 범주적이라고 한다.

먼저 공리계가 무정의 용어로 구성되어 있고 참이라고 인정하는 배경에 대하여 간단하게 논의하자. 우리가 어떤 것의 진위에 대하여 판단할 때는 어떤 기존지식에 의존하게 된다. 즉, p를 하나의 명제라고 하고 이 명제가 참/거짓을 판정하기위한 기존지식을 q_1이라고 하면 p가 참이 되기 위해서는 q_1가 참이고 $q_1 \to p$가 참이 되어야 한다. 그런데 q_1이 참이 되기 위해서는 다른 참인 명제 q_2와 $q_2 \to q_1$가 참이라는 것이 보증되어야 한다. 이런 과정을 반복하게 되면 p가 참이라는 것을 밝히기 위해서는 참이라는 명제의 무한 연결고리가 필요하게 된다. 그러나 최초의 명제를 참이라고 인정하게 되면 이러한 무한퇴행논법이나 순환논법을 피할 수 있다. 참이라고 간주하는 최초의 명제들의 집합을 공리계라고 한다. 그러나 공리계에 있는 명제, 즉 공리들은 어떤 용어들로 구성된 문장이다. 그런데 공리를 구성하는 용어의 정의가 필요한데 어떤 용어를 정의하기 위해서는 다른 용어를 필요로 한다. 또 이 용어를 정의하기 위해서는 다시 다른 용어를 필요로 한다. 이렇게 되면 하나의 용어를 정의하기 위해서는 무한히 많은 용어를 필요로 하는데 여기서도 무한퇴행논법이나 순환논법에 걸려들게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 최초의 언명을 무정의 용어로 구성한다면 이러한 난관을 제거할 수 있을 것이다.

2. 공리계의 구성요소

공리계의 구성요소란 공리계가 하나의 수학적 체계를 가지기 위한 최소의 충족요건을 말하는데 무모순성, 독립성, 완전성을 말한다. 앞으로의 논의를 위하여 이 개념을 간단하게 설명해두자. 먼저 주어진 공리계를 S라고 하고 그 공리계에 포함된 공리들을 $p_1,\dots, p_n$이라고 하자. 편의상 이것을 $S=\{p_1,\cdots,p_n\}$ 라고 두자.

공리계가 무모순이라는 것은 S에 의한 수학적 체계상에 있는 어떤 참인 명제들도 서로 모순되지 않는다는 것을 말한다.

어떤 공리계 S가 독립이라는 것은 어떤 $n-1$개의 공리 p_j들도 나머지 p_s를 증명할 수 없다는 것을 말한다. 만약 S가 독립이 아니라면 p_s는 다른 $n-1$개의 공리 p_j에 의하여 종속되어 있다고 하며 이 경우에 두 공리계 $S-\{p_s\}$와 S의 수학적 체계는 동등하게 된다.

두 개의 동등한 공리계 $S_1=\{p_1,\cdots,p_n\}$와 $S_2=\{p_1,\cdots,p_n,p_{n+1},p_m\}$가 주어져 있을 때 S_1가 독립이라면 S_2은 독립이 아니다. 그렇지만 S_2는 S_1보다 더 많은 성질을 가지고 있

기 때문에 실제 문제에 적용하기 편리하다. S_2에서 열거되어 있지 않았지만 $S_2 - S_1$의 명제들로부터 유도되는 정리 T가 있다고 하자. 이 경우에 T는 여전히 S_1으로부터 유도될 수 있지만 그 과정은 S_2를 사용하는 것 보다 더 복잡하다.

어떤 공리계가 완전하다는 것은 그 공리체계로부터 나온 수학적 체계의 모든 명제를 증명 또는 반증할 수 있다는 것을 말한다. 그러나 괴델에 의하여 산술공리계를 포함하는 어떠한 공리계도 불완전하다는 것이 밝혀졌다.

3. 공리계에 대한 수학자의 시각

수학에서 플라톤주의는 수학적 진리란 객관적으로 존재한다는 것을 주장한다.1) 따라서 수학적 연구란 수학적 진리를 탐사하는 것과 같다. 수학자가 어떤 정리를 얻었을 때 그 정리를 발명의 소산이라고 하지 않고 발견의 소산이라고 하는 이유는 이와 같은 맥락에서 말하는 것이다. 그러나 형식주의자의 견해에 의하면 수학이란 가정과 결론을 논리적으로 연결하는 일종의 언어게임에 지나지 않는다는 것이다. 그러나 자세히 보면 형식주의는 다음과 같이 두 가지 해석이 가능하다.2) 첫 번째 해석은 전술한 바와 같이 수학은 언어게임이라는 것이다. 두 번째 해석은 주어진 수학세계가 있을 때 그 수학계는 적절한 공리계로서 완전하게 설명할 수 있다는 것이다. 따라서 공리계란 수학적 실재에 대한 가설에 해당된다.3) 이것도 하나의 권위주의라고 보겠다.4) 전자는 수학적 실재와 정합시키기 위하여 그 공리계에 부단한 수정을 가할 것이고 또 공리계가 실재와 부합되지 않는다고 판단하게 되면 그 공리계를 전면적으로 폐기할지도 모른다.5) 전자의 입장을 견지하는 수학자는 유명론적 형식주의자이고 후자의 입장을 견지한다면 실재론적 형식주의자 또는 플라톤주의적 형식주의자이다. 두 가지 해석 모두가 괴델의 불완전성 검사를 견딜 수 없다는 것은 약간의 식간이 흐른 후에 알게 되었지만 후자의 해석을 선호하는 수학자들은 몇 개의 기초 진술들로 세계를 설명할 수 있다는 점에 매력을 느끼고 있다.6)

---

1) R. Penrose(1998)는 만델브로트 집합의 경계면부근에서 나타나는 다양한 도형을 에로 들면서 수학은 플라톤적이라고 주장하고 있다. p.196.

2) 플라톤주의자와 형식주의자는 배반적 개념이 아니다. Davis & Hersh(1981, p. 172)는 플라톤주의자와 형식주의자를 연속체가설에 대한 관점의 차이로부터 구분하고 있는데 본고에서는 보다 분명히 하기위하여 플라톤주의자와 비플라톤주의자로 대비하였다.

3) 여기서 수학적 실재를 완전하게 표상할 수 있는 공리계가 존재하는가라는 문제는 제기될 수 있으나 이것은 다른 문제이므로 여기서는 논외로 할 것이다.

4) Popper(1968)는 경험론과 합리론을 각각 관찰과 지성에 의한 권위주의라고 주장했다.

5) Lakatos의 연구 프로그램 이론에서 볼 때 이러한 상황은 연구프로그램의 전환에 해당한다. 연구 프로그램 이론은 과학사의 논리를 설명하기 위한 것으로서 Kuhn의 비합리주의에 대한 반박이나 수학에서는 그러한 사례가 없다고 본다.

형식주의와 플라톤주의는 배반적 개념이 아니기 때문에 두 입장을 명확하게 대비할 수는 없지만 특별한 주제에 대해서는 서로 다르게 반응한다. 형식주의자는 논리적 설명에 흥미를 가진 반면에 플라톤주의자는 수학적 발견에 관심이 많다.

이러한 논의를 하면서도 여전히 한 가지 의문이 남는데 그것은 "수학사에서 비플라톤주의적 형식주의자가 과연 있을까"라는 질문이다. 비플라톤주의적 형식주의자라면 극단적인형식주의자의 입장을 가지고 있는 경우를 말한다. 비플라톤주의적 형식주의자에 있어서 공리계와 수학적 실재는 다른 범주에 속하며 응용수학이라는 것은 우연의 일치로 간주한다. 따라서 그러한 수학자는 존재하지 않는다고 봐야한다. 유클리드는 그 당시의 수학을 정리하는 입장에서 공리적 입장을 취했지만 그에 대한 충분한 기록이 없기 때문에 그의 공리관을 정확하게 판단할 수는 없다. 그렇지만 그 당시의 수학은 피타고라스와 플라톤의 영향이 지배적이었기 때문에 그를 플라톤주의자라고 보아도 좋을 것이다. 그러면 위의 질문에 대상이 되는 다른 한 사람을 말하면 Hilbert라고 할 수 있는데 그는 어떤 부류에 속할까? 플라톤주의자일까? 그가 기하학 기초론을 쓴 이유는 중학교 교과서에서 나오는 수준의 기하학이라도 완벽하게 형식화 한다는 것은 유클리드의 원론에서 보여진 것 보다 훨씬 더 많은 공리가 필요하며 따라서 엄청나게 어려운 작업이라는 것을 보여주었을 뿐 기하학 기초론을 집필한 배경이나 의도로부터 그의 사상적 경향을 판단한다는 것은 확실하지 않다. 더욱이 기록[7]에 의하면 그는 형식주의적 방법을 도구적이며 수학이 형식화될 수 있음을 말하지는 않았다.[8] 이런 점에서 본다면 그도 철저한 형식주의자라고 할 수 없다.

4. 공리의 성격

유클리드의 원론은 출판되자마자 베스트셀러가 되었는데 이것이 가능하게 된 것은 원론의 독창적 체제에 있다. 원론에서 무정의 용어와 공리라는 개념을 사용한 것은 수학을 논리적으로 완벽한 학문으로 만들기 위한 의도하고 본다. 그러나 원론의 일부는 부정확하고 주관적이지만 그렇게 구성함으로써 그 당시 수학을 일관성 있게 설명할 수 있었다는 것은 대단한 성공이며, 위에서 언급한 바와 같이 어떤 현상계를 몇 개의 간단한 명제로 설명할 수 있다는 점은 수학과 무관한 외부인이 볼 때에도 무척 매력적으로 보인다. 실제로 공리적 방법에 고무되어 기존학문의 공리적 재구성에 대한 시도는 여러 분야에서 나타났다. 고전 역학은 대략적으로 말하면 힘의 법칙, 작용-반작용의 법칙, 관성의 법칙으로 설명할 수 있다. 따라서 앞의 3가지 법칙이 고전역학의 공리가 된다.[9] Hilbert와 제자 H. Weyl은 양자역학을 공리계로써 재구성하려고 하였다.[10] Spinoza의 저서 윤리학(Ethica)도 정의, 공리, 정리를

6) J. D. Monk, 65%의 수학자는 플라톤주의자이고 30%는 형식주의이며 나머지는 구성주의자라고한다. Davis & Hersh(1981)에서 재인용. p.175.

7) Hilbert(1931), pp. 485-494.

8) Bewald(1996), p. 1107.

사용하여 유클리드의 원론과 같은 체제를 갖추고 있다.11)

그러면 유클리드이 원론이 서구문화에 미친 강력한 힘은 어디로부터 나온 것인가? 그 문음에 대한 답은 공리계의 요소로부터 나오는데 결론적으로 말하면 공리계의 구성요소는 진선미에 대응한다는 점이다. 진선미란 인식능력, 실천능력, 심미능력에 대응하는 초월적 대상이라고 할 수 있는데 이 개념은 이미 고대 그리스 시대부터 있었으나 이 세 개념이 공동으로 나타나는 것은 Kant의 영향일 것이라고 보고 있다. 인간은 이러한 진선미를 갖추고 있을 때 완전함에 이르는 것이라고 본다면 수학은 모든 학문 중에서 가장 완전하고 최고의 것으로 간주해왔으므로 수학의 내부에도 진선미가 포함되어 있어야 한다. 수학이 교양12) 과목으로 최고의 지위가 된 것은 플라톤에 의하며, 플라톤 이후 그 전통은 변함없이 지속되어 오고 있는데 이것은 수학 내부에 진선미가 포함되어 있다는 것을 함축하고 있다. 그런데 공리계란 수학의 법칙을 검사하는 잣대라고 할 수 있기 때문에 공리계도 스스로 진선미를 인식할 수 있는 능력을 가져야 된다. 공리계에의 구성요소는 이러한 의도의 의식화가 역사를 통하여 구체화 되었다고 본다.

그러면 공리계의 구성요소로 정착된 무모순성, 완전성, 독립성은 진선미의 어느 개념에 대응될까? 무모순성은 진에 대응하고 있다는 것은 논의의 여지가 없다. 선은 실천능력이라고 했는데 실천능력은 먼저 자신이 관련된 모든 것에 대한 실천을 요구한다. 이것을 공리계에 대응하게 되면 공리계의 완전성이란 그 공리계가 형성하는 수학적 체계의 모든 명제들이 증명 또는 반증되어야 함을 말한다. 마지막으로 어떤 수학적 체계를 구성하는 공리계가 있을 때 그 공리계의 공리들은 개수가 적을수록 아름답게 보인다. 즉 공리계의 독립성은 절제의 아름다움을 추구하고 있다고 본다. Hilbert는 형식주의적 수학에게 이러한 최고의 덕목을 가질 것을 기대했지만 괴델에 의하여 그러한 덕목을 근본적으로 가질 수 없다는 것이 밝혀졌다,

수학에서는 현재 형식주의가 퇴조하고 있지만 자연과학에서는 아직도 형식주의적 입장이

9) 고전역학을 설명할 수 없는 현상이 발생하자 고전물리학을 신봉하는 학자들은 기존의 공리계에 새로운 공리계를 추가하여 그러한 현상을 설명하려고 노력하였다.

10) 이러한 시도는 아직 성공하지 못하고 있다.

11) 그의 신론에 있는 내용의 일부를 보면 다음과 같이 전개하고 있다. 정의 1. 나는 자기원인이란 그것의 본질이 존재를 포함하는 것, 또는 그것의 본성이 존재한다고 생각할 수밖에 없는 것이라고 생각한다. 2. …. 3. 나는 실체란 자신 안에 있으며 자신에 의하여 생각되는 것이라고 이해한다. 즉 그것의 개념을 형성하기 위하여 다른 것의 개념을 필요로 하지 않는 것이다. …. 공리. 1. 존재하는 모든 것은 그 자신 안에 존재하거나 아니면 다른 것 안에 존재한다. 2. 다른 것에 의하여 파악될 수 없는 것은 그 자신에 의하여 파악되지 않으면 안된다. 3. …. 정리. 1. 실체는 본성상 자신의 변용에 앞선다. 2. 서로 다른 속성을 소유하는 두 실체는 서로 간에 공통되는 어떤 것도 갖지 않는다. 3. 서로 아무런 공통점이 없는 사물들은 그것들 중 하나가 다른 것의 원인이 될 수 없다. …

12) 여기서 교양과목이라는 것은 현재의 대학이 교양과목을 의미하자는 않는다. 교양을 인간성에로의 고차적 형성으로 규정한 Herder의 의미를 따른다. 상세한 것은 Gadamer(1960, 한국어판 2000, p. 42)을 참조하라.

존속되고 있다고 주장하는 과학철학자들이 있다. 여기서 자연과학에서 말하는 형식주의자는 수학에서 말하는 형식주의자는 아니며 위에서 언급한 플라톤주의적 형식주의자로 간주된다. 대표적 인물로서는 Popper와 Lakatos이다. 여기서 논의할 주제는 Lakatos의 이론이 보다 적절하므로 주로 Lakatos의 이론을 언급하겠다.[13] Lakatos는 연구 프로그램이라는 개념을 도입하여 과학사의 논리를 다음과 같이 묘사하고 있다. 일군의 과학자들은 그들의 이론의 핵심이 되는 가설을 설정하는데 Lakatos는 그것을 이론적 중핵(theoretical hard core)이라고 하였다. 그들은 과학적 현상을 이론적 중핵을 이용하여 설명한다. 만약 이것으로 설명할 수 없는 어떤 변칙적인 사례를 만나게 되는 경우에는 그들이 가지고 있던 이론적 중핵을 폐기하는 것이 아니라 새로운 가설을 원래의 이론적 중핵에 첨가하여 설명을 시도한다. 연구 프로그램과 형식주의는 정확하게 일치하는 개념은 아니지만 이론적 중핵과 공리계는 각각의 경우에서 동일한 역할을 하고 있다. Lakatos가 수학을 준경험주의(pseudo-empiricism)라고 하는 것과 같은 맥락에서 자연과학을 준형식주의(pseudo-formalism)라고 할 수 있겠다.

Lakatos의 연구 프로그램 이론은 다음과 같은 의미에서 괴델의 불완전성 이론과 유사성을 가진다. 괴델의 불완전성정리는 산술공리계를 포함한 어떤 무모순인 공리계도 불완전하다는 것을 보였다. 여기서 불완전하다는 것은 주어진 공리들로 증명할 수 없는 명제가 존재한다는 것을 의미한다. 그런데 그 명제가 주어진 공리들에 의하여 증명될 수 없다면 그 명제를 증명할 수 있는 새로운 공리를 원래의 공리계에 추가하면 될 것이다. 원래의 공리계와 독립인 공리를 추가하면 원래의 공리계를 포함하는 더 큰 공리계가 형성되는데 그렇지만 이 경우에도 괴델의 불완전성 정리에 의하여 이 새로운 공리계로 증명할 수 없는 새로운 명제가 존재하게 된다. 여기서 Lakatos의 연구프로그램 이론에서 말하는 이론적 중핵은 기존의 공리에 해당되고 기존의 공리계로써 증명할 수 없는 명제를 증명하기위하여 새롭게 첨가된 공리는 연구프로그램 이론에서 말하는 보조가설에 해당한다.

공리를 수학과 과학의 관점에서 본다면 다르게 볼 수도 있다. 먼저 수학과 과학에서 법칙이 의미하는 차이를 보자. 만유인력의 법칙과 피타고라스 정리는 각각 물리학과 수학에서의 법칙이다. 그런데 이 두 법칙이 참이라는 것을 어떻게 보증하는가? 만유인력의 법칙이 참이라는 것은 관련된 물리적 대상과의 정합성으로 확인된다. 그런데 이러한 검증형식은 유한적일 수밖에 없기 때문에 물리학적 법칙이란 시간 의존적이며 따라서 잠정적 참이다. 그러면 피타고라스의 정리가 참이라는 것도 만유인력의 법칙의 경우와 같이 경험적인 방법으로 결정되는 것일까? 만약 그렇다면 피타고라스의 정리의 참을 확인하기위한 실제적인 작업은 직각삼각형을 그려서 그 정리를 확인하는 절차로 이루어질 것이다. 그러나 만약 이렇게 검사하여 통과한 명제를 참이라고 용인한다면 수학에 대한 문외한이라고 간주할 것이다. 여기서 수학과 물리학의 근본적인 차이가 있다. 수학적 법칙은 결론으로서의 참이며 물리학적 법칙의 참은 가정으로서의 참이다. 즉 수학적 법칙이 정당화되기 위해서는 가정이 필요하나

13) 오류주의 또는 비판적 합리주의는 Popper에 의하여 제시되었다고 본다. Popper(1963)는 추측과 논박에서 비판적 합리주의의 개념을 피력하고 있다. p.63. Lakatos는 수학적 발견의 논리에서 오류에 의한 수학의 진보를 수학사의 논리로 제시하고 있다.

물리학에서는 가정을 필요로 하지 않는다.

참고 문헌

1. 스피노자/강영계 역, **윤리학**, 서광사, 1990.
2. Bewald, W., *From Kant to Hibert: A Source Book in the Foundation of Mathematics, II.* Clarendon Press. Oxford, 1996.
3. Davis, P.J. · Hersh, R., *The Mathematical Experience*, Birkhäuser Boston, 1981. 양영오, 허민 역, **수학적 경험**(하), 경문사, 1995.
4. Gadamer, Hans-Georg, *Wahrheit und Methode*, 1960. 이길우 · 이선권 · 임호일 · 한동원 옮김, **진리와 방법** I, 문학동네, 2000.
5. Hilbert, "Die Grundlegung der elemetaren Zahlentheorie," *Mathematische Annalen* 104, 1930.
6. Penrose, R., *The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds, and Law of Physics*, Oxfords University Press, 1989. 박승수 역, **황제의 새마음**, 이화여자대학교 출판부, 1996.
7. Popper, K., *Conjectures and Refutations.* 1963. 이한구 역, **추측과 논박**, 민음사, 2002.