KJHM Vol. 17, No. 1, 2004, 87-96

수학교육에서 수학사적 고찰을 통한 기하학적 · 대수학적 두 접근 방법의 의의*

단국대학교 수학교육과 **고상숙**

Abstract

This article dealt with two approaches, algebraic and geometric approaches in terms of Pythagoreans theorem. As mathematics evolves, many theorems had been developed beginning with geometric approaches. However, the algebraic techniques that survive these days are so powerful and generalized in school curriculum. So, if students have more chances to see mathematical properties in geometrical ways, they can experience how beautiful and meaningful they are through the process of the advent of them. Also, it was to try to develop an insight into their applications to other problems.

0. 서론

학교에서 수학을 배우는 궁극적인 목표 중 하나가 수학의 가치를 알도록 하는 것이며[2], 수학이 위대한 문화적 유산일 뿐만 아니라 인간의 지적 업적임을 알게 하는 것이다[9]. 그러나 오늘날 수학교육이 적극적으로 이러한 관점에서 접근하고 있다고 보기는 어렵다. 사실, 수학의 논리성과 연역적 특징으로 인하여, 또 다른 학문의 기초 지식으로서 수학은 다른 어떤 과목보다 핵심적인 과목으로 인식되는 것은 사실이나 이 논리성과 연역적 특징은 학생들이 도달하기엔 꽤 많은 시간과 노력이 필요하다. 수학사를 학교수학에 도입하고자 하는 것은 이러한 논리정연성을 무시하고자 함이 아니라, 수학사를 통해, 수학적 지식이 처음에는 가정하고 추측하며 발견적 사고로 접근해 나아가야 하며 점차 논리적이고 연역적인 추론으로 발달해 가는 과정을 학생이 이루어 갈 수 있도록 돕기 위함이다. 수학사를 되돌아보면 어떠한 개념을 받아들이거나 받아들이지 않는 것은 전적으로 수학자들의 판단에 달려 있었다. 이러한 판단이 때로는 비논리적이 되거나 추상적이 될 수도 있었다. 예를 들어 피타고라스 학파가 무리수의 존재를 부

* 이 논문은 2003학년도 단국대학교 교내연구비에 의하여 지원받았음.

인했던 것이나 크로네커(Kronecker)가 실수의 무한성을 받아들이지 않은 것 또는 코시(Cauchy)가 복소수의 존재를 무시한 것은 비논리적이고 비합리적인 수학발전사의 일면을 보여주고 있다. 사실, 1800년대 초까지 수학이 논리적으로 완벽했다고는 볼 수 없었다[8].

다시 말해, 수학사적 문제를 가지고 학생들의 수학적 사고를 논하는 것은 분명, 수학자들이 문제를 풀어내고 개념을 확립해 나아가는 데 있어 고전 분투한 일면을 제시 하고자 하는 의도가 들어있다. 학생들은 자신이 다루는 문제들이 무에서 저절로 창조된 것이 아니며 더욱 중요한 것은 수학자들도 자신이 겪는 어려움과 실수를 역시 겪었다는 것을 알게 될 것이다. 이런 것을 학생들이 느끼게끔 하는 것은 인지적 측면이나 정의적 측면에 모두 중요한 것이다. 즉, 오늘날 고등학교 수준에서 다루고 있는 모든 수학들이 수천 년에 걸쳐 인간들의 노력의 산물로 만들어 진 것으로써 자칫 이러한 인간 역사적인 수학의 측면을 우리는 무시하고 수식화된 수학을 단지 자동화시켜서 하고 있는지도 모른다. 이런 측면들을 학생들에게 제시해 주어 그 역사적 · 인간적 의미를 느낄 수 있도록 해야 한다. 그렇지 않으면 학생들에게 수학에 대한 진정한 이해와 애정은 가르칠 수 없으리라 본다[10].

이런 측면에서 수학사적 접근을 통한 교수방법의 개발을 위해 피타고라스의 정리를 중심으로 기하학적, 대수학적 의미를 고찰해보고 다른 수학적 내용으로의 활용방법을 모색하고자 한다.

1. 피타고라스 정리의 공리적 측면

면적과 그 활용은 피타고라스 학파가 그 기원이라 여겨진다[5]. 피타고라스 정리를 기하의 발달의 원점으로 간주하고, 짧게 말해, 이에 공리적 위치를 줄 수 없는 것인가? 여기에 대한 이유에 대해 원론적으로 두 가지 길이의 변을 지닌 두 정사각형을 사용하여 증명을 요약하고자 한다. 현대 용어로는 만약 삼각형 ABC가 c를 빗변으로 하고 a와 b를 다른 두 변으로 하는 직각 삼각형이라면, 이때 $a^2+b^2=c^2$이다. 여기에는 한 가지 방법(A)은 난해한 다이아 그램에 쉬운 증명, 다른 방법은(B) 수학에서 자주 사용되는 쉬운 다이어그램에 난해한 증명이 있다.

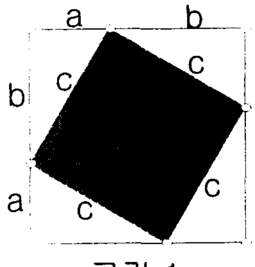

그림 1

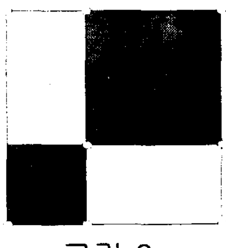

그림 2

첫 번째 방법(A)은 주어진 직각삼각형에 그림 1과 2에서처럼 한 변을 a +b로 하는 두 개의 정사각형을 그리면 이 두 개의 정사각형 안에는 4 개의 같은 직각 삼각형과 다양한 정사각형을 볼 수 있다. 그래서 두 개의 정사각형의 면적으로부터 다음을 얻는다.

$$a^2+b^2+4\triangle = c^2+4\triangle$$

그래서 쉽게 $a^2+b^2=c^2$이 성립함을 알 수 있다.

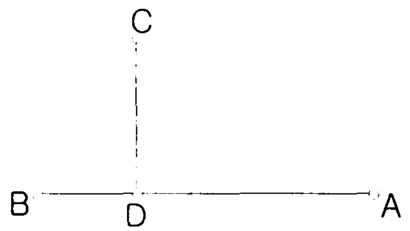

그림 3

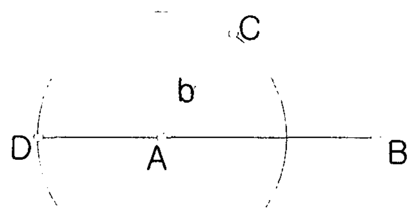

그림 4

두 번째 방법(B)에선 그림 3[1]과 그림 4[2]가 이에 속하는데 그림 3에서처럼 직각삼각형, ABC에서 선분 AD가 밑변 BC에 수직일 때 세 삼각형, DBA, DAC, ABC는 서로 닮았으므로 닮음비는 $a:b:c$이며 그들의 면적의 비는 $a^2:b^2:c^2$임을 알 수 있다. 그래서 면적($\triangle$DBA)+면적($\triangle$DAC)=면적($\triangle$ABC)이므로 자연히 결과는 $a^2+b^2=c^2$ 이다.

그림 4에선 다음이 성립한다.

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CB}}=\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BE}},$$
$$\mathrm{BD}\times\mathrm{BE}=\mathrm{CB}^2,$$
$$(c+b)(c-b)=a^2$$

그러므로 $a^2+b^2=c^2$ 이다.

유클리드는 거리의 개념을 정의하지 않고 대신 같은 길이를 의미하는 동일한 선(lines), 즉, 선분을 사용하였다. 그는 이 선분이란 여러 가지 중에서 특별한 경우에 해당한다는 사실

---

1) 기원전 300년경에 유클리드(Euclid)에 의해 쓰인 **원론**(Elements) II-14에서 제곱근의 값을 구하기 위해 사용된 도형이다. 유클리드는 그의 모든 수학적 추론을 기하학적 방법으로 설명하려했다. 이것은 탈레스(Thales, 기원전 625-547)에 의해 시작한 그리스 기초 수학의 산물이기도 하다.

2) 17세기경 **기하학**(La Geometrie)의 첫 번 째 책에서 데카르트(Descartes, 1596-1650)가 제곱근을 구하기 위해 사용한 기하학적인 방법이다. 데카르트와 관계되었음에도 이 도형은 좌표평면을 사용하지 않음이 흥미롭다.

에 주의하지 않은 듯하다.

여기서 우리는 데카르트 기하의 형태, 즉, 축을 따라 두 가지 방향을 지닌 좌표 상에서 측정의 축도를 이용하려한다. 피타고라스 성질은 어떤 방향에서도 거리를 측정할 수 있는 방법을 제공한다. 특히 원점 (0, 0)으로부터 좌표 (a, b)까지의 거리는 $a^2+b^2=c^2$에 의해 c가 된다. 즉, $\sqrt{a^2+b^2}$이다. 여기에 약간의 복잡성을 더해 유추해본다면 그림 4에서 (a_1, b_1)부터 (a_2, b_2)까지의 거리에 대해 다음 식 1.1을 얻을 수 있다.

$$\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2} \tag{1.1}$$

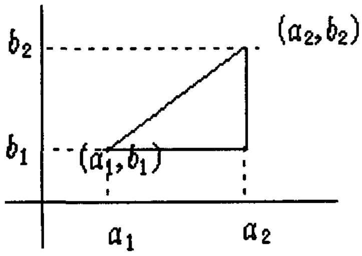

그림 5. (a_1, b_1)부터 (a_2, b_2)까지의 거리

우리가 이 그림을 머리에 기억하고, 점 (a_1, b_1)부터 (a_2, b_2)까지의 거리를 (1.1)의 식에 의해 나타난 크기라 정의하자. 그러면 우리의 기하학적 구조에 놓여있기 때문에 피타고라스 정리에 대한 증명을 더 이상 계속할 필요가 없게 된다. 이상 피타고라스 정리가 지니는 공리적 성격도 기하학적인 대수에 의해 어렵지 않게 설명할 수 있음을 알 수 있다. 더 나아가 이를 통해 $p(x)=0$을 다루기 이전 시대의 과거 유클리드 수학자들이 했던 것처럼 학생들은 이차방정식 ($p(x)=$상수, 또는 $p(x)=$일차식)의 다양한 형태를 해결할 수 있다. 단, 여기서 기하학적 대수는 성격상 계수와 근이 양수이므로 b와 c가 양수인 다음 5가지 경우를 생각할 수 있다.

(1) $x^2=bx$
(2) $x^2=c$
(3) $x^2=bx+c$
(4) $x^2+c=bx$
(5) $x^2+bx=c$

2. 기하학적과 대수학적 접근의 유용성

앞 절에서 다루었듯이 수학사적 발자취를 더듬어 가면 기하학적 대수 접근방법에 의해 피타고라스 정리적 성질이 공리적 성질로 이해될 수 있을 만큼 그 방법의 유용성은 효과적이다.

2차 평면은 $R^2=\{(a,\ b)|\ a,\ b\in R\}$, 단 R를 실수 전체의 집합으로 정의할 수 있다. 그래서 모든 점은 좌표 $(a,\ b)$로 나타내고, 실수의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는 이 점들에 대응된다. 만약 우리가 일차원의 기하부터 시작한다면 연구의 대상을 선 R^1로 정의한다. 즉, 전형적인 점은 $a\in R$ 이고, 이때 두 점 a_1과 a_2 사이의 거리는 $|a_1-a_2|$이다. 이것을 식 (1.1)을 참고하여 같은 형식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\sqrt{(a_1-a_2)^2} \tag{1.2}$$

물론 부호 없는 제곱근 (1.2)는 항상 양수를 나타낸다.

이제 $R^3=\{(a,\ b,\ c)\ |\ a,\ b,\ c\in R\}$의 3차원 기하로 확장하여보자. 세 점으로 구성된 좌표에서 거리 $(a_1,\ b_1,\ c_1)$로부터 $(a_2,\ b_2,\ c_2)$까지의 거리는 다음과 같다.

$$\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2} \tag{1.3}$$

이 분명한 패턴을 이용하여 우리가 4차원에 대한 탐험도 해보고자 한다면 그것이 무엇이든 지간에 4번째 좌표 점을 더하고 식 (1.1), (1.2), (1.3)을 확장하여 대수학적으로 할 수 있다.

좌표 평면상의 기하학적 접근 방법과 대수적 방법사이의 장점은 대다수의 어려운 점이 대수로 해결될 수 있다는 점을 들 수 있지만, 실수(R)에 대하여 우리가 학교 수학에서 필요한 대부분을 기하학적으로 표현할 줄 안다고 가정하며 많은 이런 어려움은 사라진다. 기하학적인 접근에서 가장 위험한 것은 우리가 기하문제를 다이아 그램을 거의 사용하지 않는 대수학적 방정식으로 바꾸는데 마냥 만족하여서, 우리의 눈을 사용하는 법을 배우지 않거나, 기하학적으로 생각해보지 않는다는 점이다. 가능한 대수에서 떠나서 이 두 세계의 장점을 이용하려해야 할 것이다. 더욱 전략적인 방법으로는 따분한 대수학적 계산은 연습문제에 맡기거나 "…을 보인다는 것은 쉽다", 또는 "자세한 것은 독자에게 맡긴다"와 같은 융통성 있는 어구를 사용함으로써 독자의 참여를 유도해봄직하다.

예제 1) 다음은 Baker[6]가 하얀색 삼각형의 변의 길이로 구획하여 카드보드의 면적을 나타

내었다. 아래 그림의 빗금 친 부분의 면적은 합동인 정사각형에서 합동인 4개의 직각 삼각형을 제외한 부분이므로 모두 동일함을 쉽게 알 수 있다. 관찰할 수 있는 정사각형의 종류에는 $(a+b)^2$은 모든 아래 그림의 전체 사각형에 나타나있고, c^2은 그림 6에, $(a-b)^2$은 그림 6-2에, a^2, b^2은 그림 6-1과 a^2은 그림 6-3의 오른쪽 밑에 나타난다. 직각삼각형의 이동에 의한 기하학적 다이아 그램이 대수학적 조작을 잘 보완하며 피타고라스 정리의 공리적 측면을 잘 설명하고 있다. 특히 그림 6-3에선 a^2과 b^2(단, $a \le b$) 사이의 관계를 알 수 있다. 즉, b^2이 a^2보다는 두 개의 직사각형만큼 크다는 것을 보여주고 있다(왜냐하면 $b^2 = a^2 + a(a+b-2a) + b(a+b-2a)$이기 때문이다).

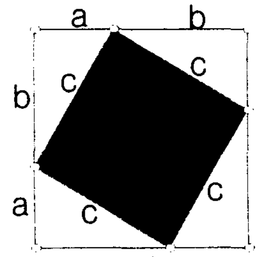

그림 6

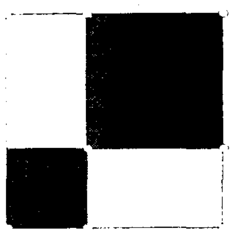

그림 6-1

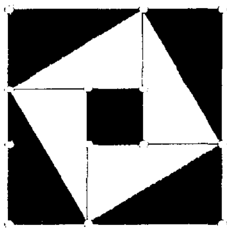

그림 6-2

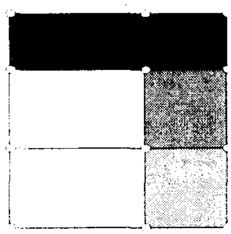

그림 6-3

빗금 친 부분은 $a^2 + b^2$: $2ab + (a-b)^2$: $2a^2 + (a+b)(a+b-2a)$

$= 2a^2 + (a+b)(b-a)$

예제 2) 임의의 정사각형의 각 꼭지점에서부터 시계반대방향으로 마주보는 변의 길이의 x 배의 점을 연결하면 가운데 또 다른 정사각형이 나타난다. 처음 주어진 정사각형이 면적에 대한 새로운 정사각형의 면적의 비율을 y로 나타내시오.

① 대수적 풀이

대수적으로는 큰 사각형의 변의 길이를 1이라 하고 대변에 점의 길이를 x라 하면 정사각형의 내부를 가로지르는 선분의 길이는 다음과 같다.

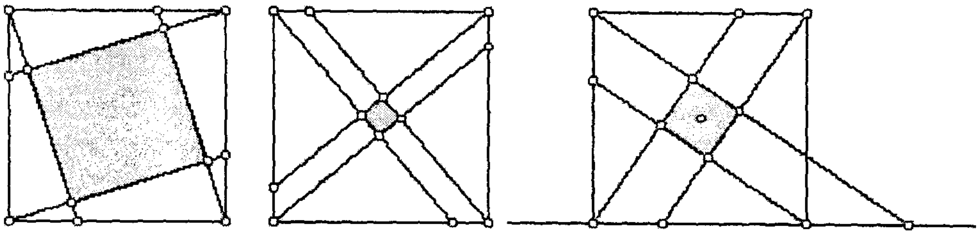

그림 7

$$\sqrt{1+x^2} \tag{1}$$

각 직각삼각형의 분할되는 점은 닮음비 a가 적용되어 가운데 정사각형의 한 변의 길이는 다음과 같다.

$$\sqrt{1+x^2}-ax-a \tag{2}$$

그러나 각 직각 삼각형안에 소형의 합동인 직각삼각형이 있어 값 a를 구하면 다음과 같다.

$$\sqrt{a^2+a^2x^2}=x$$

이를 간단히 하면 다음과 같다.

$$a=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \tag{3}$$

이제 빗금친 정사각형의 한 변을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}} \tag{4}$$

x에 대한 y의 일반식을 나타내면 다음을 얻는다.

$$y=\frac{(1-x)^2}{1+x^2} \tag{5}$$

② 기하학적 풀이

이는 여러 경우(x값이 따른)에 공통적으로 나타난 패턴을 찾고 이에 대한 일반화된 식을 찾는 것으로써 그리 어렵지 않게 찾을 수 있다. 물론 이와 다른 방법도 가능하다.

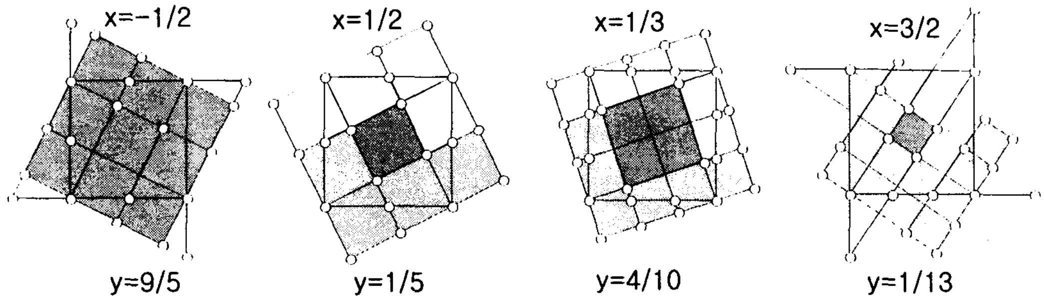

그림 8

그림 8은 각 경우에서 빗금친 도형의 크기의 비를 구하고자 할 때 패턴이 공통적으로 존재하는 것을 나타내고 있다. 여기에 x값이 1과 -1일 때를 더하면 그 비는 여전히 $\frac{(1-x)^2}{1+x^2}$이며, x값이 음수일 때는 새로운 정사각형이 주어진 정사각형을 덮으므로 그 비의 값이 1보다 크다는 것도 알 수 있다. 그리고 이를 컴퓨터의 애니메이션을 이용하면 작도를 통해 x값에 대한 연속적인 y의 값의 위치를 그려낼 수 있어 그래프에 의해 자신의 답을 다음과 같이 확인해볼 수 있다.

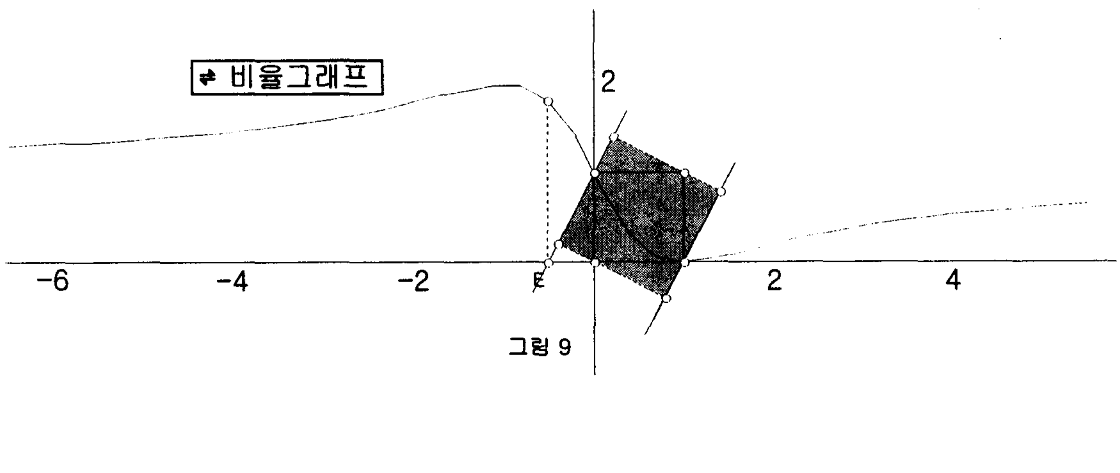

그림 9

3. 결론

Allaire & Bradley[5]는 "수학의 발달함에 따라 나타난 기술(techniques)은 가장 큰 위력과 보편성을 지니게 되었다. 기호적 대수학적 조작(manipulation)을 가르치는 이유는 능률적인 측면 외엔 아무런 이유가 없으며, 해결할 문제의 역사적 발달과는 상관이 없다"(p. 308)고 말하며 이차방정식에 대한 기하학적 접근방법의 중요성을 강조하였다. 이슬람 수학자들은 왜 대수학적 방법이 의미가 있는지 보이기 위해 기하학적 다이아 그램을 사용하였다[5]. 이렇듯 서로 보완 관계를 가지는 대수학적, 기하학적 접근 해결방법임에도 불구하고 전통적으로 대수학적 접근방법 위주로 구성되어 있는 우리나라 교과서는 제 7차 교육과정에서 약간의 개선은 이루어졌으나 앞으로의 교육과정 개정에서 더욱 고려되어야할 부분이다. 과열 경쟁으로 치닫고 있는 대학 입시대비로 인해 교육학적 발달과정을 무시한 선행학습, 속진학습이 성행하고 있는 교육 상황 속에 교사, 학생들마저도 기하학적인 접근방법은 시간만 소요하는 귀찮은 방법으로 인식하고 있다. 사실 기하학적 접근방법을 시도함으로써 학생의 이해도를 높이기 위해 자신의 수업방법을 개선해보려는 교사들이 공통적으로 토로하는 어려움은 학생들이 왜 이런 귀찮은 것을 하게 하느냐고 반문하며 잘 따라주지 않는다는 것이다. 자세히 이 학생들을 연구해보면 기하학적 아이디어를 거의 생산해내지 못하고 자신이 안다고 착각하고 있는 경우가 더 많다. 이런 현상이 수학 영재학생에게 더욱 두드러진다는 것은 주목할 필요가 있다[7]. 그 이유 중의 예측할 수 있는 하나는 대수학적 증명은 일반적으로 연역적인 증명으로 귀결되는 반면에, 기하학적인 증명은 차원의 수가 늘어갈수록 모두 다 표현하기가 어려운 제약과 특정한 케이스만을 다루기 쉬워 귀납적인 증명으로 귀결되기 쉬운 점을 들 수 있다. 이는 수학자들이 귀납법의 불완전함을 이유로 대수학적인 방법을 강조하는 이유이기도 하다(cf. [4]). 이러한 점은 수학자들이 학생의 사고과정을 바라보는 관점에서 수학교육자와 많은 차이가 나는 대표적인 부분이다. 수학교육자는 학생의 사고는 역동적으로 위계성을 따라 발달하며 각 단계를 충실히 경험한 학생이 즉, 기하학적 방법에서 불완전함을 경험한 학생이 연역적 대수학적 방법의 필요성과 타당성을 더욱 깊게 인식하여 사고의 내면화를 꾀할 수 있다고 보는 것이다.

또한, 고상숙[1]의 연구에서도 학생의 창의적 사고 발달을 위해선 귀납적 사고과정의 경험이 직접적인 영향을 끼친다고 주장한 점은 기하학적 증명의 도입의 필요성을 나타낸다. 마찬가지로 우정호[3]도 개연적(귀납적) 추론은 개인적인 배경에 의존하는 잠정적인 결론을 제시할 뿐이지만 지식의 창조와 개발은 이를 통해 이루어진다고 하였다. 이렇듯 사고의 전 과정이 의미있게 중요하므로 사고의 중간단계를 생략한 채, 단숨에 뛰어넘을 수는 없다. 그것은 사상누각의 집을 짓는 꼴이기 때문이다. 단계별 과정을 충실히 이행한 학생들의 사고가 고등 사고과정에서 더욱 유창성과 융통성, 정교성 나아가 독창성을 발휘한다. 수학교육에서 교사는 이들 두 가지 접근의 중요성을 인식하고 수학을 어느 한 가지 접근으로 만을 강조하여 학생의 창의성을 저해하지 말아야 할 것이다.

참고 문헌

1. 고상숙, "수학적 탐구력 신장을 위한 테크놀로지의 활용의 효과," **수학교육**(한국수학교육학회 논문집 시리즈 A) 42(2003), 647-672.
2. 교육부, **수학과 교육 과정**, 제7차 교육 과정 교육부 고시 제1997-15호 [별책 8]. 서울: 대한 교과서 주식회사, 1997.
3. 우정호, **학교수학의 교육적 기초**, 서울대학교 출판부, 2000.
4. 유윤재, "역사 발생적 원리의 비판적 수용에 대하여," **한국수학사학회지** 15(2002), 109-114.
5. Allaire, P.R., Bradley, R.E., "Geometric approaches to quadratic equations from other times and places," *Mathematics Teacher* 94(2001), 308-313.
6. Baker, R., "Theorem in three moves," *Mathematics in School* 26(1997), 224-225.
7. Clements, M.A., "Terence Tao," *Educational Studies in Mathematics* 15(1984), 213-238.
8. Kline, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, NY: Oxford University Press, 1972.
9. National Council of Teachers of Mathematics, *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The Author, 2000.
10. Tymoczko, T., "Humanistic and utilarian aspect of mathematics," in Alvin, M.(ed.), *Essays in Humanistic Mathematics*, Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1993.