

# 최소위상시스템을 고려한 통합최적설계

## Combined Optimal Design with Minimum Phase System

박 중 현\*  
(Jung-Hyen Park)

**Abstract:** A combined optimal design problem is discussed taking a 3-D truss structure as a design object. We use descriptor forms for a controlled object and a generalized plant because the structural parameters appear naturally in these forms. We consider not only the minimum weight design problem for the structure, but also the suppression problem of the effect of disturbances for the control system as the purpose of the design. A numerical example shows the validity of combined optimal design of the structure and control systems. We also consider the validity of the sensor-actuator collocation for the control system design in this paper.

**Keywords:** combined optimal design, optimal structure, vibration control, 3-D Truss structure, sensor-actuator collocation

### I. 서론

구조-제어시스템의 통합최적설계는 고도의 기계구조물을 설계하는데 있어 유력한 동적설계수법의 하나이다. 특히, 인공위성이나 우주 스테이션으로 대표되는 제어가 어려운, 유연구조, 대규모 시스템인 유연우주구조물 등의 설계에는 적절한 수법으로 고려되어진다. 이러한 대규모 구조물의 설계에서는 경량설계라는 구조설계사양과 진동억제 등의 엄격한 제어시스템사양이 존재한다. 그러나 구조물이 경량일 경우 강성이 낮으므로 미소한 외란에 의해서도 진동이 발생한다. 또한, 감쇠가 작기 때문에 일단 발생한 진동은 수축하기 어렵다는 결점이 있다. 그러한 진동에 대하여 제진특성을 확보하기 위하여는 제어시스템설계에 대한 부담이 증가한다. 역으로 제어시스템설계에 대한 부담을 작게 하기 위해서는 구조물의 강성을 높일 필요가 요구되며, 결과적으로 구조중량이 증가한다. 이러한 경우와 같이 구조설계와 제어설계 분야에 밀접한 관련이 있는 경우, 구조-제어시스템을 통합적으로 설계할 필요가 있다[1,2].

일반적으로 이러한 문제는 설계대상을 상태방정식으로 기술하여 취급해왔다. 본 논문에서는 설계대상의 표현에 있어 디스크립터 형식을 사용한다. 디스크립터 형식은 시스템에 나타나는 변수사이의 동적, 정적 관계의 자연스러운 기술을 가능하게 함으로써, 변수간의 결합 및 물리정수의 배치에 유래하는 구조시스템의 더욱 우수한 모델링을 가능하게 한다 [3].

본 연구에서는, 3 차원 트러스 구조물을 유한요소법에 의해 모델링화 한 것을 설계대상으로 하여 구조-제어 시스템의 통합최적설계문제를 다룬다. 구조시스템의 평가함수는 구조중량이며, 제어시스템의 평가함수는 전체 페루프시스템의 외란에서 제어출력까지의 전달함수의  $H^\infty$  norm 이다. 통합최적설계문제의 평가함수는 정규화 되어진 구조-제어시스템 평가함수의 가중인자포함 선형함수로 한다. 이 평가함수를 최소화 함으로써 구조중량과 제어성능의 균형이 잡힌 최적설계가 가능하다고 생각되어진다. 최적설계문제에 있어서의 설계변수로는 트러스 부재의 단면적을 채용하여, 수치 시물레

이션을 통하여 본 설계법의 유효성을 보인다. 그리고, 제어 시스템 설계에 있어서의 센서-액츄에이터 동위치-동방향 배치에 관한 유용성에 대하여 고찰한다.

### II. 시스템 모델링

본 논문에서는, 재질 및 구조적 배치는 변화하지 않는  $n$  개의 부재로부터 구성되는 입체 트러스 구조물을 설계대상으로 한다. 유한요소법에 의해 모델링하면 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$M_s \ddot{q} + D_s \dot{q} + K_s q = L_1 w + L_2 u \tag{1}$$

여기서  $M_s, D_s, K_s$  는 각각 질량, 감쇠, 강성행렬,  $q, L_1, w, L_2, u$  는 절점변위벡터, 외란입력배치행렬, 외란입력, 조작입력배치행렬, 조작입력이다. 대상구조물에 대하여 유한요소법에 의한 각 절점의 해당부분에 외란이 가해지는 대응부분에 대하여 외란입력배치행렬이 결정되며, 제어가 설치되는 대응부분에 대하여 조작입력배치행렬이 결정된다. 다음으로,  $x$  디스크립터변수,  $z$  제어출력,  $y$  관측출력으로 하여 (1)을 디스크립터 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$E \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \tag{2}$$

$$z = C_1 x + D_{12} u \tag{3}$$

$$y = C_2 x + D_{21} w \tag{4}$$

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M_s \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_s & -D_s \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ L_1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ L_2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

$D_{12}, D_{21}$  는  $D_{12}^T D_{12} > 0, D_{21} D_{21}^T > 0$  를 만족하는 행렬이며, 첨자  $T$  는 전치행렬을 의미한다(자세한 사항 참고문헌 [1] 참조).

본 연구에서는 외란의 영향을 억제하기 위하여  $H^\infty$  제어 시스템을 설계한다.  $H^\infty$  제어문제란 Fig. 1 과 같은 페루프시스템의 외란입력  $w$  에서 제어출력  $z$  까지의 전달함수행렬  $T_{zw}$  의  $H^\infty$  norm 이 어떤 주어진  $\gamma > 0$  에 대하여 다음의 식

\* 책임저자(Corresponding Author)  
논문접수 : 2003. 9. 24.,      채택확정 : 2004. 1. 2.  
박중현 : 신라대학교 자동차기계공학과(sky@silla.ac.kr)

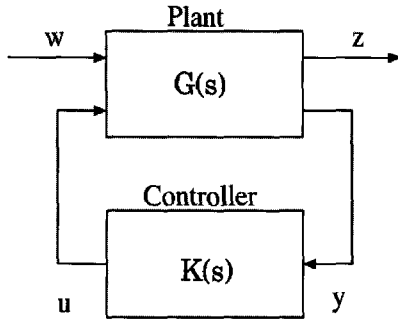


그림 1.  $H_\infty$  제어 시스템.  
Fig. 1.  $H_\infty$  Control system.

을 만족하는 내부안정인  $H^\infty$  컨트롤러  $K(s)$ 를 구하는 문제이다.

$$N = \|T_{zw}\|_\infty < \gamma \quad (5)$$

$$\|T_{zw}\|_\infty = \sup_w \sigma_{\max}(T_{zw}(jw))$$

여기서  $\sigma_{\max}(T_{zw})$ 는  $T_{zw}$ 의 최대특이값이다. 주파수영역에서 정의되어진 (5)의 사양은 다음과 같이 시간영역에서 표현 가능하다.

$$\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt < \gamma^2 \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt \quad (6)$$

(6)의 우변이 시스템에 대한 외란의 영향을 나타내므로,  $N$  값이 작을수록 외란에 의한 진동의 영향을 억제하는 것이 가능하다.

다음과 같은 두개의 대칭인 Riccati 방정식 (7)과 (9)를 생각하다[4,5].

$$(A - B_2 D_{12}^\# C_1)^T X + X^T (A - B_2 D_{12}^\# C_1) - X^T (B_2 R_{12}^{-1} B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) X + (D_{12}^\perp C_1)^T (D_{12}^\perp C_1) = 0 \quad (7)$$

$$E^T X = X^T E \geq 0 \quad (8)$$

$$(A - B_1 D_{21}^\# C_2) Y + Y^T (A - B_1 D_{21}^\# C_2)^T - Y^T (C_2 R_{21}^T C_2^T - \gamma^{-2} C_1 C_1^T) Y + (B_1 D_{21}^\perp) (B_1 D_{21}^\perp)^T = 0 \quad (9)$$

$$E Y = Y^T E^T \geq 0 \quad (10)$$

$$R_{12} = D_{12}^T D_{12} > 0, \quad R_{21} = D_{21} D_{21}^T > 0$$

$$D_{12}^\# = R_{12}^{-1} D_{12}^T, \quad D_{12}^\perp = I - D_{12} D_{12}^\#$$

$$D_{21}^\# = D_{21}^T R_{21}^{-1}, \quad D_{21}^\perp = I - D_{21}^\# D_{21}$$

이 두개의 Riccati 방정식을 만족하는 해  $X, Y$ 가 존재하며, 또한 다음이 성립한다고 가정한다.

$$\det(I_n - \gamma^{-2} Y X) \neq 0, \quad Z = (I_n - \gamma^{-2} Y X)^{-1} \geq 0 \quad (11)$$

이때, 다음과 같은  $H^\infty$  컨트롤러가 존재한다.

$$E \dot{x}_k = A_k x_k + B_k y \quad (12)$$

$$u = C_k x_k + D_k y \quad (13)$$

$$A_k = A - B_k C_2 + \gamma^{-2} Y^T C_1^T C_1 + (B_2 + \gamma^{-2} Y^T C_1^T D_{12}) C_k$$

$$B_k = (Y^T C_2^T + B_1 D_{21}^T) R_{21}^{-1}$$

$$C_k = R_{12}^{-1} \{ D_{12}^T C_1 + (B_2 + \gamma^{-2} Y^T C_1^T D_{12})^T Z \}$$

$$D_k = 0$$

### III. 최적설계문제

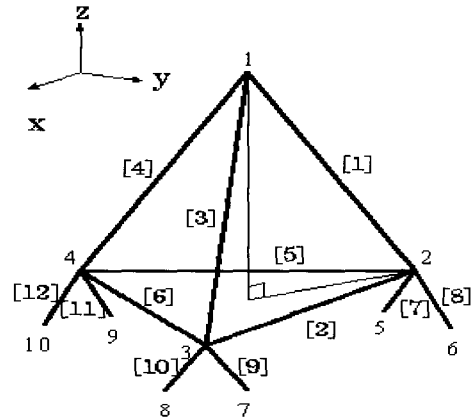


그림 2. 3차원 트러스 구조물.  
Fig. 2. 3-D truss structure.

본 연구에서는 구조시스템에 대한 최소중량설계문제와 제어시스템의 외란에 의한 영향 억제문제를 설계목적으로 생각한다. 대상구조물로서 트러스 구조물을 채용하면 시스템의 질량, 감쇠, 강성행렬은 트러스 부재 단면적의 함수로 모델링이 가능하다[6,7]. 구조 평가함수를 전체구조중량  $W$ , 제어 평가함수를  $H^\infty$  norm  $N$ 으로 한다. Fig. 2에 보이는 3차원 트러스 구조물을 설계대상으로 한다. 유연구조물인 3차원 트러스 구조물은 이하와 같은 무차원화 되어진 사양을 가진다고 가정한다.

장부재 길이 ( $a^l : l=1, \dots, 6$ )	10
단부재 길이 ( $a^s : s=7, \dots, 12$ )	$2\sqrt{2}$
밀도 ( $\rho$ )	1.0
중탄성계수 ( $E$ )	$10^4$

Fig. 2의 구조물에서, 절점 5~10은 각각  $x, y, z$  방향에 고정되어 있다. 또한, 구조감쇠특성은 다음과 같이 정의한다.

$$D(a) = 0.001 M_s + 0.001 K_s$$

구조 평가함수  $W$ 는 부재의 밀도, 길이, 단면적을  $\rho_i, l_i, a_i$ 라고 하면, 다음과 같이 계산된다.

$$W(a) = \sum_{i=1}^n \rho_i l_i a_i \quad (14)$$

$N$  은 구조물에 대하여 (15)의 구간에서  $\gamma$  이터레이션을 사용하여  $H^\infty$  최적제어문제를 풀었을 경우의  $\gamma$  의 최소값으로 한다.

$$0 < \gamma \leq 10 \quad (15)$$

1. 센서-액츄에이터 콜로케이션

센서와 액츄에이터가 동위치-동방향으로 배치(이것을 콜로케이션 이라고 부른다)되어진 구조물은 최소위상시스템이 된다. 즉, 불변영점의 실수부가 모두 마이너스인 시스템이다. 최소위상시스템은 그렇지않은 시스템과 비교하여 제어시스템 설계에 있어 우수하다고 알려져 있다[8]. 이 절에서는 모든 트러스 부재가 동일단면적을 가진 구조시스템에 대하여, 제어 평가함수  $N$  만을 최소화하는 제어시스템 설계를 실시한다. 그리고 제어시스템 설계에 있어 중요한 센서와 액츄에이터의 배치문제에 대하여 고찰해 본다.

Fig. 3(a)의 결과로부터, 센서-액츄에이터 콜로케이션 되어진 구조물이 그렇지 않은 구조보다 제어시스템 설계에 있어 우수하다는 사실을 알 수 있다. 따라서, 본 연구에서는 이후부터 Fig. 2 대상구조물의 최적설계문제를 고찰함에 있어, 센서와 액츄에이터가 콜로케이션 되어진 조건 - 절점 1 의  $x, y, z$  방향에 센서가 배치되어 변위를 측정하며, 절점 1 에 액츄에이터가  $x, y, z$  방향으로 배치되어 제어입력을 가하는 것으로 한다. Fig. 3(b)는 모든 트러스 부재가 동일단면적인 몇 가지 경우에 대한 구조중량  $W$  와  $H^\infty$  norm  $N$  의 관계를 나타낸다. 결과로부터 두 평가함수는 서로 경합하는 관계에 있다는 사실을 알 수 있다. 즉, 구조중량  $W$  가 커지면 norm  $N$  값은 보다 작은 해를 얻을 수 있으며, 역으로 구조중량이 작아지면  $H^\infty$  norm  $N$  값은 커진다는 사실을 나타낸다.

2. 통합최적설계

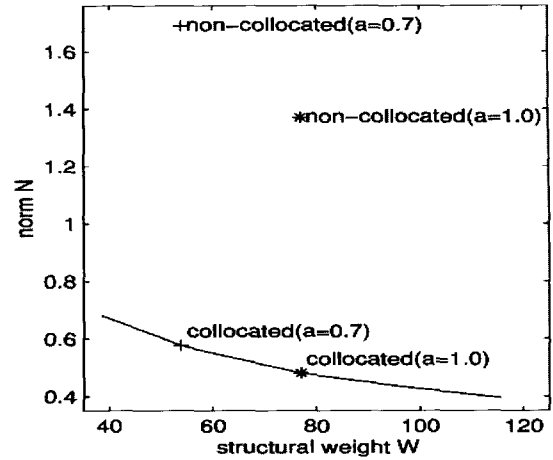
통합최적설계문제에서의 평가함수  $J$  를 정규화 되어진  $W$  와  $N$  의 선형합으로 하여 다음식과 같이 정의한다.

$$J(a) = w_W \frac{W(a)}{W_0} + w_N \frac{N(a)}{N_0} \quad (16)$$

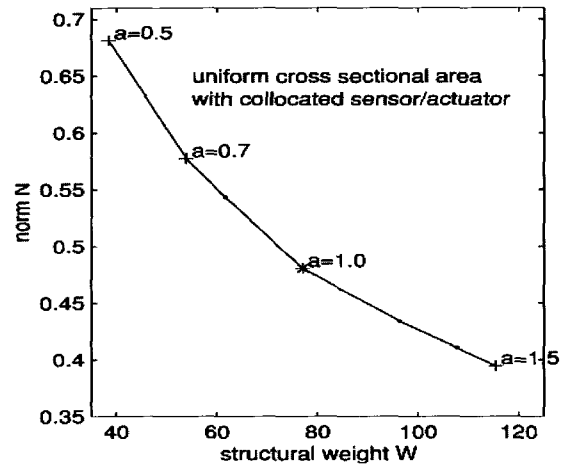
$w_W, w_N$  은 구조, 제어시스템의 평가함수에 대한 가중인자이며,  $W_0 (= 76.971), N_0 (= 0.485)$  는 트러스 부재 동일단면적  $a_i = 1.0 (i=1, \dots, 12)$  인 초기구조(initial structure)에서의 구조중량과  $H^\infty$  norm 의 값이다. 본 연구에서의 통합최적설계문제를 다음과 같이 기술한다.

$$\begin{aligned} \min_a J(a) &= w_W \frac{W(a)}{W_0} + w_N \frac{N(a)}{N_0} \\ \text{subject to } &\begin{cases} w_W + w_N = 1 \\ \text{There exists } X \text{ in Eq. (7)} \\ \text{There exists } Y \text{ in Eq. (9)} \\ \text{Eqs. (8), (10) and (11) satisfied} \\ a^{\min} \leq a \leq a^{\max} \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

설계변수로 부재단면적  $a$  를 채용하며,  $a^{\min}, a^{\max}$  는 단면



(a) Comparison between collocated case and non-collocated case



(b) Collocated case

그림 3. 구조중량  $W$  와 norm  $N$  의 관계 (동일 부재 단면적)

Fig. 3. Relation between weight  $W$  and norm  $N$ . (uniform cross sectional area)

적의 하한값, 상한값이다. 평가함수  $J$  를 최소화함으로써, 구조중량과 제어성능의 균형잡힌 최적설계를 실현 가능하게 한다. 그러나,  $H^\infty$  제어이론에서는,  $H^\infty$  제어문제의 해가 존재하는 경우에만  $H^\infty$  norm 이 정의 되기 때문에, 일반적으로 평가함수는 설계변수에 대하여 연속이 아니다. 이러한 최적화문제의 해결을 가능하게 하는 수법으로써, 비선형문제에 대한 심플렉스법을 이용한다[9,10]. 각 부재 단면적의 제약조건을 다음으로 한다.

$$0.5 \leq a_i \leq 1.5 \quad (i=1, \dots, 12) \quad (18)$$

먼저, 가중인자를 이하와 같이 설정하여 통합최적설계를 실행한다.

$$(w_W, w_N) = (0.5, 0.5) \quad (19)$$

이 설정(case1)에서의 최적화 결과, 평가함수  $J$  가 최소값을

7 질 경우의 구조중량  $W$  는 71.383, 제어성능의 평가함수인  $N$  값은 0.437 이었다. 초기구조와 비교하여 구조중량은 7.3%,  $H^\infty$  norm 값은 9.9% 감소시키는 것이 가능했다. 그리고, 가중인자를 이하와 같이 설정(case2)하여

$$(w_W, w_N) = (0.6, 0.4) \quad (20)$$

초적화결과,  $W$  가 64.945,  $N$  가 0.460 이었다. 초기구조와 비교하여,  $W$  를 15.6%,  $H^\infty$  norm 을 5.2% 줄이는 것이 가능하였다. 두 가지 어느 경우라도, 초기구조와 비교하여, 구조중량을 감소시키고, 외란에 의한 진동에 대한 제진성능을 향상시키는 설계가 가능함을 확인하였다. 다음으로, 가중인자를 이하와 같이 설정하여 통합최적설계를 실행하였다.

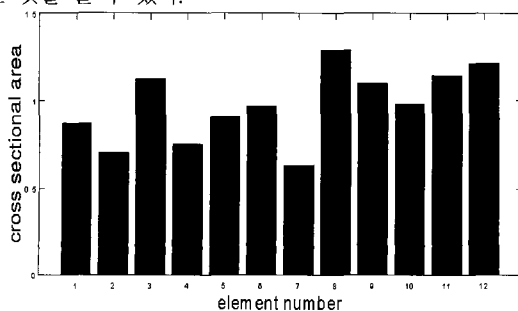
$$(w_W, w_N) = (0.7, 0.3) \quad (21)$$

이 설정(case3)에서는  $W$  는 54.693,  $N$  값은 0.519 이었다. 초기구조와 비교하여 구조중량은 28.9% 저감 시키는 것이 가능하였으나,  $N$  값은 7.0% 증가하여 외란의 영향에 의한 진동에 대한 제진성능은 악화되었다. 또한, 다음과 같은 설정 (c: se4)에서

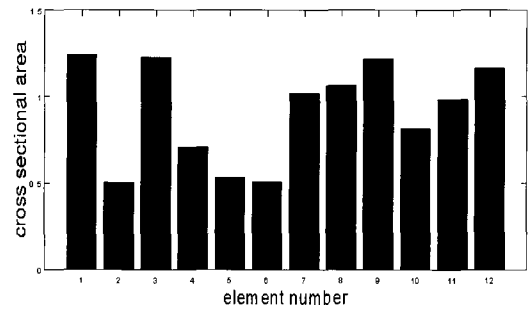
$$(w_W, w_N) = (0.3, 0.7) \quad (22)$$

최적화를 실행한 결과는,  $W$  가 85.308,  $N$  는 0.419 이었다. 이 경우는 초기구조에 비해  $N$  값은 13.6%저감 가능으로 외란에 의한 진동의 제진성능은 향상되었지만, 구조중량은 10.8% 증가하였다. 이러한 결과는, 설계자의 가중인자선택에 의하여 설계사양의 밸런스가 조절가능하다는 사실을 나타내고 있다. Fig. 4, 5 에 각 경우의 단면적을 나타낸다. Fig. 6 에 여러 경우의  $(w_W, w_N)$  에 대한 최적화 실행결과에 대한  $W$  와  $N$  의 관계를 나타낸다.

다음으로,  $N$  값과 제어성능에 관하여 고찰해 보겠다. 절점 2,3,4 의  $y$  방향에 Fig. 7 과 같은 외란이 가해진다고 가정하여, 몇 가지 경우에 있어서 절점 1 의  $y$  방향 변위 시간응답을 Fig. 8 에 나타낸다. Fig. 8(a), (b)는 부재 단면 동일구조인 경우의 응답이며, 이 경우 각각의  $W$  값은 38.485, 115.456,  $N$  값은 0.681, 0.393 이었다. 이 결과로부터 구조중량이 가벼울수록 외란의 영향이 크다는 사실을 알 수 있다. 또한, Fig. 8(c)와 (d)는 초기구조와 거의 동일 중량인 최적구조(case1)의 경우에 있어서의 응답이며, case1 의 구조가 외란의 영향이 작다는 것을 알 수 있다.



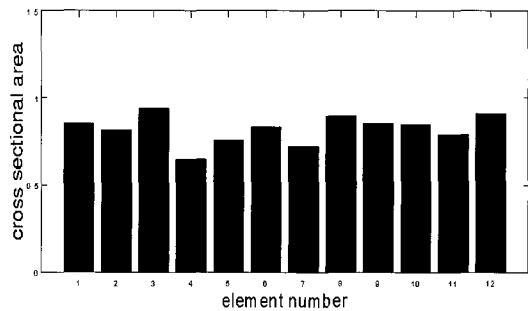
(a) Case 1:  $(w_W, w_N) = (0.5, 0.5)$



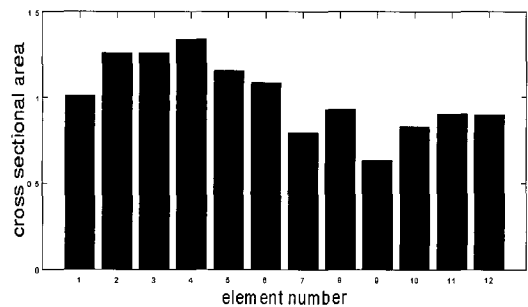
(b) Case 2:  $(w_W, w_N) = (0.6, 0.4)$

그림 4. 부재 단면적의 분포

Fig. 4. Distribution of cross sectional areas.



(a) Case 3:  $(w_W, w_N) = (0.7, 0.3)$



(b) Case 4:  $(w_W, w_N) = (0.3, 0.7)$

그림 5. 부재 단면적의 분포

Fig. 5. Distribution of cross sectional areas.

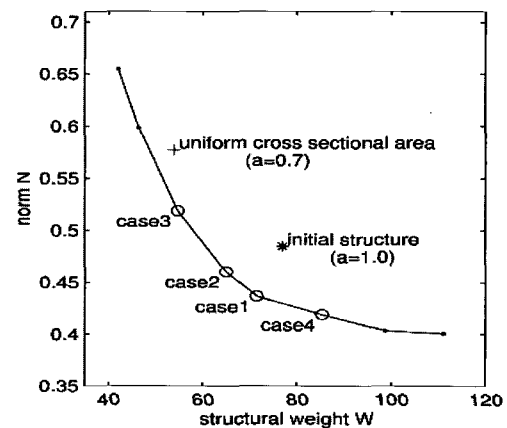


그림 6. 구조중량과  $H^\infty$  norm 의 관계

Fig. 6. Relation of structural weight and  $H^\infty$  norm.

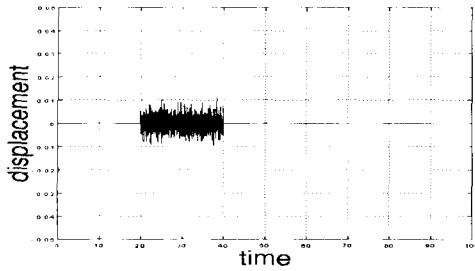
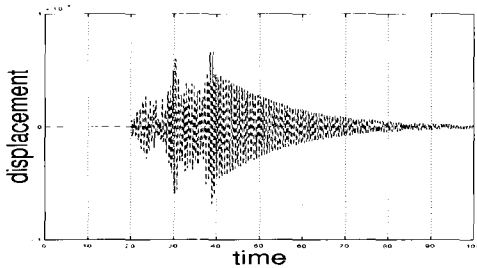
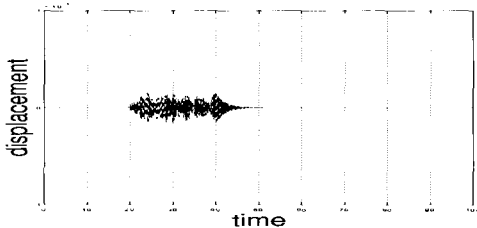


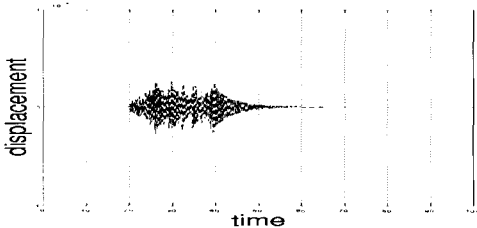
그림 7. 외란  
Fig. 7. Disturbance.



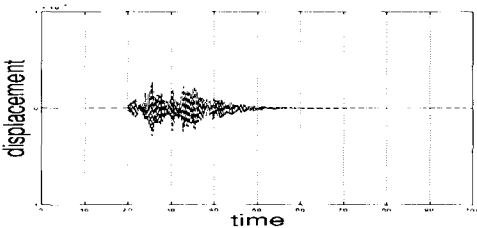
(a) uniform cross sectional areas ( $a_i = 0.5$ )



(b) uniform cross sectional areas ( $a_i = 1.5$ )



(c) initial structure ( $a_i = 1.0$ )



(d) optimal cross sectional areas (case 1)

그림 8. 절점 1의 변위 응답  
Fig. 8. Response of displacement at node 1.

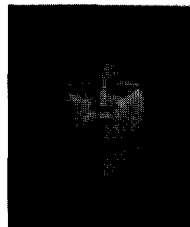
IV. 결론

본 연구에서는 디스크립터 방정식으로 표현되는 시스템에 대하여 구조-제어 통합최적 설계법을 제안하였다. 설계법에서의 평가함수로써, 구조 평가함수와 제어 평가함수의 가중인자포함 선형합을 사용하여, 외란에 대한 제진성능을 향상 시킴과 동시에 구조중량을 지감 시킬 수 있는 최소중량설계를 가능하게 하였다. 또한, 제어시스템 설계에 있어 센서-액츄에이터 콜로케이션의 유효성에 대하여도 고찰하였다.

참고문헌

- [1] 박중현, 김순호, "2 차원 트러스 구조물에 대한 제어/구조 시스템의 동시최적설계," 제어.자동화.시스템공학 논문지, 제 7 권, 제 10 호, pp. 812-818, 2001.
- [2] J. Onoda, and R. T. Haftka, "An Approach to Structure/Control Simultaneous Optimization for Large Flexible Spacecraft," *AIAA Journal*, vol. 25, no. 8, pp. 1133-1138, 1987.
- [3] M. Ikeda, "System Theory based on Descriptor Form," *SICE Journal*, vol. 24, no. 7, pp. 597-604, 1985.
- [4] K. Takaba, and T. Katayama, "Descriptor System and  $H^\infty$  Control," *SICE Journal*, vol. 34, no. 9, pp. 733-740, 1995.
- [5] J. E. Keh, and M. H. Lee, "Robust Controller Design for a Stabilized Head Mirror," *International Journal of the KSPE*, vol. 3, no. 4, pp. 78-86, 2002.
- [6] M. Petri, *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*, Cambridge University Press, pp. 231-392, 1990.
- [7] J. H. Park, and K. R. Cho, "Optimal Structural Design for Flexible Space Structure with Control System Based on LMI," *KSME International Journal*, vol. 16, no. 1, pp. 75-82, 2002.
- [8] M. Ikeda, and K. Takeuchi, "Controller Design for Space Structure with Collocated Sensors and Actuators," *SICE Journal*, vol. 30, no. 10, pp. 1209-1215, 1994.
- [9] Y. Yoshise, "Optimization Method for Convex Programming Problem," *Trans. of ISCIE*, vol. 38, no. 3, pp. 155-160, 1994.
- [10] M. J. Box, D. Davies, and W. H. Swann, *Non Linear Optimization Methods*, Bahukan Press, pp. 47-125, 1972.

박 중 현



1967년 11월 13일생. 1992년 부산대학교 생산기계공학과 (공학사). 1995년 고배대학 시스템공학전공 (공학석사). 2000년 고배대학 시스템과학 전공(공학박사). 2001년~현재 신라대학교 자동차 기계공학과 교수. 관심분야는 최적제어, 강인성제어, 최적설계.