

Lagrangian 보오텍스 방법에서의 압력장 계산

이승재^{†*}, 김광수*, 서정천^{**}

서울대학교 조선해양공학과*
서울대학교 조선해양공학과/ 해양시스템공학연구소^{**}

Computation of Pressure Fields in the Lagrangian Vortex Method

Seung-Jae Lee^{†*}, Kwang-Soo Kim* and Jung-Chun Suh^{**}

Dept. of Naval Arch. & Ocean Eng., Seoul National University*
Dept. of Naval Arch. & Ocean Eng., RIMSE, Seoul National University^{**}

Abstract

In the Lagrangian vortex particle method based on the vorticity-velocity formulation for solving the incompressible Navier-Stokes equations, a numerical scheme for calculating pressure fields is presented. Implementation of the numerical method is directly connected with the well-established surface panel methods, just by dealing with the dynamic coupling among vorticity field. Assuming the vorticity and the velocity fields are to be calculated in time domain analysis, the pressure calculation for a complete set of solution at present time step is performed in a similar way to the one used in the Eulerian description. For a validation of the present method, we illustrate the early development of the viscous flow about an impulsive started circular cylinder for Reynolds number 550. The comparative study with the Eulerian finite Volume method provides an extensive understanding and application of the mesh-free Lagrangian vortex methods for numerical simulation of viscous flows around arbitrary bodies of general shape.

※Keywords: Vorticity-Velocity Formulation(와도-속도 정식화), Lagrangian Vortex Method(Lagrangian 보오텍스 방법), Impulsively Started Circular Cylinder(순간 출발하는 2차원 실린더), Pressure Coefficient(압력계수)

1. 일 반

접수일: 2003년 9월 18일, 승인일: 2003년 11월 21일

+ 주저자, E-mail: guinepig@hanmir.com

Tel: 02-880-8379

와도를 다루는 점성유동해석방법은, 비관성 및 관성좌표계에서의 지배방정식 형태가 같고 와도가 나타나는 물체 근처의 한정된 계산영역을 택할 수

있으며 무한원방조건이 자동 만족된다는 점에서, 비정상 유동해석에 적합하다. 다만, 물체 표면에서의 압력과 와도간의 동적연성관계를 완전히 고려하는 기법이 정립되어 있지 않은 상태에서, 물체 면의 와도 플럭스(flux)를 정확히 구하여야 하고, 일부 적분항에 대한 계산시간이 상당히 소요된다는 점이 수치기법의 정확도를 높이는 데 어려움이 있다.

보오텍스 방법(vortex method)은 유동의 물리 현상에 기초한 비교적 간단한 알고리즘으로 구성되어 있기 때문에, 복잡한 비정상 유동의 적용에 유리할 것으로 판단된다.

2차원 비정상, 비압축성 유동장으로 가정한 보오텍스 방법을 간단히 살펴보면, 이산화된 와도장과 Lagrangian 개념으로 표현된 와도이송방정식을 기본으로 하기 때문에, 보오텍스 방법은 와도값을 가지는 영역만을 대상으로 계산이 이루어진다. 보오텍스 방법은 계산영역 전체에 대해서 격자를 따로 생성할 필요가 없으므로 격자를 만들기 힘든 복잡한 형상에 대해서 매력적이다.

보오텍스 방법에서 계산의 기본 단위는 보오텍스 블랍(blob)이다. 와도장은 보오텍스 블랍으로 나타내어지며, 보오텍스 블랍이 생성되어 발달되어 간다. 보오텍스 블랍의 이동은 Lagrangian 방법을 이용하여 추적되어 진다. 보오텍스 방법의 이러한 특징은 고속선용 추진기의 가장 큰 문제점인 팁(tip) 보오텍스와 같이 와도가 강한 유동에 대한 접근이 용이하게 작용할 것으로 생각되어 진다.

Chorin(1973), Leonard(1980), Greengard/Rohklin(1987), Winckelmans(1989), Koumoutsakos et al.(1994), Ploumhans/winckelmans(2000) 등의 많은 학자들의 다양한 연구 결과로 인하여 그 완성도를 갖추어 가고 있으며, 현재 여러 학자들이 다양한 관련 연구를 진행하고 있다. 본 연구에서는 보오텍스 방법을 이용하여, 순간적으로 출발하는 실린더 주위의 점성유동해석기법을 개발하고자 한다.

2. 지배방정식

비압축성($\rho=1$ 로 가정) Newtonian 유체의

응력은 $\tau = -p n + (\mu \omega \times n)$ 과 같이 압력과 와도로 표현되며, Navier-Stokes 방정식('NS식')은, 즉, 관성항인 가속도는 압력과 와도의 Helmholtz 분해 형태로 표현된다.

$$a \equiv \frac{du}{dt} = -\nabla p - \nabla \times (\mu \omega)$$

'NS식'에 각각 curl과 divergence를 취하여 와도이송방정식과 압력 Poisson 방정식을 얻고, Biot-Savart식과 함께 다음과 같이 미분-적분형 지배방정식을 구성하게 된다.

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &\equiv \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \cdot \nabla \omega = \omega \cdot \nabla u + \mu \nabla^2 \omega \\ \nabla^2 H &= \nabla \cdot (u \times \omega) \\ u &= \int_S (n \cdot u) \nabla G + (n \times u) \times \nabla G dS \\ &\quad + \int_V \omega \times \nabla G dV \end{aligned}$$

여기서, 기준값 p_0 와 u_0 에 대한 상대압력수두는 $H = (p + 1/2 u^2) - (p_0 + 1/2 u_0^2)$ 이며, G는 2차원에서는 $-\ln r / 2\pi$, 3차원에서는 $1/4\pi r$ 이다. ($r = |x - y|$). 속도 u 는 유입류, 회전성, 포텐셜 성분으로 표현된 Helmholtz분해에 해당된다. 즉,

$$u = U_\infty + u_\omega + \nabla \phi = u_0 + u_\omega \text{ 이다.}$$

무활조건과 함께, 'NS식'의 법선과 접선방향 동적평형을 적용한 compatibility조건이 물체 표면에서 만족하여야 한다(서정천 1998, 김광수/서정천 1998, Suh/Kim 1999). 즉

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U_B \quad \text{on } S_B \\ \mu \frac{\partial \omega}{\partial n} &= n \times (a_B + \nabla p) + \nabla (\mu \omega) \cdot n \\ \frac{\partial H}{\partial n} &= n \cdot (\nabla (\frac{1}{2} u^2) - a_B - \nabla \times (\mu \omega)) \end{aligned}$$

3. 보오텍스 방법

2차원 비정상, 비압축성 유동장에서, 보오텍스 방법은 이산화된 와도장을 표현하는 보오텍스 블

랍을 기본 요소로 택한다. 와도장은 N개의 보오텍스 블랍(순환세기 $\Gamma = \omega h^2$)과 순정함수(η_ϵ)를 이용하여 식(1)과 같이 표현된다.

$$\omega(x, t) = \sum_{j=1}^N \Gamma_j(t) \eta_\epsilon(x - x_j) \quad (1)$$

보오텍스 블랍의 성장과 이동은 식(2), (3)과 같이 Lagrangian 개념으로 표현된다.

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (2)$$

$$\frac{dx}{dt} = u \quad (3)$$

보오텍스 블랍의 확산은 식(2)를 입자강도교환(Particle Strength Exchange) 방법을 이용하여 이산화된 식(4)에 의해서 이루어진다(Degond/Mas-Gallic 1989).

$$\nabla^2 \omega \approx \frac{2}{\epsilon^2} \int \eta_\epsilon(x - y) (\omega(y) - \omega(x)) dy$$

$$\frac{d\Gamma_j}{dt} = \frac{2\nu S}{\epsilon^2} \sum_{i=1}^N (\Gamma_i - \Gamma_j) \eta_\epsilon(x_i - x_j) \quad (4)$$

여기서, S는 보오텍스 블랍의 면적(=h²)이다. 식(4)를 사용할 때, 안정성과 효율을 감안하여 계산 입자로부터 일정거리(보통 5ε) 내에 위치한 주변입자에 한하여 합산한다. 계산 입자가 경계면 근처에 위치한 경우에는 주변 입자를 경계면에 관한 경상점(image point)에 가상 입자를 추가시켜 그 영향을 포함시킨다(Ploumhans/Winckelmans 2000).

식(3)과 같이 표현되는 보오텍스 블랍의 이동속도 중에서 회전성 속도성분(u_ω)은 순정된 Biot-Savart 적분식을 이용하여 계산한다.

$$u_\omega = u_o - \int \omega \times \nabla G dS$$

$$u_\omega = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N K_\epsilon(x - x_j) \times \Gamma_j k \quad (5)$$

여기서, $K_\epsilon(r, t) = G(|r|/\epsilon) r/|r|^2$, ε는 순정반경이며, $G(s) = (1 - \exp(-s^2/2))$ 이다. 보오텍스 블랍의 이동속도는 식(5)에 의하여 얻어진다.

회전성 속도성분과 유입속도에 의해 구해진다. 물체표면에서의 비침투조건이 만족되도록 패널 방법을 적용하여 포텐셜 성분의 속도 성분을 계산한다. 최종적으로 얻은 속도(u)에 의해서, 보오텍스 블랍의 위치를 갱신한다. 이때 시간 전진은 Adam-Bashforth기법(또는 2차 Runge Kutta기법)을 사용한다(서정천 등 2002).

4. 압력 방정식

2차원 비정상, 비압축성 유동장에서, Poisson 방정식 형태의 압력방정식으로 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \nabla \left(p + \frac{1}{2} u \cdot u \right) = \nabla \cdot f + \nabla \cdot u \times \omega - \nabla \cdot \nabla \times \nu \omega$$

아래와 같이 벡터등식에 따라,

$$\nabla \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot u) = 0$$

$$\nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} u \cdot u \right) = \nabla^2 \left(\frac{1}{2} u \cdot u \right)$$

$$\nabla \cdot (u \times \omega) = \omega \cdot \omega + u \cdot \nabla^2 u$$

$$\nabla \cdot f = 0$$

$$\nabla \cdot \nabla p = \nabla^2 p$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \nu \omega) = 0$$

최종적으로 압력방정식을 정리하면 다음과 같다.

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{2} u \cdot u + p \right) = \omega \cdot \omega + u \cdot \nabla^2 u$$

만약, 비점성, 비회전성의 포텐셜 유동인 경우 위 식은 베르누이 방정식이 된다. 3차원 유동이라 할지라도 동일하게 적용되며, 다음의 보존형태로 표현이 된다.

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{2} u \cdot u + p \right) = \nabla \cdot (u \times \omega)$$

계산의 편의를 위해 전체 압력수두 $H = p + \frac{1}{2} u \cdot u$ 로 압력방정식과 동적압력경계 조건을 나타낼 수 있다.

·압력방정식 $\nabla^2 H = \nabla \cdot (u \times \omega)$

·동적압력경계조건

$$\frac{\partial H}{\partial n} = n \cdot \left(-\frac{\partial u}{\partial t} + u \times \omega \right) - \frac{1}{Re} n \cdot (\nabla \times \omega)$$

2차원에 대한 Green 스칼라등식과 2차원 Green함수의 특성을 이용하면 다음 식이 유도된다.

$$\phi = \oint_c \left[\phi \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} G \right] dl_y + \int_s (\nabla^2 \phi) G dS_y$$

여기서, $G = \frac{1}{2\pi} \ln r$ 이고, 위 식에서 ϕ 대신 압력수두 H 를 이용하면,

$$H = \oint_c \left[H \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial H}{\partial n} G \right] dl_y + \int_s (\nabla^2 H) G dS_y$$

이다. 다시 압력방정식과 동적압력경계조건을 대입하여 정리하면 식(6)을 얻을 수 있다.

$$H = \oint_c H n \cdot \nabla G dl - \oint_c n \cdot (u \times \omega k) G dl + \oint_c \frac{1}{Re} n \cdot (\nabla \times \omega k) G dl + \int_s \nabla \cdot (u \times \omega k) G dS \quad (6)$$

식(6)의 두 번째항 $\oint_c n \cdot (u \times \omega k) G dl$ 은 고착 조건에 의해서 경계면에서 $u = 0$ 이고, 무한원방에서는 와도값 $\omega \approx 0$ 이므로 무시될 수 있다. 물체 표면을 여러 패널로 나누고, 각 panel에서는 압력수두 H 가 일정하다고 가정하면, 식(7)과 같이 이산화된다.

$$H_i = \sum_j \left[H_j \oint_c n \cdot \nabla G dl + \oint_c \frac{1}{Re} n \cdot (\nabla \times \omega k) G dl \right] + \sum_k \int_{s_k} \nabla \cdot (u \times \omega k) G dS \quad (7)$$

각 패널에서 접선 방향의 와도변화가 일정하다고 가정하면, 식(7)의 두번째 적분항에서 접선방향의 와도변화를 다이폴의 세기 σ 로 나타내고, 적분 기호 밖으로 나올 수 있다. 포텐셜 유동에서 패널 방법으로 속도를 구하는 것과 유사한 방법으로 다음과 같이 행렬식이 구성된다.

$$H_i = \sum_j (A_{ij} H_j + \sigma_j C_{ij}) + \sum_k S_{ik} \quad (8)$$

$$\sum_j (\delta_{ij} - A_{ij}) H_j = \sum_j (\sigma_j C_{ij}) + \sum_k S_{ik}$$

여기서, $A_{ij} = \int_c n \cdot \nabla G dl$, $\sigma = \frac{1}{Re} n \cdot (\nabla \times \omega k)$, $C_{ij} = \int G dl$, $S_{ik} = \int_{s_k} \nabla \cdot (u \times \omega k) G dS$ 이다. 계산영역에서 와도와 속도분포를 정확히 알고 있다면, 압력수두 H 는 식(8)에서 역행렬을 취하여 간단히 구할 수 있다. A_{ij} , B_{ij} 선적분 결과는 간단한 연산을 통해 쉽게 구할 수 있다. S_{ik} 는 아래와 같이 정리될 수 있다.

$$S_{ik} = \int \nabla \cdot (u \times \omega) G dS = \oint n \cdot (u \times \omega) G dl - \int (u \times \omega) \cdot \nabla G dS \quad (9)$$

앞서 말한 바와 같이, 식(9)에서 첫번째 항인 $\oint_c n \cdot (u \times \omega) G dl$ 은 고착조건에 의해서 무시하고, 식(1)을 식(9)에 대입하여 정리하면,

$$\int (u \times \omega) \cdot \nabla G dS = \sum_{i=1}^N \frac{u_i \Gamma_i (x-x_i)}{|r|^2} \int \xi_i dS - \sum_{i=1}^N \frac{u_i \Gamma_i (y-y_i)}{|r|^2} \int \xi_i dS = \sum_{i=1}^N \left[\frac{u_i \Gamma_i (x-x_i) - u_i \Gamma_i (y-y_i)}{|r|^2} \right] \int_0^R \int_0^{2\pi} \xi_i r dr d\theta = \sum_{i=1}^N \left[\frac{u_i \Gamma_i (x-x_i) - u_i \Gamma_i (y-y_i)}{|r|^2} \right] \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon^2}\right) \right\}$$

이다(이승재 등 2003).

5. 유동해석결과

본 연구에서는 보오텍스 방법을 이용하여 순간적으로 출발하는 2차원 실린더 주위의 점성유동문제에 적용해 보았다. 이 문제는 단순하고 뭉뚱한 형상이면서도 복잡한 유동 특성을 포함하고 있기 때문에, 수치기법 검증용 위한 기준 문제로서 적합하다.

본 연구진에 의하여 수행된 이전의 연구에서 순간적으로 출발하는 2차원 실린더에 대해서 보오텍스 방법으로 와도와 속도장의 결과를 검증하였다. 이번 연구는 2차원 실린더 물체주위의 압력장을 수치해석하였다.

유동해석을 위한 입력변수는 Table 1과 같다. 물체주위의 압력장은 와도장(Fig. 1)과 속도장(Fig. 2)의 계산결과를 이용하여 계산된다. Fig. 3은 물체 표면에서의 와도값을 나타낸 것이다. 점으로 표시된 것은 물체 표면에서 계산된 와도값 결과이며, 실선은 Fourier 변환에 의해 필터링된 값이다. 물체표면에서 계산된 와도값에 상당한 노이즈가 포함되어 있는 것은, 물체의 표면과 유동장의 보오텍스 불합과의 거리가 일정하지 않기 때문에 나타나게 된다. 이러한 노이즈는 와도장 결과인 Fig. 1에서도 나타난다. 물체 표면에서의 강한 와도값의 발생은 많은 노이즈를 포함하게 된다. Fig. 1에서 보면 유입류 방향에서 강한 노이즈가 나타나고, 와도장이 발달함에 따라 후류쪽에서도 노이즈가 관찰된다.

Fig. 4는 물체표면에서의 압력계수 결과이다. 보오텍스 방법과 Eulerian FVM기법으로 계산된 물체표면의 압력값이 전반적인 경향은 같지만, 보오텍스 방법의 결과에서 최대, 최소값에서 조금 차이를 보이고 있다. 이것은 물체표면에서의 와도값을 필터링할 때 포함되는 오류로 보인다.

Fig. 5와 Fig. 6, Fig. 7과 Fig. 8은 각각 Eulerian FVM 방법과 보오텍스 방법으로 계산된 압력 contour의 결과이다. 두 방법으로 구한 모든 결과에서, wake 중심에서 낮은 압력장이 형성되어 있는 것을 확인할 수 있다. 압력장 분포 모습이 약간의 차이가 있기는 하지만, 전반적인 압력 결과는 매우 잘 일치함을 확인할 수 있다.

Table 1 Computational parameters used in vortex methods

Reynolds no.	550
Time Step, Δt	0.01
Radius	0.5
No. of Panels	600
Panel Size	약 0.005
Particles	9,000~40,000
Computational Domain	제한 없음
Computational Time (Pentium IV, CPU 2.3GHz)	약 8h (200 time steps)

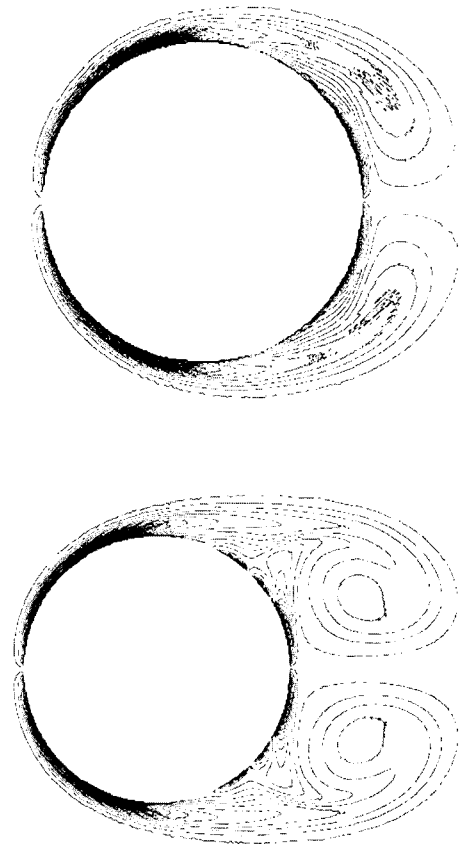


Fig. 1 The iso-contour of the vorticity at $T=1.0$ (up) and $T=2.0$ (down)

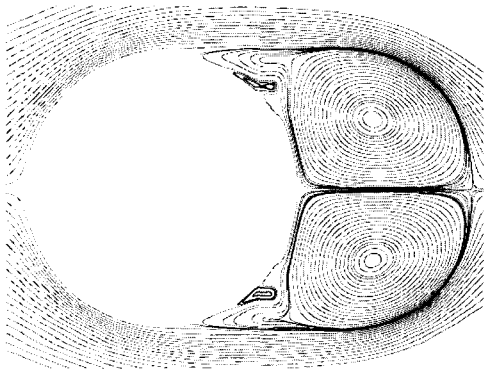
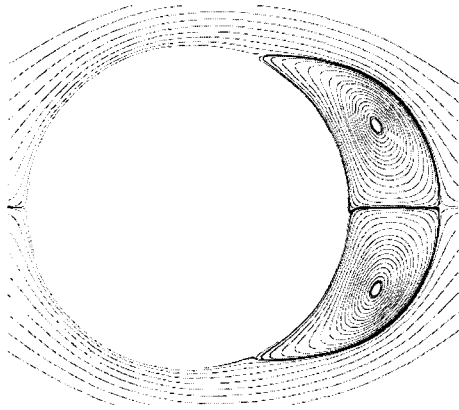


Fig. 2 The streamline patterns at T=1.0 (up) and T=2.0 (down)

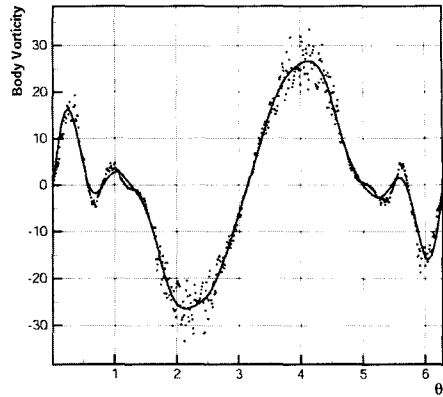
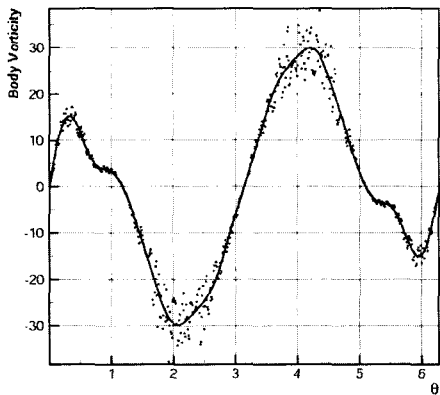


Fig. 3 The vorticity on body at T=1.0 (up) and T=2.0 (down)

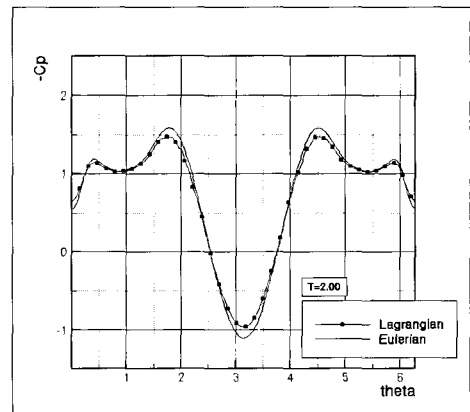
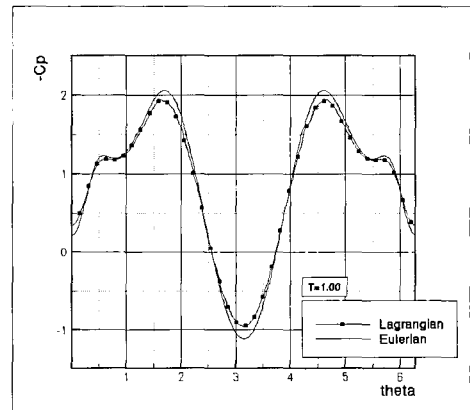


Fig. 4 The comparison of the pressure coefficient on body at T=1.0 (up) and T=2.0 (down)

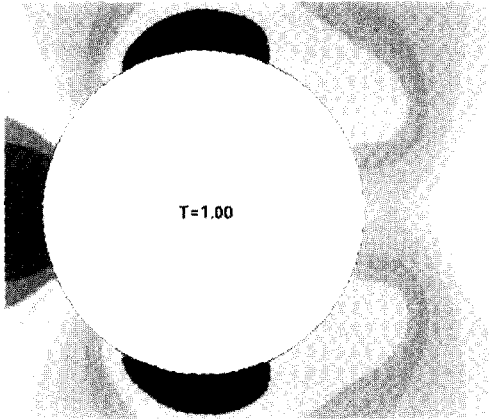


Fig. 5 Pressure contour for T=1.00 (Eulerian FVM Method)

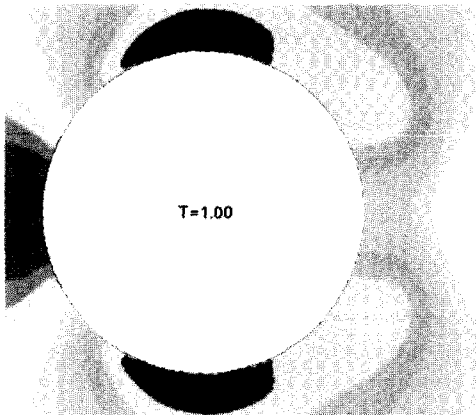


Fig. 6 Pressure contour for T=1.00 (Vortex Method)

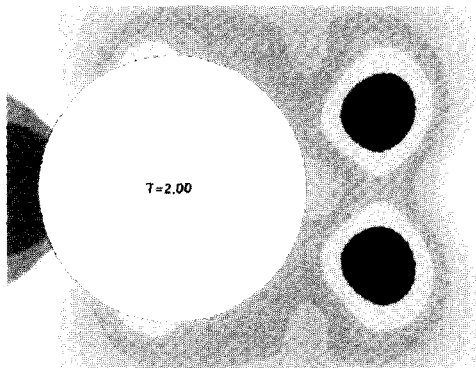


Fig. 7 Pressure contour for T=2.00 (Eulerian FVM Method)

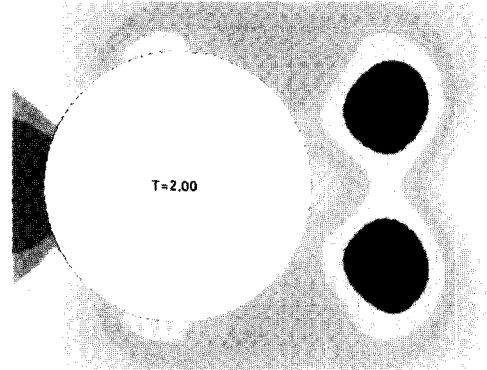


Fig. 8 Pressure contour for T=2.00 (Vortex Method)

6. 결론

와도를 기본 변수로 하는 보오텍스 방법에 대하여, 2차원 점성유동문제에서 압력장을 해석할 수 있는 수치 기법을 정립하고, 실린더 문제에 적용하여 그 타당성을 검증해 보았다.

향후, 보오텍스 방법에 의한 압력방정식 풀이법을 보완하여야 하며, 물체표면에서의 와도값의 정확성과 안정성을 높여야 할 것이다.

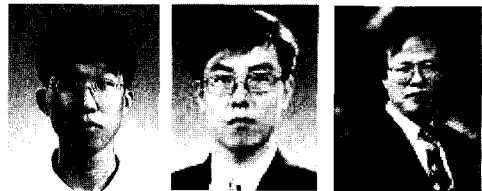
후 기

본 연구의 일부는 2003년도 (1)학술진흥재단의 중점연구소 지원과제의 지원으로 수행되었음.

참 고 문 헌

- 김광수, 서정천, 1998, “와도를 기저로 한 초기 순간 출발하는 실린더 주위의 점성유동해석”, 대한조선학회 논문집, 제35권, 제4호, pp. 1-10.
- 서정천, 김광수, 이승재, 2002, “점성유동해석을 위한 와도 방법의 고찰”, 대한조선학회 추계 학술대회, pp. 514-519.
- 서정천, 1998, “와도를 기저로 한 비압축성 점성유동해석 방법”, 한국전산유체공학회지, 제3권, 제1호, pp. 11-21.

- 이승재, 김광수, 서정천, 2003, "Lagrangian 보오택스 방법에서의 압력장 계산," 대한조선학회 춘계학술대회, pp. 251-256.
- Chorin, A. J., 1973, "Numerical study of slightly viscous flow," J. Fluid Mech 57, pp. 785-796.
- Degond, P. and Mas-Gallic, S., 1989, "The weighted particle method for convection-diffusion equations, Part I : the case of an isotropic viscosity, Part II : the anisotropic case," Math. of Comput. 53, pp. 485-507.
- Greengrad, L. and Rokhlin, V., 1987, "A Fast Algorithm for Particle Simulations," methods", J. Comp. Phy., 73, pp. 325-348.
- Suh, J. C. and Kim, K. S. 1999, "A vorticity-velocity formulation for solving the two-dimensional Navier-Stokes equations," Fluid Dyn. Res., 25, pp. 195-216.
- Koumoutsakos, P., Leonard, A. and Pepin, F., 1994, "Viscous boundary conditions for vortex methods," J. Comp. Phy., 113, pp. 52-56.
- Leonard, A., 1980, "Vortex methods for flow simulation," J. Comp. Phy., 37, pp. 289-335.
- Ploumhans, P. and Winckelmans, G. S., 2000, "Vortex methods for high resolution simulation of viscous flow past bodies of general geometry", J. Comp. Phy., 165, pp. 354-406
- Winckelmans, G., 1989, "Topics in vortex methods for the computation of three- and two- dimensional incompressible unsteady flows", PhD. Thesis, California Institute of Technology.



< 이승재 >

< 김광수 >

< 서정천 >