KJHM Vol. 17, No. 1, 2004, 43-52

변분법과 최대 · 최소 : 역사적 고찰

서경대학교 수리정보통계학부 **한찬욱**

Abstract

In this paper we investigate the origin of the variational calculus with respect to the extremal principle. We also study the role the extremal principle has played in the development of the calculus of variations. We deal with Dido's isoperimetric problem, Maupertius's least action principle, brachistochrone problem, geodesics, Johann Bernoulli's principle of virtual work, Plateau's minimal surface and Dirichlet principle.

0. 서론

최대 · 최소 문제는 우리가 일상적으로 부딪히는 문제이다. 이러한 극 원리(extremal principle)는 사실상 변분법이라는 학문의 발전에 결정적 역할을 담당해 왔다. 고대 카르타고 건설에 관한 디도(Dido)의 등주 문제라든가 헤론(Heron)과 빛의 반사 원리 등에서 최대 · 최소 원리가 등장하고, 근대에 들어와서 뉴턴(Newton)과 라이프니츠(Leibniz)에 의한 미적분의 발견 후에 유럽 대륙에서는 모페르튀이(Maupertius)의 최소 작용 원리(least action principle)로부터 시작하여 요한 베르누이(Johann Bernoulli)와 야곱 베르누이(Jacob Bernoulli) 형제의 자존심 대결에서 비롯된 최속 강하선(brachistochrone) 문제, 회전면 위에서의 측지선 문제, 평형 문제 등은 변분법을 탄생시키고 발전시키는 데 중대한 기여를 하였다. 비누 방울 놀이에서 비롯되는 최소면 문제는 현재도 난문제이고 변분법의 발전을 촉진시키는 중요한 문제이다. 전기 분포 문제에서 비롯된 디리클리(Dirichlet) 문제는 편미분 방정식 이론의 발전에 많은 영향을 끼쳤을 뿐만 아니라 변분법에서 직접법을 탄생하게 만든 계기를 마련해 주었다. 이 논문에서 우리는 이러한 문제들이 탄생하게 된 역사적 배경과 그 후의 발전 과정과 그의 해법의 발견과 진화를 다루었다.

1. 디도의 등주 문제

디도(Dido)는 티레(Tyre)라는 도시(현재는 레바논의 일부)의 페니키아 공주였다. 그녀의 오빠 피그말리온(Pygmalion)이 그녀의 재산을 탈취하려고 그녀의 남편을 살해하자, 디도는 배를 타고 도망갔다. 나중에 카르타고로 알려진 아프리카의 한 지역에 도착하게 되었는데 이때는 기원전 900년 즈음이었다. 그녀와 그녀의 백성들이 정착할 새로운 땅을 그 지역의 배자인 눔비아(Numbia)의 왕 야르바스(Jarbas)에게 했는데, 디도가 검소했는지 또는 야르바스가 그의 영토에 다른 거주자를 받아들이는 것을 탐탁하지 않게 여겼는지는 몰라도 아무튼 여왕은 황소 한 마리의 가죽으로 둘러쌀 수 있는 양만큼의 땅을 가지는 조건으로 거래를 맺었다. 디도는 "둘러싼다(enclose)"라는 말을 최대한 넓게 해석했다. 황소의 가죽을 얇게 잘라서 연결한 후에 아주 긴 줄로 만들었다. 그 후에 그 줄을 가지고 최대한의 면적을 둘러싸도록 그 줄을 땅 위에 펼쳐 놓았다. 즉, 디도는 다음과 같이 수학적으로 기술될 수 있는 문제를 해결해야 되는 입장에 있었다.

> 주어진 길이를 갖는 모든 가능한 닫힌 곡선 중에서 그 내부 면적이 최대가 되는 곡선은 무엇인가?

디도는 가죽끈으로 원을 만들어 이를 해결했는데, 실제로도 이게 변분법에서의 해이다. 20세기에 들어 와서야 후르비츠(Huriwitz)에 의해 엄밀하게 증명되었다. 그리스인들은 이 문제에 대해 잘 알고 있었고 이를 "등주(isoperimetric) 문제"(isos=같다, perimetron=둘레)라고 불렀다. 구속 조건(constraint 또는 subsidiary conditions) 하에서의 최대·최소 문제로서 그 적분 작용소(functional)의 오일러·라그랑주(Euler-Lagrange) 방정식은 고유치 미분방정식이 나오게 된다. 라그랑주의 승수법이 등주 문제에서도 똑같이 적용될 수 있다는 것을 라그랑주가 보이기는 했어도 엄밀한 증명은 아니었다.

2. 헤론과 빛의 반사 원리

피타고라스 이래로 그리스인들은 빛에 대한 연구를 했었다. 기원전 490년경에 아그리겐툼(Agrigentum, 현재의 시칠리아의 일부)의 엠페도클레스(Empedocles)는 빛이 유한한 속도로 공간을 통과한다고 주장하였다. 그런데 이 놀라운 통찰은 1676년에 덴마크의 천문학자이며 수학자인 로머(Ole Romer, 1644-1710)에 의하여 증명되었다. 실로 긴 기간이었다. 그리스 시대에 빛에 대하여 알려진 사실의 대부분은 유클리드(Euclid, 기원전 330-270)의 저작에 실려 있다. 그는 알렉산드리아(Alexandria)라는 도시에 거주했는데. 이 도시는 알렉산더(Alexander) 대왕에 의해 나일강 하구에 세워진 도시이다. 프톨레마이오스(Ptolemeie) 왕조

하에서 알렉산더는 세계의 학문 중심지가 되었고 이는 약 500년 동안이나 지속되었다. 기원전 338년에 아테네가 몰락한 이후에 알렉산드리아는 그리스 문화의 초점과 같은 역할을 수행하게 되었다.

기원전 285년경에 박물관(Museum, Museion, "Muses의 사원")이 세워졌는데, 이는 학자들이 일하고 연구할 수 있는 일종의 문화적 제도였다. 유클리드는 13권으로 된 **원론**(Elements)라는 책을 집필했는데, 대부분의 내용은 기하를 다루는 것이었다. 그러나 유클리드의 다른 저작들 **광학**(Optics)과 **경학**(Catoprica)이 지금까지 내려오고 있고, 17세기까지 **원론**이 수학에 기본이었던 것처럼 이 책들은 기하광학에 기본적이었다. 유클리드는 그의 **광학**에서 "빛은 공간에서 직선을 따라서 움직인다."라고 기술하였다. 경론(반사 광학)에서 그는 빛의 반사에 대한 근본적인 법칙을 이는 거울에 조여진 광선이 거울에서 반사되는 2가지 규칙에 대한 것이었다.

규칙 1. 광선의 입사평면은 반사 평면과 일치한다.

규칙 2. 광선의 입사각은 반사각과 같다.

유클리드 사후 약 400년이 흐른 뒤에 알렉산드리아의 과학자 헤론(Heron, 대략 서기 100)은 "빛은 가장 짧은 경로를 따른다."라는 극 원리에 의해 유도될 수 있다고 주장하였다. 평면거울의 같은 편에 있는 두 점 P와 Q가 있을 때 점 P에서 나와서 거울에 반사된 후에 Q에 도달하는 빛의 경로는 가능한 모든 그런 경로 중에서 가장 거리가 짧은 경로가 되어야 하므로 점 P의 거울에 대한 대칭점 P'과 Q를 잇는 직선이 가장 짧은 경로가 되고 이는 자동적으로 반사 규칙을 만족하게 됨을 쉽게 알 수 있다. 자연에 대해 극 원리, 즉 최대 · 최소 원리를 최초로 성공적으로 적용한 예가 될 것이다.

3. 모페르튀이의 최소 작용 원리

모페르튀이(Maupertius)의 "형이상학적 원리"란 자연은 가능한 최대로 경제적으로 작용한다는 가정이다. 예를 들어 균질한 매질에서 빛은 가능한 모든 경로 중에 가장 짧은 경로를 택한다고 주장하는 것이다. 이러한 가정을 함으로써 그는 다음과 같은 결론을 하나의 일반원리로 유도해 내었다.

만일 자연에 어떤 변화가 생기면 이 변화를 일으키기 위해 필요한 작용(action)의 양은 최대한 작다.

자연이 그렇게 절약하는 이 "작용"이라는 것이 도대체 무엇인가? 직관적으로 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$(\text{작용}) = (\text{질량}) \times (\text{거리}) \times (\text{속도})$$

더구나 라이프니츠(Leibniz)에 의하면 운동 에너지는 다음과 같은 공식으로 주어진다.

$$E = \frac{1}{2} mv^2$$

그러므로 작용은 (에너지)×(시간)과 동치가 된다. 모페르튀이는 작용에 대해 이 공식을 사용했는데 공교롭게도 라이프니츠가 이미 그것을 기술하였었다. 아마도 라이프니츠가 모페르튀이의 형이상학적 원리를 정식화한 최초의 사람일 것이다.

1740년에 프레데릭 2세가 프러시아의 왕이 되었는데 그는 베를린의 학술원을 부흥시키려고 볼테르(Voltaire)에게 학술원 원장자리를 제의하였지만 그가 거절함에 따라 그 자리를 모페르튀이에게 제의하였다. 그는 이를 수락하고 2년 후에 베를린으로 왔다.

한편, 오일러(Leonhard Euler, 1707-1783)는 1741년에 러시아의 페테르부르크에서 프러시아 학술원의 수학-물리 분야의 장을 맡기 위해 베를린으로 왔다. 오일러는 목사의 아들로서 13살에 자신의 고향 바젤의 대학에 입학했는데 당시에는 이것은 지금처럼 그렇게 희귀한 일은 아니었다. 그 당시의 학교 교육은 종교와 라틴어 등의 기본적인 교육으로 이루어져 있었다. 더구나 대학교에서의 가르침은 평범한 수준에 머물러 있었다. 젊은 오일러는 요한 베르누이(Johann Bernoulli)의 눈에 뜨여 매 주 토요일마다 그에게서 개인 교습을 받았다. 이 시대에 요한 베르누이는 유럽의 지도적 수학자이었음으로 오일러가 20살이 되었을 즘에는 학문의 조예가 깊었을 것이다. 바젤 대학의 물리 교수로 지원했으나 떨어지고, 새로 세워진 페테르부르크 학술원의 연구원 자리를 받아들였다. 1741년에 오일러가 베를린으로 떠날 때에는 그는 <Mechanica>를 비롯해서 100편 이상의 논문을 발표했었다. 그의 <Mechanica>는 해석적 방법과 무한소 미적분을 사용한 최초의 뉴턴 역학 책이었다. 이 책에서 오일러는 역학 분야에 혁명을 일으켰다.

1744년경에는 오일러는 최소 작용 원리가 행성의 태양 공전 같은 보존 장에서의 점 질량의 운동을 기술하는데 스일 수 있다는 것을 이미 엄밀하게 증명하고 있었다. 그리고 그는 우주의 모든 현상의 배후에는 최대 · 최소 규칙을 발견할 수 있다는 확신을 표명하였다. 이 결과는 그의 저서 《Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes》(최대 최소 성질을 갖는 곡선을 발견하는 방법)에 나타났는데 , 이 책은 변분법에 대한 최초의 교과서일 뿐만 아니라 수학사에서 가장 유명한 책 중 하나이다. 그가 1743년에 그의 책의 부록을 쓰고 있을 때, 그는 모페르튀이의 원리에 대해 들어본 바가 없음이

확실하다. 더구나 오일러가 다룬 문제들은 모페르튀이가 그의 1746년의 논문에서 다룬 문제들보다 훨씬 더 어려운 문제들이었다. 1746년에 모페르튀이가 최소 작용 원리에 대한 그의 논문을 출간하고 거기서 오일러의 업적에 대해 간단히 언급을 하고 난 후에 자신의 선취권을 주장하였을 때, 오일러는 모든 선취권을 모페르튀이에게 돌렸지만 모페르튀이의 법칙은 "세계에 대한 선험적(a priori) 개념"이지만 자신의 원리는 "귀납적(a posteriori) 통찰"이라고 주장하였다.

오일러의 방법은 "최대 또는 최소 성질을 갖는 곡선"이 만족해야만 되는 방정식을 포함했다. 이것은 오일러 방정식이라고 알려지게 되었다. 1759년에 젊은 라그랑주(Lagrange)는 같은 토픽에 대해 전혀 다른 방향으로 아주 성공적으로 접근하였다. 그 후로는 그의 방법(변분법적 방법이라고도 불린다)이 보편적으로 채용되었다. 오일러는 라그랑주의 논문을 무척 반겼고 젊은 학자가 자신의 계획을 마칠 수 있도록 이 토픽에 대한 자신의 논문을 출판하는 것을 자제했다. 오일러는 이 새로운 수학 분야를 변분법(the calculus of variations)이라고 명명했다. 라그랑주는 역학에서 작용 적분을 도입했다. 다음을 작용(action)이라고 해석한다.

$$I(y) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,\ y,\ y')\, dt$$

여기서 $L = T - U$(T: 운동 에너지, U: 위치 에너지)는 Lagrangian이라 불린다. 라그랑주는 이 작용 적분의 최소 값, 더 엄밀하게는 정류점을 찾는 문제로 역학의 기본 원리를 확립했다.

뉴턴의 법칙은 작용 적분의 오일러 방정식이 된다는 것을 쉽게 보일 수 있다.

4. 가장 짧고 빠른 경로 문제

1697년에 요한 베르누이는 볼록면 위에 주어진 두 점 사이의 가장 짧은 경로를 찾는 문제를 공개적으로 제기하였다. 이는 그와 불화 중이던 그의 형 야곱 베르누이(Jacob Bernoulli)에 대한 도전이었다. 이것이 이른바 측지선 연구의 시작이었다. 1698년에 야곱 베르누이는 모든 회전면에 대한 측지선 문제를 해결하였다. 이 회전면에 대한 제한은 원래는 그 문제를 제기할 때에 요한 베르누이 자신이 제안한 것이었지만 요한은 그의 형의 결과를 인정하면서도 야곱이 단지 회전면만 다룬 것을 너무 특수한 경우만 다루었다고 비판했다. 요한은 임의의 곡면에 대한 가장 짧은 연결선 문제를 해결하였다고 선언하였다. 1698년 8월에 요한이 라이프니츠에게 보낸 편지에서 "접촉 평면(osculating plane) 법칙"을 기술하였는데, 이에 대해 라이프니츠는 즉시 요한의 해를 칭찬하는 답장을 보냈다. 1727년 12월에 요

한은 다시 한번 최단 연결선 문제를 제기하였는데 이번에는 그의 제자인 오일러가 그 대상이었다. 오일러는 1728년에 일반 곡면 위에서의 최단 경로에 대한 최초의 논문을 <De Linea Brevissima in Superficie Quacunque Duo Quaelbet Punta Jungente>(임의 곡면 위에서의 두점을 연결하는 가장 짧은 경로에 대하여)라는 제명으로 《Commentarrii of the Imperial Academy of St. Petersburg》에 실었다. 여기서 오일러는 볼록면 위의 두 점 사이의 최단 연결선 문제를 해결하였지만 오목 면에서는 통하지 않는 방법을 사용하였다. 그래서 오일러는 최단 경로를 찾는 새로운 방법을 모색하게 되고 찾아낸 방법의 적용 결과는 미분 방정식으로 귀착되었다. 이 방정식은 요한 베르누이가 1698년에 유도해낸 기하 정리와 동일한 것이었다. 즉 최단선 C의 각 점 P에서 C의 접촉 평면과 곡면 S의 접평면은 수직으로 만난다. 라는 것이다. 나중에 곡선 C의 각 점 P에서 C의 접촉 평면과 곡면 S의 접평면이 수직으로 만나는 그런 곡선들에게는 측지선(geodesic 또는 geodesic line)이라는 명칭이 주어졌는데 베루누이의 정리는 "최단 길이를 갖는 곡선은 측지선의 일부이다."라는 것이 된다. (주: 현대 수학에서 측지선은 주어진 Riemann connection D에 대해 $D_T T=0$인 곡선으로 정의된다.) 현대 리만 기하에서는 측지선을 찾는 문제는 다음과 같은 "에너지 적분 작용소"를 최소화하는 하는 곡선을 찾는 문제, 즉 에너지 적분의 임계점 즉 에너지 적분의 오일러-라그랑주 방정식의 해를 찾는 변분법의 주요한 일부가 되었다.

$$E(c)=\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2}\langle c'(t),\ c'(t)\rangle\,dt$$

다른 한편, 1698년 12월에 요한은 라이프치히(Leipzig)에서 발간되는 최초의 과학 저널인 《Acta Eruditorum》(1682년에 발간 시작) 에 "수학자들이 해결하라고 초대하는 문제"라는 제목으로 다음과 같은 문제를 제기하였다.

> 수직 평면 위에 주어진 두 점 A와 B에 대해 A에서 출발하여 중력 하에서 B로 갈 때 가장 짧은 시간이 걸리는 경로를 구하라.

이전에 갈릴레오(Galileo)가 이미 그 문제를 제기한 적이 있었지만 갈릴레오는 맞는 해답을 주지는 못했다. 많은 수학자들이 베르누이의 "초대"에 응했다. 라이프니츠가 가장 먼저 이 문제를 풀었고, 뒤이어 야곱과 로피탈(L'Hospital)이 해결했다고 선언했다. 물론 요한도 해를 구했고 뉴턴도 익명의 편지로 그 결과를 알려왔다. 이 문제는 최소 강하선(brachistochrone, "가장 빠른"이라는 그리스어) 문제라고 그 해답은 파스칼(B. Pascal)이 연구한 바 있는 굴렁쇠선(cycloid)였다. 라이프니츠는 나중에 오일러에 의해 더욱 발전되게 되는 방법을 사용하였는데, 라이프니츠-오일러 방법은 최대 최소 문제에 대한 해를 얻는데 있어서 기본적인 방법들 중의 하나이고 오늘날에는 변분법의 직접법(direct method)이라고 알려져 있다. 요한

베르누이는 균질의 얇은 층들로서 이루어진 비 균질 매질에서 움직이는 빛의 운동으로 이 문제를 파악했다. 역학 문제를 광학 문제로 전환시킨 것이었다. 이 결과는 미분 방정식이 나오고 그 해는 굴렁쇠선이라는 것을 보일 수 있었다.

여기서 빛에 대한 페르마(Fermat)의 최소 시간 원리에 대해 간단히 살펴보자. 고대의 철학자들은 빛의 굴절에 대한 법칙을 찾으려고 노력했었다. 특히 기원저 2세기에 프톨레마이오스(Ptolemy)는 이 굴절 법칙을 실험적으로 얻으려고 시도했으나 실패했다. 네덜란드의 과학자 스넬(Snel)이 최초로 굴절 법칙을 실험적으로 확립했다. 입사각의 사인에 대한 굴절각의 사인의 비율은 입사각의 크기에 무관하게 일정하다는 것이 그것이다. 식으로는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\beta_1)} = \frac{\sin(\alpha_2)}{\sin(\beta_2)}$$

데카르트(Descartes)는 스넬과는 독립적으로 같은 법칙에 도달했는데, 그는 "빛의 속도는 고밀도의 매질에서가 저밀도의 매질에서 보다 더 빠른 속도로 진행한다."라는 가정에서 스넬의 법칙을 유도해 냈다. 그러나 페르미는 그와는 정반대의 가정 즉 빛은 고밀도의 매질에서 더 느리게 움직인다는 가정에서 역시 스넬의 법칙을 유도해 냈다. 오늘날에는 페르마의 가정이 맞다는 것이 판명되었다. 페르마는 다음의 원리 즉 "빛은 비 균질 매질에서 한 점에서 다른 점으로 움직일 때 시간이 가장 적게 걸리는 경로를 통해서 움직인다."라는 원리를 사용했다. 이를 페르마의 최소 시간 원리라고 부른다. 요한 베르누이는 균질의 얇은 층에서 스넬의 법칙을 적용하고 극한을 취해서 이를 미분방정식으로 바꾸어서 문제를 해결했던 것이다. 최초의 역학-광학 유비의 사용이었고 이 방법은 광학, 역학, 기하학에서 다른 문제들을 해결하는 것을 가능하게 하였다.

5. 플래토 문제

아르키메데스(Archidemes)는 그의 저서 《On the Equilibrium of Planes or Centers of Gravity of Plane Curves》에서 무게 중심(barycenter 또는 center of gravity)라는 개념을 자유롭게 사용하였다. 르네상스 시대에 이탈리아에서는 아르키메데스의 아이디어들이 잘 알려져 있었고 많은 학식 있는 사람들이 역학적 시스템의 무게 중심이라는 개념을 받아 들였다. 갈릴레오와 토리첼리(Torricelli)는 아르키메데스의 아이디어들을 설명하고 발전시켰다. 요한 와 야곱 베르누이는 양끝이 고정되어 있는 무거운 사슬의 평형 위치가 어떤 형태를 갖는지에 대해 고심했다. 그들은 사슬이 매우 작은 단단한 부분들로 이루어진 역학적 시스템이라고 생각하고 평형 상태는 무게 중심이 가장 낮은 상태가 되어야 된다고 추론하였다.

1690년에 요한 베르누이는 자유롭게 걸려 있는 사슬의 모양은 catenary(쌍곡 코사인)라는 것을 발견하였다. 1717년에 요한 베르누이는 그의 가상 일 원리(principle of virtual work)를 정학의 기본 법칙으로 제안하였다. "평형 상태에서는 주어진 역학 시스템을 무한소로 움직이는데 전혀 일이 들지 않는다."라는 것이다. 가상 일 원리는 다음의 두 규칙으로 표현될 수 있다.

규칙 1. 물리적 시스템의 안정적 상태는 그러한 상태에서는 그 시스템의 위치 에너지는 그 시스템의 근방의 다른 모든 가능한 상태의 그 것보다 더 작다.

규칙 2. 물리적 시스템의 평형상태는 위치에너지의 정류 상태이다.

비누 방울 놀이에서 나타나는 얇은 막들은 분명히 안정적 평형 상태에 있다. 따라서 요한 베르누이의 가상 일 원리에 의하면 철사 틀에 생기는 그 비누 방울 막은 최소 위치 에너지를 갖는 막임에 틀림없다. 그리고 위치 에너지는 면적에 비례하므로 비누 방울 막의 면적은 최소 면이 된다. 최소 면은 같은 틀(경계)을 구획 짓는 어떠한 가까운 표면보다도 더 작은 면적을 갖는다.

벨기에의 물리학자 플래토(A.F. Plateau)는 얇은 액체 층에 대한 여러 가지 실험을 행하였다. 여러 실험을 통하여, 예를 들면 닫힌 콘투어(둘레)를 갖는 철사를 비누 용액에 담갔다 다시 꺼냄으로써 그는 닫힌 철사의 모양에 상관없이 항상 그것들이 최소한 하나의 비누막을 만든다는 것을 깨달았다. 수학적으로는 다음과 같은 질문이 된다.

공간상의 모든 폐곡선은 적어도 하나의 최소면의 경계가 될 수 있는가?

이 의문은 수학에서는 플래토 문제라고 알려지게 되었다. 한편, 라그랑주는 최소면 방정식에 대한 정리를 기술하였는데 다음과 같다.

최소면의 각 정칙 점에서의 평균 곡률(mean curvature)은 0이다.

이 후로는 평균 곡률이 0인 곡면을 최소 면이라고 부르게 되었다. 이것은 최소 면은 평평하거나 또는 안장 면처럼 보인다는 것을 의미한다.

플래토 문제를 풀기 위해서는 곡면의 경계를 이루는 곡선이 얼마나 복잡한지 알아야 된다. 이는 handle이 달린 구면에 대한 위상적 연구를 촉발시키고 19세기에 디스크 타입의 곡면에 대한 플래토 문제에 대한 리만(Riemann), 바이어슈트라스(K. Weierstrass), 슈바르츠(Schwarz) 등에 의해서 풀렸다. 그 후로 더글러스(J, Douglas)와 라도(T. Rado)에 의해 많은 handle이 달린(genus) 구면에 대한 플래토 문제가 1930년대에 해결되었다.

6. 디리클레 원리

다음과 같은 디리클레(Dirichlet) 문제를 생각하자.

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0 \quad (x \in \Omega) \\ u(x) &= h \quad (x \in \partial\Omega) \end{aligned}$$

여기서 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$은 유계인 개집합이고 $\Delta = \sum_{i=1}^{n} D_i^2$은 라플라스 연산자이며 $h: \partial\Omega \to \mathbb{R}$은 주어진 함수이다. 디리클레 원리는, 위의 디리클레 문제에 다음과 같은 디리클레 적분의 최소값을 연관시키는 것을 말한다.

$$D(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

디리클레 문제는 본래는 전도체의 표면에 있는 전하량의 분포를 결정하는 문제였는데, 그 전기장의 에너지가 최소가 되어야 한다는 것이 디리클레 원리가 된다. 자연에서 전도체의 표면의 전하의 평형 분포가 존재한다는 사실이 그에 상응하는 수학적 문제의 해가 존재한다는 충분한 증거로 받아들여졌다. 가우스(Gauss)는 다음과 같이 쓰고 있다.

> "어째든 그러므로 적분은 음이 아닐 것이고 따라서 그 적분이 최소 값을 갖는 (전하의) 분포가 존재해야 한다."

가우스를 비롯해서 켈빈(Kelvin) 경, 디리클레, 리만 등은 최소 값의 존재를 명백한 것으로 간주하였다. 그 경우에 디리클레 적분의 오일러 방정식이 바로 디리클레 문제가 되면서 그 해는 디리클레 적분의 최소 값을 갖는 함수가 된다. 1870년에 바이어슈트라스는 최소 해를 갖지 않는 변분법적 문제의 예를 발견하였다. 바이어슈트라스의 반례는 최소값(minimum)과 하한(infimum)의 개념을 구분하게 하고 디리클레 원리에 대한 재검토를 필요하게 만들었다.

20세기 들어 와서야 아르첼라(Arzela)가 그 후에 힐베르트(Hilbert)에 의해 h와 Ω에 대한 조건들을 제한시킴으로써 디리클레 원리를 복귀시킬 수 있었다. 그 후로 레비(Levi), 푸비니(Fubini), 르베그(Lebesgue), 쿠랑(Courant), 리히텐슈타인(Lichtenstein), 토넬리(Tonelli) 등의 공헌으로 변분법의 직접법이 확립되기에 이르렀다. 직접법(direct method)이란 디리클레 원리를 다음과 같은 더 일반적인 적분 작용소로 확장한 것을 말한다.

$$F(u) = \int_\Omega f(x,\ u(x),\ \nabla u(x))\, dx$$

7. 결론

최대 · 최소 문제는 고대로부터 인류를 매혹시켜 왔고 현실에서도 늘 발생하는 문제였고, 지금도 그러하다. 최대 · 최소 문제가 없는 변분법의 발전은 상상할 수도 없다. 극 원리가 광학, 역학, 전자기학, 기하학 등 여러 방면에 걸쳐 작용하고 있음을 보였다. 오일러는 최초의 변분법 교과서인 Methodus에서 "이 세상에서 최대 또는 최소의 의미를 갖지 않는 어떠한 일도 일어나지 않는다."라고 천명했듯이 고전 역학 전체가 변분법 원리 위에 구축될 수 있고 원자 물리학, 양자 역학, 그리고 일반 상대성 이론도 변분법에 의해 기술될 수 있다.

수학적 거인들의 도전에 대해 어떤 아이디어로 그것들을 다루어 왔는지를 살펴보는 일은 앞으로의 발전을 위해서도 매우 중요하다. 물론 최대 · 최소 원리가 변분법의 모든 것은 아니다. 현대의 임계점 이론에서는 임계점을 구하는 것이 주요한 관심사이다. 1930년대에 류스테르니크(Ljusternik)와 슈니렐만(Schnirelman)에 의해서 발전된 minimax 방법은 임계점 이론과 변분법의 발전에 지대한 영향을 끼쳤고 지금도 그러하다.

참고 문헌

1. Caratheodory, C., "The beginning of research in the calculus of variations," *Schriften* vol 2, pp. 93-108.
2. Courant, R. & D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics* Vol. 1, 2, New York; Interscience Publishers, 1966.
3. Gelfand, I.M. & S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, New Jersey; Prentice Hall, 1966.
4. Giaquinta, M. & S. Hildebrandt, *Calculus of Variations*, New York; Springer-Verlag, 1996.
5. Goldstine, H., *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, New York; Springer-Verlag, 1986.
6. Hildebrandt, S. & A. Tromba, *The Parsimonious Universe*, New York; Springer-Verlag, 1996.
7. Mawhin, J. & M. Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, New York; Springer-Verlag, 1989.
8. Tikhomirov, V.M., *Stories about Maxima and Minima*, AMS, 1990.