

건성마찰력을 받는 탄성재료의 안정성에 관한 연구

고준빈[†] · 장탁순* · 류시웅**

(2003년 7월 7일 접수, 2003년 12월 11일 심사완료)

Study on the Stability of Elastic Material Subjected to Dry Friction Force

Jun-Bin Ko, Tag-Soon Jang and Si-Ung Ryu

Key Words : Elastic Foundation (탄성지지), Distributed Follower Force(분포종동력), Flutter(플러터), Divergence(다이버전스), Dry Frictional Force(건성마찰력)

Abstract

This paper discussed on the stability of elastic material subjected to dry friction force for four boundary conditions: clamped-free, clamped-simply supported, simply supported-simply supported, clamped-clamped. It is assumed in this paper that the dry frictional force between a tool stand and an elastic material can be modeled as a distributed follower force. The friction material is modeled for simplicity into a Winkler-type elastic foundation. The stability of beams on the elastic foundation subjected to distribute follower force is formulated by using finite element method to have a standard eigenvalue problem. It is found that the clamped-free beam loses its stability in the flutter type instability, the simply supported-simply supported beam loses its stability in the divergence type instability and the other two boundary conditions the beams lose their stability in the divergence-flutter type instability.

기호설명

$\mathbf{e}(\zeta)$: 형상함수 벡터
 \mathbf{E} : 단위 행렬
 EI : 보의 굽힘강성
 k : 탄성지지의 스프링 상수
 L : 보의 전체 길이
 m : 보의 단위 길이당 질량
 N : 보 전체의 요소수
 q : 분포종동력
 t : 시간
 U : 탄성 포텐셜에너지
 W_c : 작용력의 보존 성분에 의한 일
 δW_{nc} : 비보존 성분에 의한 가상일

x, y : 각각 보의 축방향, 횡방향 좌표
 ρ : 무차원화된 분포종동력
 ρ_{cr} : 무차원화된 임계 분포종동력
 ρ_D : 다이버전스 임계 분포종동력
 ρ_F : 플러터 임계 분포종동력
 ζ : 무차원화된 보의 국부 좌표
 η : 무차원화된 횡방향 변위
 κ : 무차원화된 탄성지지의 스프링 상수
 λ : 복소고유치
 ξ : 무차원화된 축좌표
 σ : 고유치의 실수부분
 τ : 무차원화된 시간
 ω : 고유진동수

[†] 책임저자, 회원, 한밭대학교 기계설계공학과

E-mail : kjb1002@hanbat.ac.kr
 TEL : (042)821-1833 FAX : (042)821-1587

* 충남대학교 대학원 기계공학과

** 한밭대학교 기계설계공학과

1. 서론

금속 간의 상대운동은 접촉면에서의 건성 마찰에 의한 소음과 진동을 유발하게 되고, 이러한 소

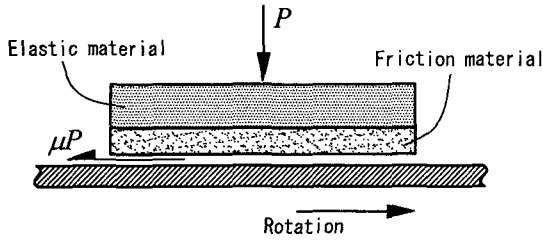


Fig. 1 Conceptual sketch of elastic beam subjected to distributed friction

음과 진동은 인간에게 불쾌감을 줄뿐만 아니라 시스템 자체의 안정성에 중요한 영향을 미치므로 많은 연구자들의 관심의 대상이 되고 있다. 이러한 마찰에 기인한 진동의 대표적인 예로서는 공작기계의 채터(chatter),⁽¹⁾ 자동차 브레이크 소음(brake noise), 스틱슬립(stick-slip) 등이 있다. 일반적으로 회전체의 가진 하에 있는 재료의 진동을 지배하는 운동방정식은 기본적으로는 분포 마찰력이 주어지는 보 모델과 같은 것으로 알려져 왔다. 이러한 분포 종동력이 주어지는 보와 같은 모델의 동적 안정성 문제는 비보존 탄성 안정성 문제로써 많은 연구자들에 의해 연구가 이루어져 왔다. 그 연구의 최초의 시도는 1964년 Pflüger⁽²⁾에 의해 이루어졌다. 그는 양단단순지지 보를 모델로 하여 안정성을 연구하였으며, 다이버전스에 의해 안정성을 잃게 된다는 것을 알아냈다. 그 후 Leipholz⁽³⁾, Sugiyama 와 공동 연구자들⁽⁴⁾은 다양한 경계조건(한단고정-타단자유, 한단고정-타단단순지지, 양단단순지지, 양단고정) 하에서 불안정 형태와 임계값을 구하였다. 이 연구들의 결과로써는 한단고정-타단자유 보에서만 플러터형 불안정이 발생하고 나머지 3 개의 경계조건 하에서는 다이버전스형 불안정이 발생한다는 것을 밝혔다. 최근 Kang 과 Tan⁽⁵⁾은 자동차와 항공기의 브레이크 시스템으로부터 상정한 역학적 모델로써 주기적 가진 하에서의 Leipholz's beam 의 동적 불안정성을 연구하였다.

본 연구에서는 회전체, 마찰재, 탄성재료로 구성되어 있는 시스템 (Fig. 1)에 있어서 탄성재료는 균일 단면의 보로서, 회전체와 탄성재료 사이의 마찰력은 분포 종동력으로서, 마찰재는 탄성지지로서 모델화하여 4 가지 경계 조건과 탄성지지의 스프링 강성의 변화에 따른 안정성에 대하여 연구하였다.

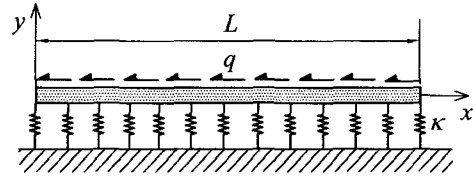


Fig. 2 Mathematical model of a beam on an elastic foundation subjected to distributed follower force

2. 수치 해석

2.1 수학적 모델

Fig. 2 는 분포 접선 종동력을 받는 길이 L의 일정한 단면을 가진 보에 있어서, 굽힘강성은 EI, 단위 길이당 보의 질량 m 이고, 보의 탄성기초의 스프링 상수는 k 이다.

2.2 확장된 헤밀턴 원리에 의한 정식화

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W_c - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} (\delta W_{nc}) dt = 0 \quad (1)$$

여기서 T 는 운동에너지, W_c 는 작용력의 보존성분에 의한 일, U 는 보와 분포 스프링에 저장된 탄성 포텐셜 에너지를 나타낸다. 그리고 δW_{nc} 는 비 보존성분에 의한 가상 일을 나타낸다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (2)$$

$$W_c = \frac{1}{2} \int_0^L q(L-x) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (3)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L ky^2 dx. \quad (4)$$

$$\delta W_{nc} = -\frac{1}{2} \int_0^L q \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \delta y dx. \quad (5)$$

식 (2)~(5)를 식 (1)에 대입하고 변분하면 다음과 같다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L m \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) dx + \int_0^L \left\{ q(L-x) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \right\} dx - \int_0^L \left\{ EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right\} dx - \int_0^L ky \delta y dx \right] dt$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L \left\{ q \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \delta y \right\} dx \right] dt = 0. \quad (6)$$

계산상 편리를 위해 무차원 파라메타를 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad (7)$$

$$\rho = \frac{qL^3}{EI}, \quad \kappa = \frac{kL^4}{EI}.$$

식 (7)의 무차원 파라메타를 식 (6)에 대입하면 다음과 같다.

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right) \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right) d\xi + \int_0^1 \left\{ \rho(1-\xi) \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \right\} d\xi \right. \\ \left. - \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right) \right\} d\xi - \int_0^1 \kappa \eta \delta \eta d\xi \right] d\tau \\ - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\int_0^1 \left\{ \rho \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \delta \eta \right\} d\xi \right] d\tau = 0. \quad (8)$$

2.3 유한요소법의 적용

유한요소법을 적용하여 보를 N 개의 균일한 요소로 분할하면 Fig. 3 에서와 같다.

Fig. 3 에서 국부좌표 ($\zeta = N\xi - i + 1; 0 \leq \zeta \leq 1$) 를 식 (8)에 대입하면 다음과 같이 나타낸다.

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\sum_{i=1}^N \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right) \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right) + \rho(1-\xi) \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right) - \kappa \eta \delta \eta - \rho \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \delta \eta \right\}^{(i)} d\xi \right] d\tau = 0. \quad (9)$$

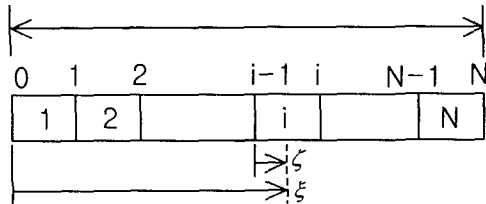


Fig. 3 Finite element model of the beam

변위함수($\eta^{(i)}(\zeta, \tau) = \mathbf{e}^{(i)}(\zeta) \cdot \mathbf{v}^{(i)}(\tau)$)를 도입하고 식 (9)에 대입하면 다음과 같은 특성방정식을 얻는다.

$$[\mathbf{M}]\{\mathbf{v}_{\tau\tau}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{v}\} = \mathbf{0} \quad (10)$$

여기서 $[\mathbf{M}]$ 은 조합된 질량행렬, $[\mathbf{K}]$ 은 조합된 강성행렬이다.

2.4 고유치 문제

식 (10)에 있어서 변위벡터 $\{\mathbf{v}(\tau)\}$ 를 다음과 같이 놓는다.

$$\{\mathbf{v}(\tau)\} = \{\mathbf{X}\} \exp(\lambda\tau) \quad (11)$$

최종적으로 다음과 같은 일반 고유치 문제에 귀착된다.

$$([\mathbf{M}^{-1}][\mathbf{K}] + \lambda^2 [\mathbf{E}]) = \mathbf{0} \quad (12)$$

2.5 안정성 판별

식 (12)에 있어서 특성근 λ 는, 일반적으로 다음과 같은 형태의 복소수로 나타낼 수 있다.

$$\lambda = \sigma \pm i\omega \quad (13)$$

여기서 σ 는 진폭의 증가, ω 는 진동수를 나타낸다.

따라서 안정성 판별은 다음과 같다.

- 안정(Stable): $\lambda = \pm i\omega$ ($\sigma = 0, \omega \neq 0$)
- 정적불안정(Divergence): $\lambda = \sigma$ ($\sigma > 0, \omega = 0$)
- 동적불안정(Flutter): $\lambda = \sigma \pm i\omega$ ($\sigma > 0, \omega \neq 0$)

각각의 현상을 Fig. 4 에 나타낸다.

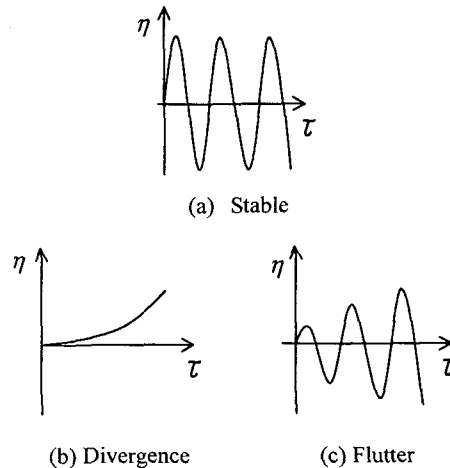


Fig. 4 Stability of undamped system

Table 1 Numerical results as the number of finite elements

Boundary condition	The number of finite elements			
	10	20	30	50
Clamped-free	40.06	40.05	40.05	40.05
Clamped-simply	57.02	57.01	57.01	57.01
Simply-simply	18.96	18.96	18.96	18.96
Clamped-clamped	80.28	80.26	80.26	80.26

Table 2 Comparison of results of three different theoretical analysis when $\kappa = 0$

Boundary condition	Type of instability	FEM (Present paper)	Difference method (Ref. [3])	Galerkin's method (Ref.[1],[2])
Clamped-free	Flutter	40.05	40.05	40.70
Clamped-simply	Divergence	57.01	56.99	57.95
Simply-simply	Divergence	18.96	18.95	18.96
Clamped-clamped	Divergence	80.26	80.22	81.37

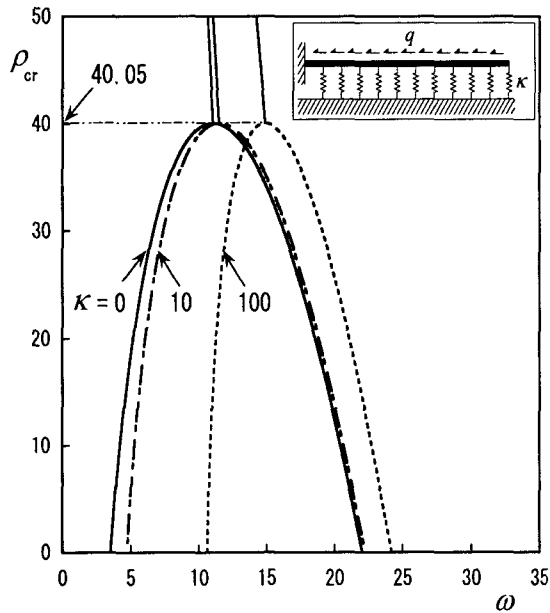


Fig. 5 First and second Eigen-frequencies for distributed follower forces when the stiffness of elastic foundation $\kappa = 0, 10, 100$

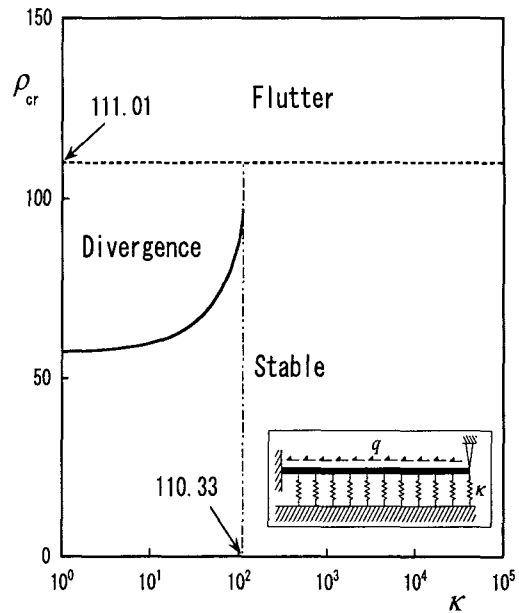


Fig. 6 Critical distributed follower force depending on the stiffness of elastic foundation

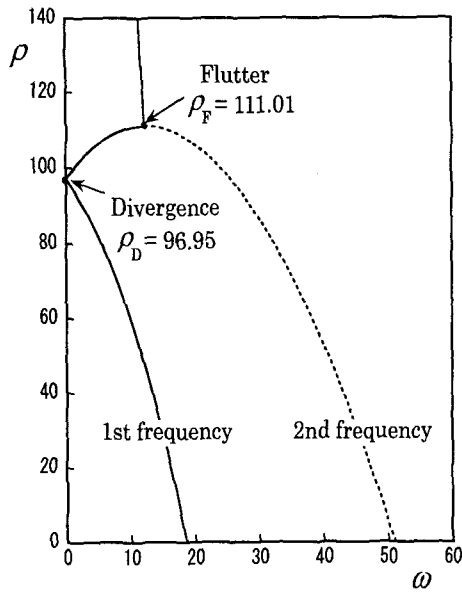
3. 수치해석 결과 및 토론

본 연구는 수치 시뮬레이션을 하기 위해 유한요소법을 적용하였고, 고정-자유보, 고정-단순지지보, 양단 단순지지보, 양단 고정보와 같은 경계 조건의 변화에 따른 안정성을 조사할 수 있는 계산 프로그램을 개발하였다.

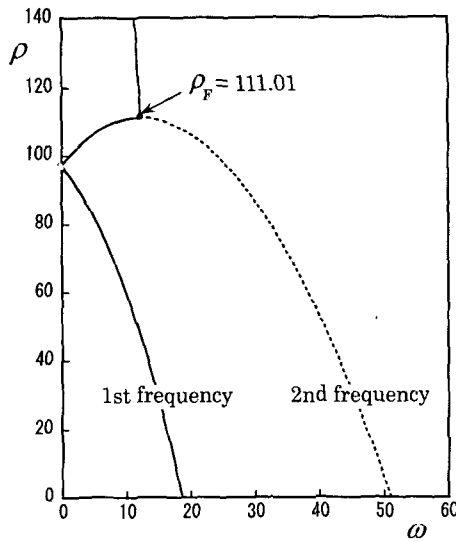
해의 정확도와 수렴도를 검증하기 위하여 탄성지지의 스프링 상수가 0 일 경우에 Table 1에서는 요소의 분할수에 따른 임계 분포 중동력 값을 계산하였고, Table 2에서는 다른 계산 방법의 참고 문헌과 비교하였다.

Fig. 5는 한단고정-타단 단순지지 보에 있어서 탄성지지의 스프링 상수 $\kappa = 0, 10, 100$ 일 경우의 분포 중동력의 변화에 따른 1차 고유진동수와 2차 고유진동수를 나타내고 있다. 이 그림에서는 1차 고유진동수와 2차 고유진동수가 일치하는 플러터형 불안정이 발생한다. 임계 분포 중동력 값 $\rho_{cr} = 40.05$ 은 κ 의 크기에 관계없이 일정한 것을 알 수 있다.

Fig. 5는 한단고정-타단 단순지지 보에 있어서 탄성지지의 스프링 상수 $\kappa = 0, 10, 100$ 일 경우의 분포 중동력의 변화에 따른 1차 고유진동수와 2차 고유진동수를 나타내고 있다. 이 그림에서는 1차 고유진동수와 2차 고유진동수가 일치하는 플러터형 불안정이 발생한다. 임계 분포 중동력



(a) $\kappa = 110.32$



(b) $\kappa = 110.33$

Fig. 7 First and second Eigen-frequencies for distributed follower forces when the stiffness of elastic foundation $\kappa = 110.32, 110.33$

값 $\rho_{cr} = 40.05$ 은 κ 의 크기에 관계없이 일정한 것을 알 수 있다.

이러한 계산 결과는 1972 년 Smith 와 Herrmann⁽⁶⁾ 에 의해 연구된 결과와 유사하다. 그들은 집중 종동력을 받는 탄성지지된 Beck's column 에서 탄성 지지의 스프링 상수 값이 증가함에 따라 고유진동수 값은 증가하지만 임계 플러터 값에는 변동이 없다는 예상치 못한 결과를 도출했다.

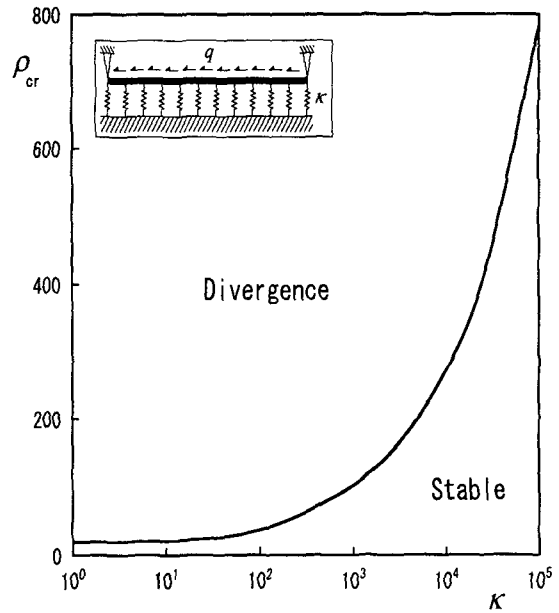


Fig. 8 Critical distributed follower force depending on the stiffness of elastic foundation

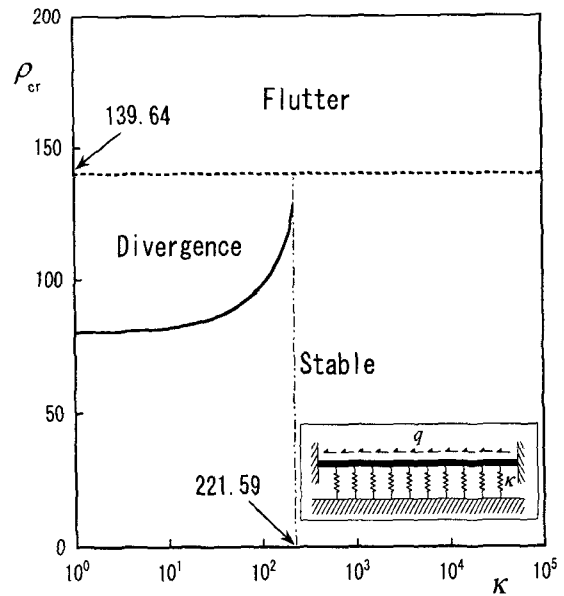


Fig. 9 Critical distributed follower force depending on the stiffness of elastic foundation

Fig. 6 는 한단 고정-타단 단순지지의 경우 탄성 지지의 스프링 상수 κ 값의 변화에 따른 임계 분포 종동력 값과 불안정 형태를 나타낸 그림이다. 이 그림에서는 $\kappa < 110.33$ 의 구간에서는 다이버전스형 불안정이 발생하며, 스프링 상수 값이 증가함에 따라 임계 분포 종동력 값도 증가하는

것을 알 수 있다. $\kappa = 110.33$ 에서 임계 분포 중동력 값이 점프(jump)하여 다이버전스형 불안정에서 플러터형 불안정으로 천이(transition)된다. 또한 이 그림에서 알 수 있는 것은 Fig. 5 에서와 마찬가지로 κ 의 값의 크기에 관계없이 플러터가 발생하는 임계 분포 중동력 값 ρ_F 는 111.01 로 일정하다는 것을 알 수 있다.

Fig. 7(a), (b)는 Fig. 6 에서의 점프현상을 설명하기 위하여 각각 $\kappa = 110.32, 110.33$ 일 경우의 분포 중동력의 변화에 따른 1 차 고유진동수와 2 차 고유진동수의 변화를 나타내고 있다. Fig. 7(a)에서는 1 차 고유진동수가 0 이 되는 $\rho = 96.95$ 에서 다이버전스가 일어나고 그 후, 1 차와 2 차 고유진동수가 일치하는 $\rho = 111.01$ 에서 플러터형 불안정이 발생한다. Fig. 7(b)에서는 다이버전스형 불안정은 발생하지 않고 $\rho = 111.01$ 에서 플러터형 불안정만 발생하는 것을 알 수 있다.

Fig. 8 는 양단 단순지지의 경우 탄성지지의 스프링 상수 κ 값의 변화에 따른 임계 분포 중동력 값 ρ_{cr} 과 불안정 형태를 나타낸 그림이다.

이 그림에서는 κ 값의 크기에 관계없이 다이버전스형 불안정만 발생하는 것을 알 수 있다. 또한 κ 값의 크기가 증가함에 따라 임계 분포 중동력 값도 크게 증가하는 것을 알 수 있다.

Fig. 9 는 양단 고정 고정의 경우 탄성지지의 스프링 상수 κ 값의 변화에 따른 임계 분포 중동력 값 ρ_{cr} 과 불안정 형태를 나타낸 그림이다.

이 그림에서는 $\kappa < 221.59$ 의 구간에서는 다이버전스형 불안정이 발생하며, 스프링 상수 값이 증가함에 따라 임계 분포 중동력 값도 증가하는 것을 알 수 있다. $\kappa = 221.59$ 에서 임계 분포 중동력 값이 점프(jump)하여 다이버전스형 불안정에서

플러터형 불안정으로 천이(transition)된다. 또한 이 그림에서 알 수 있는 것은 Fig. 5, 6 에서와 마찬가지로 κ 의 값의 크기에 관계없이 플러터가 발생하는 임계 분포 중동력 값 ρ_F 는 139.64 로 일정하다는 것을 알 수 있다.

4. 결론

본 연구는 분포 중동력을 받는 탄성지지 보에 있어서 경계 조건과 탄성지지 스프링 상수의 변화에 따른 안정성을 조사하였다. 얻어진 주요한 결론을 요약하면 다음과 같다.

(1) 외팔보의 경우 탄성지지의 스프링 상수 값의 크기에 관계없이 플러터형 불안정이 발생한다. 또한, 탄성지지의 스프링 상수의 크기는 플러터가 발생하는 임계값에는 영향을 미치지 않는다.

(2) 양단 단순지지의 경우 탄성지지의 스프링 상수 값의 크기에 관계없이 다이버전스형 불안정이 발생하고, 탄성지지의 스프링 상수 값이 클수록 임계값도 증가한다.

(3) 탄성지지가 없이 분포 중동력을 받는 보의 경우⁽²⁻⁴⁾와 달리 고정-단순지지, 양단 고정 고정 고정 고정의 경우 탄성지지의 스프링 상수 값의 크기에 따라 다이버전스형 불안정이 발생하고 점프 되어 플러터형 불안정으로 천이가 일어난다. 또한, 탄성지지의 스프링 상수의 크기는 플러터가 발생하는 임계값에는 영향을 미치지 않는다.

참고문헌

- (1) Lee, S. Y., Kim, J. W., Lee, J. M. and Kim, G. B., 2003, "Chatter Analysis of a Parallel Mechanism-based Universal Machining Center," *KSME International Journal*, Vol. 17(5), PP. 691~697.
- (2) Pflüger, A., 1964, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, Springer-Verlag.
- (3) Leipholz, H., 1980, "Stability of Elastic Systems," Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn.
- (4) Sugiyama, Y., Katayama, T. and Sekiya, T., 1971, "Studies on Non-Conservative Problems of Instability of Columns by Difference Method," *Proceedings of the Nineteenth Japan National Congress for Applied Mechanics*, pp. 23~31.
- (5) Kang, B. and Tan, C. A., 2000, "Parametric Instability of a Leipholz Column under Periodic Excitation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 229(5), pp. 1097~1113.
- (6) Smith, T. E. and Herrmann, G., 1972, "Stability of a Beam on an Elastic Foundation Subjected to Follower Forces," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 39, pp. 628~629.