

압전 벤더의 효과적인 모델링 기법

박종규* · 문원규†

(2003년 5월 21일 접수, 2003년 12월 26일 심사완료)

An Effective Quasi-static Modeling of the Piezoelectric Benders

Jong-kyu Park and Won-kyu Moon

Key Words : Piezoelectric(압전), Unimorph Bender(유니모프 벤더), Bimorph Bender(바이모프 벤더), Triple-layer Bender(트리플 레이어 벤더), Quasi-static Model(준평형 모델)

Abstract

In this article, the constitutive relations of three types of piezoelectric benders, which are a unimorph bender, a bimorph bender and a triple-layer bender, are derived based on the beam theory under the quasi-static equilibrium condition. The relation coefficients are described as the geometry and material properties of the benders. More general constitutive relations involving fixed-free, fixed-roll, and fixed-simply supported boundary conditions under the inconsistent length condition between the piezoelectric layer and the nonpiezoelectric one are discussed. The complicated constitutive relations can be easily calculated and checked by using the symbolic function in 'Mathematica'. The relation coefficients for the benders are plotted in three dimensional graph using the developed program.

기호설명

Subscript p : 압전물질
 Subscript m : 비압전 물질
 F_i : 힘
 M_i : 모멘트
 $\frac{1}{\rho_i}$: 곡률반경
 t_i : 두께
 D_i : 전속 밀도
 w : 너비
 V : 전압
 L_i : 길이
 d_{ij} : 압전 상수

$s_{11}^E = s_p$: 압전 유연상수
 ϵ_{33}^T : 유전 상수
 $\xi = \frac{t_m}{t_p}$: 두께 비
 $\eta = \frac{s_p}{s_m} = \frac{E_m}{E_p}$: 영률 비
 δ : 변위
 q : 전하
 v : 변형 체적
 P : 압력
 α : 각도
 d_1 : 힘의 작용점
 d_2 : 압력의 작용범위
 $k^2 = \frac{d_{31}^2}{\epsilon_{33}^T s_p}$: 기전 결합상수
 $\lambda_1 = \frac{L_p}{L}$: 길이비

* 회원, 포항공과대학교 대학원 기계공학과
 † 책임저자, 회원, 포항공과대학교 기계공학과
 E-mail : wkmoon@postech.ac.kr
 TEL : (054)279-2184 FAX : (054)279-5899

$$\lambda_2 = \frac{d_1}{L} \quad : \text{길이대 힘작용점}$$

$$\lambda_3 = \frac{d_2}{L} \quad : \text{길이대 압력작용점}$$

1. 서론

압전 트랜스듀서(transducer)는 최근 마이크로/나노(Micro/Nano) 기술 발전에 따른 마이크로 시스템에 대한 관심이 고조됨에 따라 마이크로 환경에 적용되는 주요한 기계 요소로 널리 이용되고 있다.⁽¹⁾ 압전 트랜스듀서는 기계적 에너지를 전기적 에너지 형태로 변환하거나 전기적 에너지를 기계적 에너지로 전환시켜주는 장치로서 미세 시스템의 구동을 위한 압전 구동기나 각종 센서를 그 예로 들 수 있다.⁽²⁾ 이 들 중 압전 벤더는 압전 성질을 이용하여 바이메탈(Bimetal)에서와 같이 길이 방향 변형을 굽힘 변형으로 만들어서 이용하는 구동기나 센서를 말한다. 본 연구에서는 이러한 압전 벤더를 보다더 손쉽게 수학적으로 모델링하고 설계하는가에 주안점을 두고 있다.

압전 벤더에는 그 층의 개수와 종류에 따라 유니모프(Unimorph), 바이모프(Bimorph) 트리플 레이어(Triple-layer) 그리고 멀티 레이어(Multi-layer) 벤더(Bender) 등을 들 수 있다. 이 중 유니모프 벤더는 압전체 박판을 다른 물질로 된 판에 부착하여 바이메탈과 같이 굽힘 기능을 하도록 만든 것이고 바이모프 벤더는 압전판 두 개를 부착하여 쓰는 것이다. 그리고 트리플 레이어 벤더는 기계적 안정성을 높이기 위하여 중앙에 금속과 같은 다른 물질의 아래와 위에 압전 층을 두는 것을 말한다. 마지막으로 멀티레이어 벤더는 여러 압전층을 이용하여 그 변위와 힘을 극대화한 것이다. 이러한 벤더 방식은 압전체를 구동기에 사용할 때 비교적 큰 변위를 얻을 수 있고 정밀 위치제어에 용이하기 때문에 널리 쓰이고 있다.

이와 같은 유니모프나 바이모프 구동기의 정적 특성과 동적 특성을 규명하여 예상하기 위해서는 수학적 모델링이 필요하며 이를 위해서는 우리가 알고자 하는 상태 방정식의 유도가 필요하다. 이때 이러한 상태방정식의 해를 구하기 위해 그 시스템의 형상과 재질특성에 따른 상태 변수간의 대수적 연산 관계식을 필요로 하는 데 이를 압전 벤더 구성 방정식이라 한다. 이러한 구성방정식은 시스템 특성을 나타낼 뿐만 아니라 정적 그리고 동적 모델에 기초가 되기 때문에 더 정확하고 효

과적으로 유도할 필요성이 있다. 특히 압전의 경우 전기 기계 결합 특성을 가지고 있으며 비등방성 특성을 보유하고 있기 때문에 모델링 자체가 매우 복잡하게 이루어져 있어서 처음 접하거나 이용하고자 하는 사람들이 많은 어려움을 겪는다. 따라서 좀더 간편하면서도 효과적인 모델링이 제안될 필요성이 제기되었다.

지금까지 국내에서는 이러한 압전 구성방정식을 유도하기 위한 노력이 거의 없었으나 국외에서는 많은 연구가 이루어져 왔다.⁽³⁻⁷⁾ 이들 중 가장 대표적인 연구로써 1990 년 초반에 Smits 의 것을 들 수 있다.^(3,4) 그들은 보형상의 유니모프와 바이모프 구성방정식을 Total Internal Energy Method 를 이용하여 유도했다. 특히 4 가지 내부인자(Internal parameter)와 4 가지 외부인자(External parameter)간의 구성 방정식을 행렬 형태로 정리함으로써 이용하기에 편의성을 더하였다. 그러나 여기에는 보형상에만 국한되어 있고 전극의 영향이나 다른 경계조건, 각 층 간의 길이 변화에 대한 고려가 없다. 또한 1999 년에 Cross et al.은 기계적 안정성을 강조한 트리플 레이어 벤더의 압전 구성방정식을 앞선 Smits 와 유사한 방법을 통해 유도하고⁽⁵⁾ 기존에 유도되었던 바이모프 유니모프 트리플 레이어의 특성을 분석하였다.⁽⁶⁾ 그러나 여기에도 구성방정식 유도의 편의를 위해 중앙면(Neutral surface)을 기준으로 대칭 형상(Symmetric shape)을 가정하여 유도하였고 각 층의 길이가 다를 경우나 경계조건이 바뀔 경우 적용하는 것을 보여주지는 못했다. 그리고 Quate et al.은 능동형 탐침(Active Probe) 개발을 위하여 구동기와 센서가 일체형으로 결합하는 압전 벤더 설계과정을 제시하였다.⁽⁷⁾ 여기에서 그는 복잡한 구성방정식을 일반화하여 푸는 데에는 어려움이 따르기 때문에 미리 형상 수치를 결정하고 변형이 없는 중앙면(neutral surface)의 위치를 적절히 위치시킴으로써 센서와 구동기 간의 커플링(Coupling)을 최소화하고자 하였다. 이 연구에서는 전극의 영향이나 형상의 영향을 고려하였으나 이미 정해진 형상과 경계조건 하에서만 적용이 가능하다. 따라서 보다 간편하고 효과적인 구성방정식 유도를 위해서는 이러한 구성방정식을 유도하기 위한 새로운 형태의 알고리즘(Algorithm)을 필요로 하며 그것을 프로그래밍화 함으로써 경계조건의 변화와 길이 변화 그리고 층의 개수의 변화에 유연해 질 수 있다.

본 연구에서는 역학에서의 평형 방정식을 중심으로 하여 기존 연구와는 달리 압전 층과 일반 탄성 층 간의 길이가 일치하지 않는 일반적인 조건 하에서 외팔보(Cantilever) 경계조건, Fixed-Roll 경

계조건 그리고 Fixed-Simply supported 경계조건을 만족하는 유니모프, 바이모프 그리고 트리플 레이어 벤더의 압전 구성방정식 유도 기법을 제시한다. 그리고 이 유도기법을 이용해서 외팔보 형태의 유니모프, 바이모프 그리고 트리플 레이어 벤더 구동기의 간략화된 2X2 행렬 형태의 압전 구성방정식의 도출한다. 그리고 일반화된 압전 구성방정식을 구하기위해 컴퓨터 연산 소프트웨어인 'Mathematica'의 'Symbolic Calculation' 기능을 이용해서 프로그래밍화하여 그 결과를 검증하고 각 유도된 관계식 상수들의 그래프를 제시한다.

2. 유도 과정

2.1 압전 벤더 구성 방정식의 유도 기법

본 연구에서 유도되는 압전 벤더 구성방정식은 기본적으로 고체역학의 빔 이론(Beam Theory)을 기반으로 하고 있기 때문에 일반적인 원칙과 가정이 동일하게 적용된다. 먼저 압전 벤더 구동기의 구성방정식을 최대한 간편하게 구하기 위해서는 공학적 설계 개념을 적용하여 결과 식에 큰 영향을 미치지 않는 범위에서의 가정과 근사를 적용하는 것이 효과적이다. 그러한 가정과 근사는 대략 다음과 같이 정리될 수 있다.

(i) 두께방향의 응력 분포는 1-3 방향 압전 효과에 의해 일정하게 분포된 응력과 굽힘현상에 의한 응력을 합하는 것에 의해 결정된다.

(ii) 오일러빔(Euler Beam) 이론에서 이용되는 가정들을 적용한다. (즉 길이가 두께나 폭에 비해 훨씬 크기 때문에 전단 응력(Shear stress)에 의한 영향을 무시할 수 있다.)

(iii) 곡률 반경은 각 층의 두께에 비해 매우 크다.

(iv) 각 층의 접합면에서 미끄러짐 현상은 없다. 이러한 가정과 함께 준 평형 조건 하에서 역학(Mechanics)의 3 가지 원칙에 의한 식을 적용함으로써 우리가 알고자 하는 곡률반경과 모멘트와 전압 간의 관계식과 전속밀도와 모멘트와 전압간 관계식을 유도할 수 있다.

원칙 (I) Fig. 1 에서 알 수 있듯이 평형 조건을 이루어야 하므로 다음 힘과 모멘트의 준 평형방정식(Balance equation)이 성립되어야 한다.

$$\sum_{i=layer} F_i = 0, \quad \sum_{i=layer} M_i = 0 \quad (1-a,b)$$

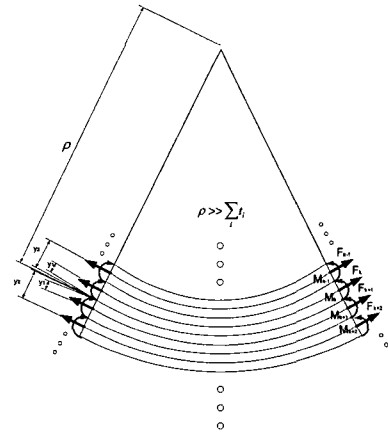


Fig. 1 Radius of curvature and external forces in the multiple layer bender

원칙 (II) 빔이론(Beam theory)을 이용하기 위해서는 Fig. 1 에서 표시한 바와 같이 앞선 (iii)조건이 성립해야 하므로 $\rho \gg y_1, y_2, \dots$ 이 성립한다. 따라서 곡률 반경 조건식(curvature equation)은 (iii)의 가정에 의하여 다음과 같다.

$$\frac{1}{\rho} = \left[\frac{M_b}{EI} \right]_1 = \left[\frac{M_b}{EI} \right]_2 = \left[\frac{M_b}{EI} \right]_3 = \dots = \left[\frac{M_b}{EI} \right]_n \quad (2)$$

원칙 (III) 접합면에서의 경계조건 (Geometry compatibility condition)을 만족해야 하며 이를 유도하기 위해서는 물질 구성방정식을 알아야 한다. 즉 압전 물질 구성 방정식은 다음과 같다.

$$S_i = s_{ij}^E T_j + d_{mi} E_m \quad (3)$$

$$D_n = d_{nj} T_j + \epsilon_{nm}^T E_m$$

여기서 S_i 는 변형률, T_j 는 응력, E_m 은 전기장, D_n 은 전속밀도를 의미하고 $i, j = 1, 2, \dots, 6$, $m, n=1,2,3$ 길이방향 변형을 이용하는 벤더의 물질 구성방정식은 식 (3)에 앞선 몇몇 가정들((i),(ii),(iii) 즉 $T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = 0$, $E_1 = E_2 = 0$)을 적용하면 다음과 같은 2 개의 커플링 방정식으로 간단화 시킬 수 있다.

$$S_1 = s_{11}^E T_1 + d_{13} E_3 \quad (4)$$

$$D_3 = d_{31} T_1 + \epsilon_{33}^T E_3$$

이러한 물질방정식은 경계면에서의 변형률 연속조건을 만족시키기 위해 다음과 같은 조건식이 유도된다.

i 번째 물질층과 $i+1$ 번째 물질 층간의 경계면 z_j

에서의 xx 방향 변형률 (Strain)의 연속 조건 :

$$S_1' \Big|_{z=z_i} = S_1'^{+1} \Big|_{z=z_i} \quad (5)$$

원칙 (I), (II), (III)에서 유도된 식 (1), (2), (5)을 이용해서 우리가 원하는 곡률반경 관계식과 전속밀도를 구하면 다음과 같다.

Piezoelectric layer

$$\frac{1}{\rho_p} = A \cdot M_b + B \cdot V, \quad D_3 = C \cdot M_b + D \cdot V \quad (6-a,b)$$

여기서 M_b 는 굽힘 모멘트, V 는 전압, 그리고 A 와 B 와 C 와 D 는 형상과 물성에 의한 관계로 표현되는 상수이다.

$$\text{Elastic layer} \quad \frac{1}{\rho_m} = \frac{M_b}{EI} = \frac{s_m M_b}{I} \quad (7)$$

2.2 다양한 경계조건에서의 압전 구성방정식

앞 절의 식 (6)과 (7)에 빔이론(Beam theory)에서의 곡률과 변위간의 관계식을 이용하여 길이 방향으로의 적분을 수행하고 경계조건을 적용함으로써 우리가 원하는 변위와 힘과 전압의 관계식을 유도할 수 있다. 이 때 주의해야 할 점은 x 에 대한 적분을 수행할 때 적분 구간을 설정하여 압전 층과 비압전 층이 공존하는 구간은 식 (6-a,b)를 적용하고 탄성 층만 존재하면 식 (7)를 적용하게 된다. 더불어 전하와 힘과 전압간의 구성방정식을 유도하기 위해서는 전속밀도와 전하간의 관계식을 이용하여 면적적분을 수행함으로써 유도하게 된다. 본 연구에서 일반적인 경계조건 하에서도 적용이 가능하도록 하기 위해 크게 3 가지의 경계조건에 대한 결과 식을 유도하였다. 우리가 원하는 4X4 행렬 형태의 구성관계식들을 구하기 위해서는 총 4 가지의 외부인자가 작용할 때를 고려해야 한다. 이 때 힘과 압력 그리고 모멘트가 작용할 때의 굽힘 모멘트의 일반식을 이끌어 내면 이러한 모든 관계식을 유도해 낼 수 있다. 이러한 굽힘 모멘트 일반식을 유도하는 과정은 다음과 같다.

Fig. 2 에서 알 수 있듯이 A 점에서의 경계조건은 고정(Fix)이고 B 점에서는 3 가지 종류의 경계조건이라 가정했을 때, 외부인자로서 모멘트(M_e), 힘(F_e), 그리고 압력(p_e)이 각각 작용한다고 가정하자. 이 때 반력으로 A 점에서는 M_A, F_A 가 각각 작용하고 B 점에서는 M_B, F_B 가 각각 작용한다고 가정할 수 있다. 그리고 외력(F_e)은 d_1 에서 작용하고 압력(p_e)은 d_2 만큼 작용한다고 가정하자. 이 때의 굽힘 모멘트 분포 (Bending moment distribution)는

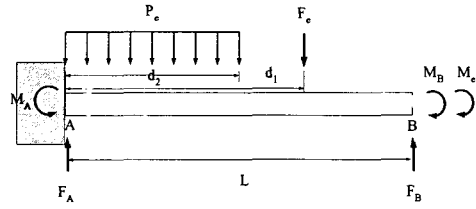


Fig. 2 Schematic diagram showing the external parameters

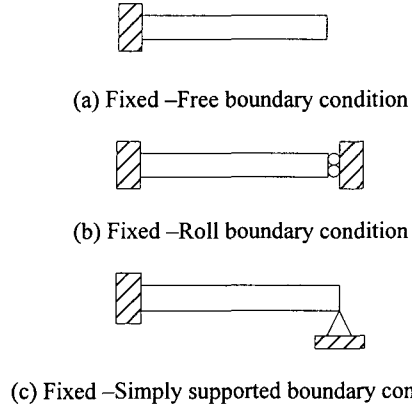


Fig. 3 Various boundary conditions

선형 중첩 방법을 통해 쉽게 구할 수 있다. 본 연구에서는 Fig. 3 에서 알 수 있듯이 벤더 구동기에 주로 쓰이는 경계조건 3 가지를 유도하였다.

힘과 압력 그리고 모멘트, 3 가지 기계적 외부인자가 작용할 때의 일반적인 형태의 굽힘모멘트(M_b)만 구할 수 있다면 우리가 원하는 4 가지 외부인자가 작용하는 조건 하에서의 구성방정식을 구해낼 수 있다. 선형 중첩 원리 (Superposition rule)를 적용하여 최종적인 굽힘 모멘트 분포식을 구하면 다음과 같다.

$$M_b = F_e \{x - d_1\} \{1 - u(x - d_1)\} - M_e - 3M_B + \left[p_e d_2 x - \frac{p_e}{2} \{x^2 + d_2^2\} \right] \{1 - u(x - d_2)\} + 3F_B \{L - x\}$$

$$\text{여기서 } u(x-d) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq d \\ 1, & \text{if } x \geq d \end{cases} \quad (8)$$

이와 같이 구해진 식 (8)을 앞선 곡률반경식 식 (6)과 (7)에 대입하여 구간별로 적분한 다음 순차적으로 아래 경계조건을 적용하면 우리가 원하는 최종 구성 방정식을 구해낼 수 있다.

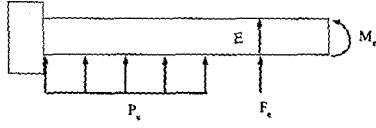


Fig. 4 Sign Convention

Fixed-Free Boundary condition

$$F_B = M_B = 0, \alpha|_{x=0} = 0, \delta|_{x=0} = 0$$

Fixed-Roll Boundary condition

$$F_B = 0, \delta|_{x=0} = 0, \alpha|_{x=0} = 0, \alpha|_{x=L} = 0$$

Fixed-Simply supported Boundary condition

$$M_B = 0, \delta|_{x=0} = 0, \alpha|_{x=0} = 0, \delta|_{x=L} = 0$$

마지막으로 모든 관계식의 상수(Coefficient)들을 양의 값으로 나타내기 위하여 부호 보정 (Sign convention)을 필요로 한다. 이 때 Fig. 4 와 같은 방향으로 외력이 작용하도록 설정한다.

2.3 적용 사례

본 절에서는 앞서 설명된 일반화된 유도과정을 유니모프, 바이모프, 그리고 트리플 레이어 밴더의 시스템에 적용한다. 먼저 외팔보 경계조건 하에서의 간단화된 2X2 행렬 형태의 유니모프 압전 밴더 구성방정식을 유도하는 과정을 설명한다. 그리고 바이모프와 트리플 레이어 밴더는 유사한 유도과정을 거치므로 필요로 하는 수식과 결과식만을 제시한다.

2.3.1 유니모프 밴더(Unimorph Bender)

Fig. 5 에서 나타낸 바와 같이 원칙 (I)의 각 힘과 모멘트의 평형 조건을 나타내면 식 (9)와 (10)이 유도된다.

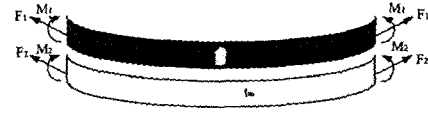
$$F_1 + F_2 = 0, F_1 = -F_2 = F \quad (9)$$

$$\therefore M_1 + M_2 + F(t_p + t_m)/2 = M_b \quad (10)$$

그리고 원칙 (II)를 적용하면 이므로 다음 식 (11)이 유도된다.

$$M_1 = \frac{I_p}{s_p} \frac{1}{\rho}, \quad M_2 = \frac{I_m}{s_m} \frac{1}{\rho} \quad (11-a,b)$$

식 (9)~(11)에 의해 힘은 아래 식 (12)로 나타난다.



s_p : Constant electric field piezoelectric compliance of upper layer
 s_m : Compliance of nonpiezoelectric layer

Fig. 5 Schematic diagram of the unimorph bender after deformation

$$F = \frac{1}{t_m} \cdot \frac{2\xi}{1+\xi} \cdot M_b - 2 \cdot \frac{\eta\xi^3 + 1}{\xi^3 + \xi^4} \cdot \frac{I_m}{s_p t_m} \cdot \frac{1}{\rho} \quad (12)$$

여기서 $\xi = \frac{t_m}{t_p}, \eta = \frac{s_p}{s_m}$

원칙 (III)을 적용하면 접합면에서의 변형률이 같다는 조건을 적용하면 식 (13)가 유도된다.

$$\frac{s_m}{wt_p} F - \frac{1}{\rho} \left(\frac{t_p}{2} \right) = -\frac{s_p}{wt_m} F + \frac{1}{\rho} \left(\frac{t_m}{2} \right) + d \left(-\frac{V}{t_m} \right) \quad (13)$$

식 (12)와 (13)을 정리하여 곡률반경과 굽힘모멘트와 전압 간의 관계를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{1 + \eta\xi}{\eta^2\xi^4 + 4\eta\xi^3 + 6\eta\xi^2 + 4\eta\xi + 1} \cdot \frac{s_p M_b}{I_1} \\ &+ \frac{6\xi\eta(1+\xi)}{\eta^2\xi^4 + 4\eta\xi^3 + 6\eta\xi^2 + 4\eta\xi + 1} \cdot \frac{d}{t_p^2} V \\ &= A \cdot M_b + B \cdot V \end{aligned} \quad (14)$$

이제 위 전극에서의 전속 밀도(Electric Flux Density, D)와 굽힘 모멘트와 전압간의 관계를 유도하기 위해 먼저 전속 밀도에 의한 응력이 일정하다고 가정하면 전속 밀도는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$D_3 = d \cdot T_1 + \epsilon_{33}^T E = d \left(-\frac{F}{wt_p} \right) + \epsilon_{33}^T \left(-\frac{V}{t_p} \right) \quad (15)$$

식 (12)를 식 (14)에 대입하고 이를 정리하면 다음과 같이 전속 밀도와 굽힘모멘트와 전압간의 관계를 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} D_3 &= \frac{6\eta\xi(1+\xi)}{\eta^2\xi^4 + 4\eta\xi^3 + 6\eta\xi^2 + 4\eta\xi + 1} \cdot \frac{d}{wt_p^2} M_b \\ &+ \left[1 - \frac{k_{31}^2 \eta \xi (1 + \eta \xi^3)}{\eta^2 \xi^4 + 4\eta \xi^3 + 6\eta \xi^2 + 4\eta \xi + 1} \right] \cdot \frac{\epsilon_{33}^T}{t_p} V \end{aligned} \quad (16)$$

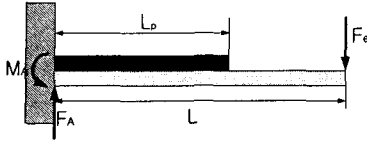


Fig. 6 An unimorph bender actuator

이제 외팔보 경계 조건에 외부 인자로 힘만 작용하는 가장 간단한 경우에 대해서 구성 방정식을 유도하는 과정을 자세히 분석해 보자.

식 (8)에 식 (17)을 대입하면 식 (18)이 쉽게 유도된다.

$$M_e = p_e = F_B = M_B = 0, \quad d_1 = L \quad (17)$$

$$\therefore M_b = F_e(x - L) \quad (18)$$

Fig. 6에서 알 수 있듯이 $0 \leq x \leq L_p$ 의 구간에는 압전 층과 비압전 탄성 층이 같이 존재하는 구간이므로 다음과 같이 압전 곡률 반경식을 적분하는 과정을 거치게 된다.

식 (14)에 식 (18)을 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{\rho_p} = \frac{d^2 \delta}{dx^2} = A \cdot V + B(F_e(x - L)) \quad (19)$$

이를 x 에 대해 적분하고 경계조건을 대입하면 식 (20)과 (21)로 유도된다.

$$\alpha = \frac{d\delta}{dx} = A \left[F_e(-Lx + \frac{x^2}{2}) \right] + Bx \cdot V \quad (20)$$

$$\delta = A \left[F_e \left(-\frac{1}{2}Lx^2 + \frac{x^3}{6} \right) \right] + \frac{1}{2}Bx^2 \cdot V \quad (21)$$

$L_p \leq x \leq L$ 구간에서는 비압전층만 존재하므로 식 (22)를 비압전층의 길이 방향 적분과정을 거치면 다음과 같은 식 (23), (24)가 유도된다.

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{d^2 \delta}{dx^2} = \frac{M_a}{E_m I_m} = \frac{F_e}{E_m I_m} (x - L) \quad (22)$$

$$\alpha = \frac{d\delta}{dx} = \frac{F_e s_m}{I_m} \left(\frac{1}{2}x^2 - Lx \right) + C_1 \quad (23)$$

$$\delta = \frac{F_e s_m}{I_m} \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}Lx^2 \right) + C_1 x + C_2 \quad (24)$$

앞선 영역별 유도식에 L_p 에서의 변위와 각도가 같다는 경계조건을 적용하면 적분상수를 구해낼

수 있다.

$$C_1 = BL_p V + A(-LL_p + \frac{L_p^2}{2})F_e + \frac{F_e s_m}{I_m} (\frac{1}{2}L_p^2 - LL_p) \quad (25)$$

$$C_2 = \frac{1}{2}BL_p^2 V + A(-\frac{1}{2}LL_p + \frac{L_p^3}{6})F_e + \frac{F_e s_m}{I_m} (-\frac{1}{6}L_p^3 + \frac{1}{2}LL_p^2) - C_1 L_p \quad (26)$$

식 (25), (26)를 식 (21)에 대입하고 $x=L$ 을 대입하여 정리하면 변위와 힘 및 전압간의 관계가 유도된다.

$$\begin{aligned} & -12L^3 s_m + L^2 L_p (36s_m - 3Aw t_m^3) \\ \delta|_{x=L} = & \frac{+L_2(12s_m - Aw t_m^3) + 3LL_p^2(-12s_m + Aw t_m^3)}{3wt_m^2} F_e \\ & + B(\frac{1}{2}L_p^2 - LL_p)V \end{aligned} \quad (27)$$

전하와 힘 및 전압간의 관계를 유도하기 위해 식 (16)에 식 (18)을 대입하여 x 에 대해 적분하고 $x=L_p$ 을 대입하여 정리하면 식 (29)가 유도된다.

$$\begin{aligned} q = w \int (CF_e(x - L) + DV)dx + C_1 \\ = wCF_e(\frac{1}{2}x^2 - Lx) + DxV \end{aligned} \quad (28)$$

$$q|_{x=L_p} = CF_e(\frac{1}{2}L_p^2 - LL_p) + DL_p wV \quad (29)$$

따라서 앞의 식 (27)과 (29)를 각각 정리 하면 다음과 같은 행렬 형태로 표현될 수 있다. 즉 외팔보 경계조건 하에서 내부인자인 변위와 전하 그리고 외부인자인 힘과 전압 간의 구성방정식을 유도해 낼 수 있다. 더불어 모든 관계식의 값들을 양의 값으로 나타내기 위하여 부호 보정 (Sign convention)을 하여 결과식을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \delta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ V \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = \frac{4L^3 s_p}{wt_m^3} \cdot \frac{(1 + (4 - 9\lambda_1 + 9\lambda_1^2 - 3\lambda_1^3)\eta\xi^3 + 6(1 - \lambda_1)^3\eta\xi^2 + 4(1 - \lambda_1)^3\eta\xi + (1 - \lambda_1)^3)}{\eta(\eta^2\xi^4 + 4\eta\xi^3 + 6\eta\xi^2 + 4\eta\xi + 1)}$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{3d \cdot L^2}{t_m^2} \cdot \frac{(2 - \lambda_1)\lambda_1\eta\xi^3(1 + \xi)}{\eta^2\xi^4 + 4\eta\xi^3 + 6\eta\xi^2 + 4\eta\xi + 1}$$

$$a_{22} = \frac{Lw\varepsilon_{33}^T}{t_p} \cdot \lambda_1 \left(1 - \frac{k^2\eta\xi(1 + \eta\xi^3)}{\eta^2\xi^4 + 4\eta\xi^3 + 6\eta\xi^2 + 4\eta\xi + 1} \right)$$

(30-a,b,c)

여기서 s_p 는 압전의 기계적 유연성을, λ_1 은 전체길이에 대한 압전층의 길이를, k 는 기전결합상수를, 그리고 ε_{33}^T 는 유전상수를 의미한다.

2.3.2 바이모프 밴더 (Bimorph Bender)

전극이 Fig. 7의 (b)에서 보여주는 것과 같이 평행 형태(Parallel Type)으로 이루어 졌을 때 구성 방정식은 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} \delta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (8 - 21\lambda_1 + 21\lambda_1^2 - 7\lambda_1^3)s_p & 3dL^2(2 - \lambda_1)\lambda_1 \\ 2t_p^3w & 4t_p^2 \\ 3dL^2(2 - \lambda_1)\lambda_1 & L_pw\varepsilon_{33}^T(4 - k^2) \\ 4t_p^2 & 2t_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ V \end{bmatrix}$$

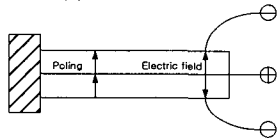
(31)

전극이 Fig. 7의 (c)에서 보여주는 것과 같이 시리얼 형태(Serial type)로 이루어 졌을 때 구성 방정식은 아래와 같다.

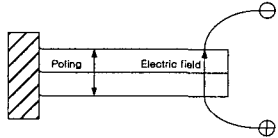


s_p : Constant electric field piezoelectric compliance of upper layer

(a) After deformation



(b) Parallel connection



(c) Serial connection

Fig. 7 Schematic diagram of the bimorph bender

$$\begin{bmatrix} \delta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (8 - 21\lambda_1 + 21\lambda_1^2 - 7\lambda_1^3)s_p & 3dL^2(2 - \lambda_1)\lambda_1 \\ 2t_p^3w & 8t_p^2 \\ 3dL^2(2 - \lambda_1)\lambda_1 & L_pw\varepsilon_{33}^T(4 - k^2) \\ 8t_p^2 & 8t_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ V \end{bmatrix}$$

(32)

이러한 결과에서 $\lambda_1=1$ 을 대입했을 때 기존 연구 [3]의 외팔보 경계조건 하에서의 바이모프 결과와 일치함을 확인할 수 있다.

2.3.3 트리플 레이어 밴더 (Triple-layer Bender)

평행 형태(Parallel type) 트리플 레이어 밴더의 경우는 다음과 같다.

$$a_{11} = \frac{4L^3s_p}{t_m^3w} \cdot \frac{\eta\xi^3 + 6(1 - \lambda_1)^3\xi^2 + 12(1 - \lambda_1)^3\xi + 8(1 - \lambda_1)^3}{\eta(8 + 12\xi + 6\xi^2 + \eta\xi^3)}$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{6d_{31}L^2}{t_m^2} \cdot \frac{(2 - \lambda_1)\lambda_1\xi^2(1 + \xi)}{8 + 12\xi + 6\xi^2 + \eta\xi^3}$$

$$a_{22} = \frac{2L_pw\varepsilon_{33}^T}{t_p} \left(1 - \frac{k^2(\eta\xi^3 + 2)}{8 + 12\xi + 6\xi^2 + \eta\xi^3} \right)$$

(33-a,b,c)

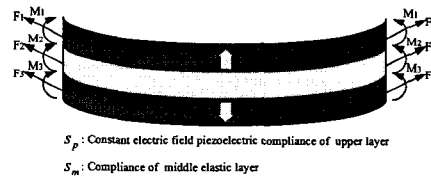


Fig. 8 Schematic diagram of the bimorph bender after deformation

Table 1 Substrate material property

Line	Material	η
Red solid	Silicon	2.317
Green dashed	Brass	1.341
Blue dotted	Aluminum	0.793
Black small dotted	Acrylic	0.038

다음 시리얼 형태(Serial type)의 트리플 레이어 벤더는 다음과 같다.

$$a_{11} = \frac{4L^3 s_p \cdot \eta \xi^3 + 6(1-\lambda_1)^3 \xi^2 + 12(1-\lambda_1)^3 \xi + 8(1-\lambda_1)^3}{t_m^3 w \cdot \eta(8+12\xi+6\xi^2+\eta\xi^3)}$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{3d_{31}L^2 \cdot (2-\lambda_1)\lambda_1 \xi^2(1+\xi)}{t_m^2 \cdot 8+12\xi+6\xi^2+\eta\xi^3}$$

$$a_{22} = \frac{L_p w \varepsilon_{33}^T}{2t_p} \left(1 - \frac{k^2(\eta\xi^3+2)}{8+12\xi+6\xi^2+\eta\xi^3} \right)$$

(34-a,b,c)

이러한 결과에서 $\lambda_1=1$ 을 대입했을 때 기존 연구 [5]의 외팔보 경계조건 하에서의 트리플 레이어의 결과와 일치함을 확인할 수 있다.

3. 유도 결과

본 연구에서는 내부인자와 외부인자의 관계를 4X4 행렬 형태로 표현하고 그것들 중 몇몇 의미 있는 무차원 수들을 입체 그래프로 도시한다.

$$[\text{Internal Parameter}] = [A(\text{Relation Matrix})][\text{External Parameter}]$$

$$\begin{bmatrix} \alpha(\text{Angle}) \\ \delta(\text{Displacement}) \\ v(\text{Deflected volume}) \\ q(\text{Charge}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_e(\text{External Moment}) \\ F_e(\text{External Force}) \\ p_e(\text{External Pressure}) \\ V(\text{Voltage}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{L s_p}{12I_p} \cdot b_{11} & \frac{s_p L^2}{12I_p} \cdot b_{12} & \left(\frac{L}{t_p}\right)^3 s_p \cdot b_{13} & \frac{d \cdot L}{t_p} \cdot b_{14} \\ \frac{s_p L^2}{12I_p} \cdot b_{21} & \frac{L^3 s_p}{12I_p} \cdot b_{22} & \frac{s_p L^4}{t_p^3} \cdot b_{23} & \frac{d \cdot L^2}{t_p^2} \cdot b_{24} \\ \left(\frac{L}{t_p}\right)^3 s_p \cdot b_{31} & \frac{s_p L^4}{t_p^3} \cdot b_{32} & \frac{L^3 w s_p}{t_p^3} \cdot b_{33} & \frac{L^3 w d}{t_p^2} \cdot b_{34} \\ \frac{d \cdot L}{t_p^2} \cdot b_{41} & \frac{d \cdot L^2}{t_p^2} \cdot b_{42} & \frac{L^3 w d}{t_p^2} \cdot b_{43} & \frac{L w \varepsilon_{33}^T}{t_p} \cdot b_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_e(\text{External Moment}) \\ F_e(\text{External Force}) \\ p_e(\text{External Pressure}) \\ V(\text{Voltage}) \end{bmatrix}$$

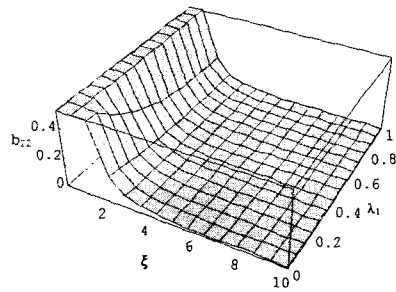
(35)

$$B(\text{Dimensionless Matrix}) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

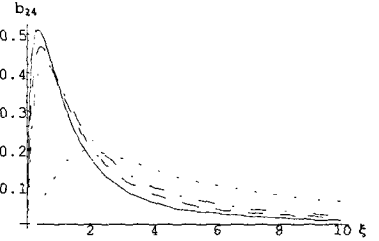
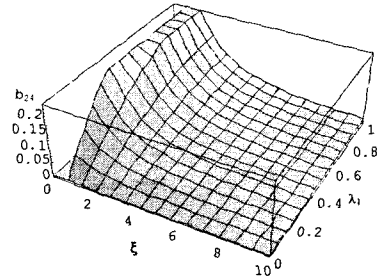
$$= \begin{bmatrix} \frac{12I_p}{s_p L} \cdot \frac{\alpha}{M_e} & \frac{12I_p}{s_p L^2} \cdot \frac{\alpha}{F_e} & \left(\frac{t_p^3}{s_p L^3}\right) \cdot \frac{\alpha}{p_e} & \frac{t_p^2}{d \cdot L} \cdot \frac{\alpha}{V} \\ \frac{12I_p}{s_p L^2} \cdot \frac{\delta}{M_e} & \frac{12I_p}{s_p L^3} \cdot \frac{\delta}{F_e} & \frac{t_p^3}{s_p L^4} \cdot \frac{\delta}{p_e} & \frac{t_p^2}{d L^2} \cdot \frac{\delta}{V} \\ \left(\frac{t_p^3}{s_p L^3}\right) \cdot \frac{v}{M_e} & \frac{t_p^3}{s_p L^4} \cdot \frac{v}{F_e} & \frac{t_p^3}{s_p w L^5} \cdot \frac{v}{p_e} & \frac{t_p^2}{d w L^3} \cdot \frac{v}{V} \\ \frac{t_p^2}{d \cdot L} \cdot \frac{q}{M_e} & \frac{t_p^2}{d L^2} \cdot \frac{q}{F_e} & \frac{t_p^2}{d w L^3} \cdot \frac{q}{p_e} & \frac{t_p}{L w \varepsilon_{33}^T} \cdot \frac{q}{V} \end{bmatrix}$$

(36)

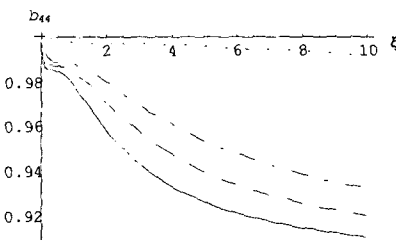
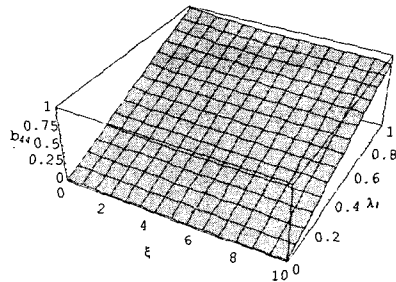
식 (36)은 무차원 행렬의 각 요소들의 물리적 의미를 정리하였다. 이러한 무차원 행렬의 일반식을 표현하기에는 매우 복잡하므로 전기 기계적 특성



(a) 3D plot of b_{22} with respect to thickness ratio and length ratio

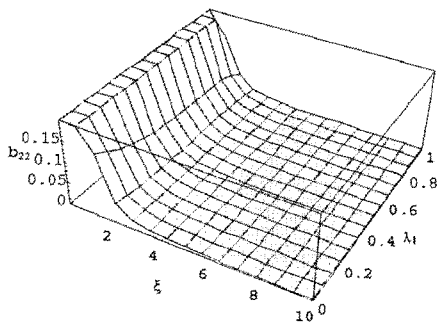


(b) 3D plot of b_{24} and 2D plot with respect to thickness ratio

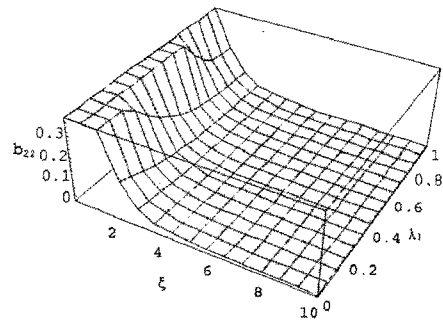


(c) 3D plot of b_{44} and 2D plot with respect to thickness ratio

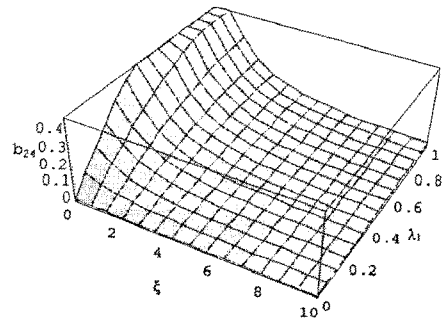
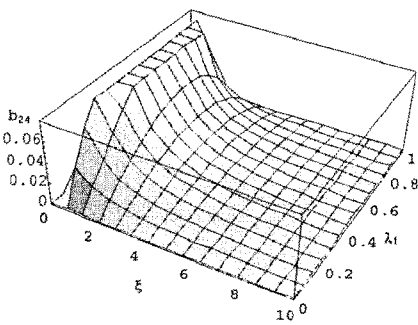
Fig. 9 Unimorph bender b_{22}, b_{24}, b_{44} under fixed free BCs



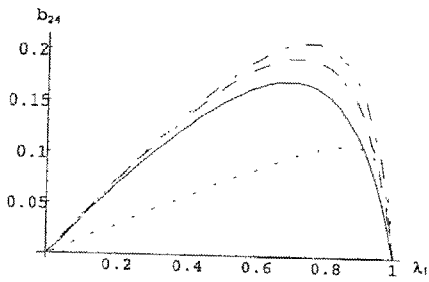
(a) 3D plot of b_{22}



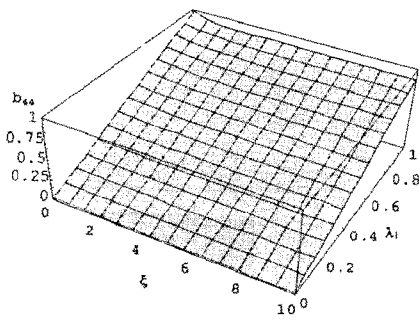
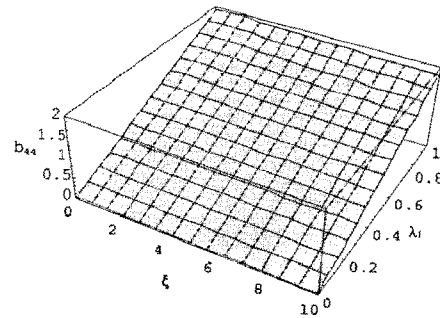
(a) 3D plot of b_{22}



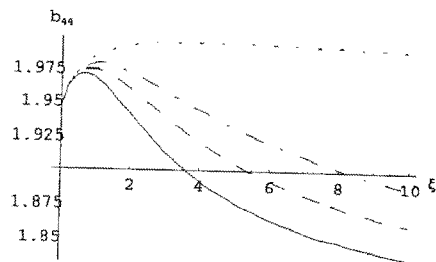
(b) 3D plot of b_{24}



(b) 3D plot of b_{24} and 2D plot with respect to length ratio



(c) 3D plot of b_{44}



(c) 3D plot of b_{44} and 2D plot with respect to thickness ratio

Fig. 10 Unimorph bender b_{22} , b_{24} , b_{44} under fixed roll BCs

Fig. 11 Triple-layer bender b_{22} , b_{24} , b_{44} under free BCs

을 대표하는 b_{22} , b_{24} , b_{44} 의 결과를 Fig. 9, 10, 11 에 도시한다. 각 변수의 물리적 의미를 살펴보면 b_{22} 는 외력에 대한 변위를 나타내는 무차원 수로서 외팔보 밀판(Substrate)의 전체길이와 압전의 두께와 너비를 일정하게 놓았을 때 기계적 유연성을 의미 하고 b_{24} 는 가해진 전압에 대한 변위를 나타낸다. 그리고 b_{44} 는 가해진 전압에 대해 생겨난 전하량 즉 커패시턴스(Capacitance)를 의미한다.

무차원 수 ζ 는 밀판(Substrate)인 비압전층의 두께를 증가시키는 것을 의미하고 λ_1 은 압전층 길이를 증가시키는 것을 의미한다. 각 결과를 그래프로 도시할 때 2 차원 그래프는 4 가지 물질에 대해 보여준다. 각 물질의 물성치와 압전층에 대한 강성비는 Table 1 에서 나타내었다.

Fig. 9 에서는 유니모프벤더의 Fixed-Free 경계조건 하에서 길이비와 두께비에 대해 b_{22} , b_{24} , b_{44} 의 결과를 3 차원 그래프로 나타내었다. Fig. 9 (a)는 압전층 과 비압전층의 두께비와 압전층 길이에 대한 b_{22} (기계적 유연성)의 3 차원 그래프를 나타내었다. 이 그래프에서 두께비와 압전층의 길이가 커지면 강성(Stiffness)이 커짐을 알 수 있다. Fig. 9 (b)에서는 압전 두께에 따라 가해진 전압에 대한 변위의 최적값을 찾을 수 있음을 알 수 있다. 그리고 각 비압전층의 물질마다 두께비에 따른 b_{24} 값의 그래프 형태가 달라짐을 알 수 있다. 그리고 Fig. 9 (c)에서는 커패시턴스(Capacitance) 값을 나타내었다. Fig. 10 에서는 Fixed-Roll 경계조건 하에서 압전 길이비와 두께비에 대해 3 차원 그래프로 나타내었다. Fixed-Roll 경계 조건하 에서는 압전층과 비압전층의 길이를 같게 설정해서는 안되며 길이 비율에 대한 변위 최적값을 구할 수 있음을 알 수 있다. 그리고 Fig. 11 에서는 Fixed-Free 경계조건 하에 있는 트리플 레이어 벤더의 길이비와 두께비에 대해 3 차원 그래프로 나타내었다. 트리플 레이어의 경우 유니모프와 달리 커패시턴스 값을 나타내는 b_{44} 의 최적값을 찾을 수 있음을 알 수 있다. 그 외의 특성은 유니모프와 유사함을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 역학에서의 평형 방정식, 빔이론, 형상 연속조건을 이용해서 새로운 압전 벤더 구성 방정식의 유도기법을 제시하고 그것을 적용하여 유니모프(Unimorph), 바이모프(Bimorph), 그리고 트

리플 레이어(Triple-layer) 등 일차원 형상의 압전 벤더 구성방정식을 유도하였다. 이러한 유도를 통해 최근 널리 이용되고 있는 원자 현미경의 탐침(Probe)과 같은 정밀 구동기 및 센서의 설계 시에 필요한 설계 변수인 압전층의 두께나 길이 그리고 밀판층 물질을 선정 할 때 최적값을 찾을 수 있도록 하였다. 뿐만 아니라 벤더에서 주로 쓰이는 Fixed-Free 경계조건과 더불어 Fixed-Roll 경계조건 그리고 Fixed-Simply supported 경계조건 하에서도 구성 방정식을 유도함으로써 보다 넓은 응용 범위에 이용될 수 있도록 하였다. 이러한 일련의 과정을 컴퓨터 연산 소프트웨어인 'Mathmatica'의 'Symbolic calculation'기능을 이용한 프로그래밍화로 앞서 유도된 모든 조건에 대한 일반식을 유도하고 그 결과를 그래프를 통해 검증하였다.

후 기

이 논문은 2001 년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음 (KRF-2001-003-E0066)

참고문헌

- (1) WEB SITE, <http://www.physikinstrumente.com/>
- (2) Ilene J. Busch-Vishniac, 1999, *Electromechanical Sensors and Actuators*, Spring-Verlag
- (3) Jan G. Smits, Susan I. Dalke and Thomas K. Cooney, 1991, "The Constituent Equations of Piezoelectric Bimorphs," *Sensors and Actuators A*, Vol. 28, pp. 41~61.
- (4) Smits, J.G. and Choi, W., 1991, "The Constituent Equations of Piezoelectric Heterogeneous Bimorphs," *Ultrasonics, IEEE Transactions on Ferroelectrics and Frequency Control*, Vol. 38, Issue. 3, pp. 256~270.
- (5) Qing-Ming Wang and L. Eric Cross, 1999, "Constitutive Equations of Symmetrical Triple-layer Piezoelectric Benders," *Ultrasonics, IEEE Transactions on Ferroelectrics and Frequency Control*, Vol. 46, No. 6, pp. 1343~1351.
- (6) Qing-Ming Wang, Xiao-hong Du, Baomin Xu, and L. Eric Cross, 1999, "Theoretical Analysis of the Sensor Effect of Cantilever Piezoelectric Benders," *Journal of applied physics*, Vol. 85, No. 3, pp. 1702~1712.
- (7) Manais, S.R., Quate, Cavin F. and Minne, Stephen C., 1999, *Bringing Scanning Probe Microscopy Up to Speed*, Kluwer Academic.