

독립적 하부 시스템에 의한 다분야 통합 최적설계

신 문 균* · 박 경 진†

(2002년 7월 22일 접수, 2004년 1월 2일 심사완료)

Mathematical Validation of Multidisciplinary Design Optimization Based on Independent Subspaces

Moon-Kyun Shin and Gyung-Jin Park

Key Words : Coupled Variables(연성변수), Global Sensitivity Equation(전역 민감도 방정식), Multi-disciplinary Design Optimization(다분야 통합 최적설계), Optimum Sensitivity(최적 민감도), System Analysis(시스템 해석)

Abstract

Optimization has been successfully applied to systems with a single discipline. As many disciplines are involved in coupled fashion, MDO (multidisciplinary design optimization) technology has been developed. MDO algorithms are trying to solve the coupled aspects generated from interdisciplinary relationship. In a general MDO algorithms, a large design problem is decomposed into small ones which can be easily solved. Although various methods have been proposed for MDO, the research is still in the early stage. This research proposes a new MDO method which is named as MDOIS (Multidisciplinary Design Optimization Based on Independent Subspaces). Many real engineering problems consist of physically separate components and they can be independently designed. The inter-relationship occurs through coupled physics. MDOIS is developed for such problems. In MDOIS, a large system is decomposed into small subsystems. The coupled aspects are solved via system analysis which solves the coupled physics. The algorithm is mathematically validated by showing that the solution satisfies the Karush-Kuhn-Tucker condition.

1. 서론

최근들어 항공기와 같이 여러 분야로 이루어진 크고 복잡한 시스템의 설계에 최적설계 기술을 효과적으로 적용하는 것이 필요하게 되었다. 그러나 여러 분야가 관련된 시스템의 설계에서는 시스템에 포함된 여러 분야들 사이에는 서로 종속적이면서, 복잡한 물리적 상호 연관관계가 있기 때문에 한 분야만 고려하여 독립적으로 설계하는 것이 거의 불가능하다. 이에 각 분야들 사이의 종속적인 관계를 이용해 복잡한 시스템

설계문제를 효과적으로 설계할 수 있는 설계방법이 필요하게 되었다. 전통적인 설계방법에서는 설계과정 중 한 분야의 설계가 끝나면 그 결과를 받아서 다음 단계 설계를 수행한다. 그리고 후반의 설계가 이전 단계의 설계에 영향을 주는 반복과정으로 설계가 어느 수준에 이르면 설계가 완료된 것으로 본다. 따라서 서로 다른 분야의 설계에 영향을 주는 연성관계 때문에 여러 분야들을 서로 독립적으로 설계하는 것이 불가능하다. 그리고 각 분야의 설계자는 이전 단계들의 설계 결과에 의존해서 설계를 수행해야 하기 때문에 설계 권한이 상당히 줄어든다. 그러므로 이러한 문제를 해결하기 위한 방법으로 다분야 통합 최적설계(multidisciplinary design optimization, MDO)⁽¹⁻³⁾ 방법이 제시되었다.

다분야 통합 최적설계는 큰 설계 문제를 여

* 한양대학교 BK 기계사업단
E-mail : mkshin@hanyang.ac.kr

TEL : (031)400-4065 FAX : (031)407-0755

† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계경영정보공학부

러 개의 작은 설계 문제로 분해하고, 각 분야들을 서로 독립적으로 설계하는 기법이다. 그리고 각 분야의 설계 결과는 연성변수를 통해서 다른 분야에 영향을 미친다.

자동차 충돌문제⁽⁴⁾와 같이 실제 공학에서 설계 문제의 상당 부분은 물리적, 설계적으로 연성된 여러 개의 분야로 이루어져 있다. 따라서 본 논문에서는 여러 역학분야 또는 설계분야로 이루어진 설계에 적용하기 위한 새로운 다분야 통합 최적설계 알고리즘을 개발하였다. 이 알고리즘을 적용할 경우 각 분야의 설계자는 그 분야의 목적에 맞는 설계방법을 선택해서 독립적으로 설계를 수행할 수 있다. 그리고 각 분야 사이 설계결과는 시스템 해석을 통해서 다른 분야에 전달한다. 즉, 다른 분야의 해석 결과를 입력으로 받아서 설계를 수행하고, 그 설계결과를 다른 분야의 입력으로 사용한다. 따라서 각 분야를 독립적으로 설계하기 위해서는 시스템 해석에서 연성변수 값을 결정하고, 그 값이 설계과정 동안에 전달되어 상수로 사용된다. 따라서 연성관계가 일시적으로 제거되기 때문에 하부 시스템의 설계를 독립적으로 수행할 수 있다.

본 논문에서는 이런 설계 문제에 적용하기 위해서 독립적 하부 시스템에 의한 다분야 통합 최적설계(multidisciplinary design optimization based on independent subspaces, MDOIS)⁽⁴⁾라는 새로운 다분야 통합 최적설계 알고리즘을 개발하였다. 이 알고리즘에서는 커다란 설계문제를 설계하기 쉬운 작은 문제로 분해한다. 그리고 분해된 작은 설계문제에서는 그 설계문제에만 포함된 목적함수, 제한조건, 설계변수만을 고려한다. 그리고 다른 분야와의 연성관계는 시스템 해석을 통해서 해결한다.

그리고 전역 민감도(global sensitivity equation, GSE)⁽⁵⁻⁸⁾가 있는 경우와 없는 경우에 대해서 독립적 하부 시스템에 의한 다분야 통합 최적설계가 최적점에 수렴했을 때 그 최적점은 하나의 최적화 문제로 최적화했을 때의 K-K-T 조건(Karush-Kuhn-Tucker condition)⁽⁹⁻¹¹⁾과 같다는 것을 수학적으로 증명하였다. 독립적 하부 시스템에 의한 다분야 통합 최적설계의 성능을 비교하기 위하여 수학 예제에 적용하여 기존의 다른 다분야 통합 최적설계 방법과 결과를 비교하였다. 이 결과 비교를 통해서 독립적 하부 시스템에 의한 다분야 통합 최적설계 알고리즘이 서로 다른 물리적, 설계적 영역에 있는 문제에 적용할 수 있다는 것을 보였다.

2. 독립적 하부 시스템에 의한 다분야 통합 최적설계 방법 개발

2.1 다분야 통합 최적설계 방법

Fig. 1에 4개의 하부 시스템으로 구성된 설계 문제의 예가 보여지고 있다.⁽¹²⁾ 이 시스템에 포함된 각 하부 시스템들은 다른 하부 시스템의 결과를 입력으로 받는다. 또한 다른 하부 시스템의 결과를 입력으로 해서 설계한 결과, 즉 출력은 또 다른 하부 시스템에 입력으로 전달한다. 그러므로 각 하부 시스템들 사이에는 설계 결과를 주고 받는 연성관계가 있다. 일반적으로 Fig. 1과 같은 설계 문제의 최적화를 위한 정식화는 다음과 같다.

$$\text{Find } \mathbf{x}, \mathbf{y} \tag{1}$$

$$\text{to minimize } F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{2}$$

$$\text{subject to } h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, i = 1, m \tag{3}$$

$$g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 0, j = 1, p \tag{4}$$

$$\mathbf{x}_l \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_u \tag{5}$$

$$\mathbf{y}_l \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y}_u \tag{6}$$

여기서 $\mathbf{x} \in R^n$ 는 설계변수, $\mathbf{y} \in R^m$ 는 연성변수, $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 는 목적함수, $h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 는 등제한조건, $g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 는 비등제한조건이다. 그리고 m 과 p 는 각각 등제한조건과 비등제한조건의 수, \mathbf{x}_l 와 \mathbf{x}_u 는 설계변수의 하한과 상한범위, \mathbf{y}_l 와 \mathbf{y}_u 는 연성변수의 하한과 상한범위이다.

지금까지 개발되어있는 MDO 알고리즘으로는 AAO(All-at-once),^(13,14) IDF(Individual discipline feasible),^(13,14) MDF(Multiple discipline feasible),^(13,14) CSSO(Concurrent subspace optimization),⁽¹²⁾ BLISS(Bi-level integrated system synthesis),⁽¹⁵⁾ CO(Collaborative optimization)^(16,17) 등이 있다. 이들 알고리즘 중에서 AAO와 IDF는 연성변수 값을 결정하는 시스템 해석을 등제한조건으로 사용한다. 따라서 일반적으로 많이 사용하는 비선형 최적화방법을 사용할 수 있다. MDF는 등제한조건을 따로 분리해서 시스템 해석으로 사용한다. 또한 CSSO는 전역 민감도와 최적 민감도(optimum sensitivity analysis)^(18,19)

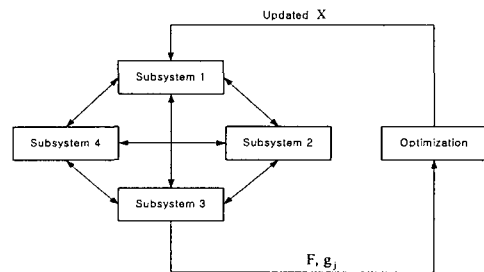


Fig. 1 Non-hierarchical subsystem interactions

를 필요로 한다. BLISS 는 CSSO 와 유사하나 목적함수와 제한조건을 설계변수에 대해서 선형 근사화하여 사용한다.

2.2 독립적 하부 시스템에 의한 다분야 통합 최적설계

본 논문에서 개발한 MDOIS 에 대해서 설명한다. 여기서 설계문제는 w 개의 하부 시스템으로 구성된다고 가정하며, MDOIS 를 적용하기 위한 전제조건은 다음과 같다.

1. 연성변수는 각 하부 시스템에서 입력으로 사용하고, 하부 시스템 최적화 과정에서는 상수로 취급한다.
2. 각 하부 시스템은 다음 식에서 처럼 그 하부 시스템에서만 사용하는 목적함수, 제한조건, 설계변수를 가지고 있다고 가정한다.

$$F = f^1 + f^2 + \dots + f^w \tag{7}$$

$$\mathbf{g} = [\mathbf{g}^1 \mathbf{g}^2 \dots \mathbf{g}^w]^T \tag{8}$$

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}^1 \mathbf{x}^2 \dots \mathbf{x}^w]^T \tag{9}$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}^1 \mathbf{y}^2 \dots \mathbf{y}^w]^T \tag{10}$$

여기서 f^k 와 \mathbf{g}^k 는 각각 k 번째 하부 시스템의 목적함수와 제한조건, 첨자 k 는 k 번째 하부 시스템을 의미한다. $\mathbf{x}^k \in R^{n^k}$ 는 설계변수, $\mathbf{y}^k \in R^{m^k}$ 는 연성변수로 연성변수는 한 하부 시스템에만 포함된다고 가정하였다. Fig. 2 는 MDOIS 의 흐름도이다. Fig. 2 를 보면 처음 설계문제는 여러 개의 하부 시스템으로 분해된다. 그리고 연성관계를 나타내는 방정식은 시스템 해석에서 연성변수 값을 결정하기 위하여 사용된다. 따라서 시스템 해석에서 연성변수들의 값이 결정된 후에 각 하부 시스템에 매개변수로 전달된다. 따라서 시스템 해석에서 각 하부 시스템 사이의 연성관계를 일시적으로 제거했기 때문에 하부 시스템들은 독립적으로 설계가 가능해진다. 다음 식은 k 번째 하부 시스템에서 최적화를 위한 정식화이다.

Find \mathbf{x}^k (11)

to minimize $f^k(\mathbf{x}^k)$ (12)

subject to $g_j^k(\mathbf{x}^k) \leq 0, j=1, p^k$ (13)

$\mathbf{x}^k_l \leq \mathbf{x}^k \leq \mathbf{x}^k_u$ (14)

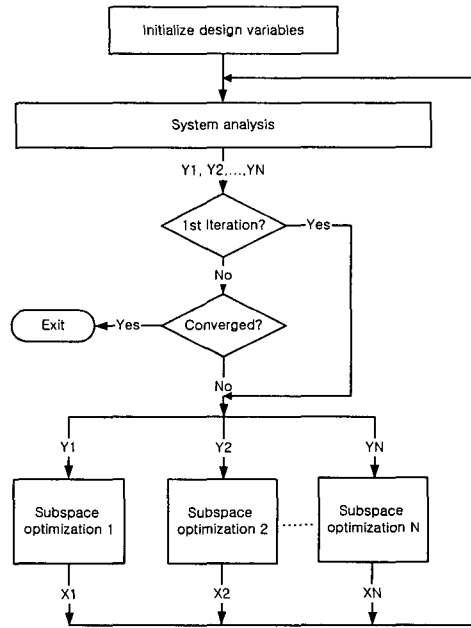


Fig. 2 Multidisciplinary Design Optimization based on Independent Subspaces (MDOIS)

여기서 \mathbf{x}^k 와 $f^k(\mathbf{x}^k)$ 는 각각 k 번째 하부 시스템에서의 설계변수와 목적함수, \mathbf{y}^k 는 연성변수로서 하부 시스템 최적화 과정 동안 상수이다. MDOIS 의 과정은 다음과 같다.

Step 1. 설계변수 초기화, $N=1$

Step 2. 시스템 해석을 수행, 주어진 설계변수 값에 대한 연성변수 값 결정

Step 3. 하부 시스템 최적화

Step 4. 최적화 과정이 수렴하면 끝내고, 그렇지 않으면 $N=N+1$, Step 2 로 간다.

수렴조건 : $\|\Delta \mathbf{x}\| \leq \epsilon$

설계변수가 바뀌면 연성변수도 변한다. 그러나 지금까지는 각 하부 시스템 최적화 과정에서 설계변수가 변하더라도 연성변수 값은 상수로 일정하게 유지되었다. 여기서는 각 하부 시스템 최적화 과정에서 설계변수 값이 바뀌면 설계변수의 변화가 연성변수에 미치는 영향을 고려해서 연성변수 값도 같이 바꿔주는 방법을 설명한다. 설계변수의 변화를 즉각적으로 반영해서 연성변수의 값을 갱신하기 위해서 식 (15)의 전역 민감도를 사용한다. 이 전역 민감도는 전역 민감도 방정식을 통해서 구할 수 있다.

$$y^k = y_0^k + \left[\frac{dy^k}{dx^k} \right] \Delta x^k \quad (15)$$

여기서 y_0^k 는 시스템 해석에서 결정된 연성변수 값, $\frac{dy^k}{dx^k}$ 는 전역 민감도 방정식으로부터 구한 민감도이다.

3. MDOIS 의 최적조건

여기서는 MDOIS 가 수립했을 경우 그 해는 설계문제를 하나의 최적화 문제로 해서 해를 구했을 때의 K-K-T 조건을 만족한다는 것을 증명한다. 증명을 위해서 모든 등제조건은 시스템 해석에서 연성변수 값을 계산하기 위해서 사용되고, 각 하부 시스템 최적화에는 포함되지 않는다는 가정하였다. 그리고 이 증명은 전역 민감도를 사용하는 경우와 사용하지 않는 경우에 대해서 각각 증명하였다.

3.1 최적 민감도 해석^(18~20)

최적 민감도는 최적점에서 최적화 과정에서 상수인 매개변수, P,에 대한 목적함수의 변화율이다. 설계변수 $x \in R^n$, 목적함수 F , 비등제조건 $g \in R^r$ 를 가지고 있는 최적화 문제의 K-K-T 조건은 다음과 같다.

$$\nabla F(x) + \sum_{j \in J} \lambda_j \nabla g_j(x) = 0 \quad (16)$$

$$\lambda_j g_j(x) = 0, \lambda_j \geq 0, j \in J \quad (17)$$

여기서 λ_j 는 j 번째 제한조건의 라그랑지 승수, J는 최적점에서 활성화된 제한조건들의 집합이다. 매개변수 P가 미소하게 변화더라도 K-K-T 조건은 계속 유지되어야 한다. 따라서 식 (16)은 계속 유효해야 한다. 그러므로 식 (16)을 매개변수 P로 미분하면 다음과 같이 된다.

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{j \in J} \lambda_j \frac{\partial^2 g_j(x)}{\partial x_i \partial x_k} \right] \frac{dx_k}{dP} + \sum_{j \in J} \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_j}{\partial P} + \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial P} + \sum_{j \in J} \lambda_j \frac{\partial^2 g_j(x)}{\partial x_i \partial P} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dP} + \frac{\partial g_j(x)}{\partial P} = 0 \quad (19)$$

식 (18), (19)는 미지수가 $\frac{dx_i}{dP}, i = 1, n$,

$\frac{d\lambda_j}{dP}, j \in J$ 인 선형 연립방정식이 되며, 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A_{n \times n} & B_{n \times J} \\ B_{J \times n}^T & 0_{J \times J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{dx}{dP} \right)_{OS} \\ \left(\frac{d\lambda}{dP} \right)_{OS} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{n \times 1} \\ d_{J \times 1} \end{bmatrix} = 0 \quad (20)$$

여기서

$$A_k = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{j \in J} \lambda_j \frac{\partial^2 g_j}{\partial x_i \partial x_k} \quad (21)$$

$$B_{ij} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \quad j \in J \quad (22)$$

$$c_i = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial P} + \sum_{j \in J} \lambda_j \frac{\partial^2 g_j}{\partial x_i \partial P} \quad (23)$$

$$d_j = \frac{\partial g_j}{\partial P}, \quad j \in J \quad (24)$$

윗 식에서 “OS”는 최적 민감도를 의미하며, 최적점에서 매개변수 P에 대한 목적함수의 미분은 다음과 같이 된다.

$$\left[\frac{dF(x)}{dP} \right]_{OS} = \frac{\partial F(x)}{\partial P} + \nabla F(x)^T \left[\frac{dx}{dP} \right]_{OS} \quad (25)$$

식 (20)에서의 미지수와 식 (25)에서의 도함수를 최적 민감도라고 한다.

3.2 전역 민감도를 사용하지 않는 경우의 MDOIS 의 최적 민감도

다분야 통합 최적설계에서 등제조건인 식 (3)은 연성변수 값을 계산하기 위한 시스템 해석에 사용된다. 이 때 식 (1)-(6)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\text{Find } x, y \quad (26)$$

$$\text{to minimize } F(x, y) \quad (27)$$

$$\text{subject to } g_j(x, y) \leq 0, j = 1, p \quad (28)$$

$$y_i(x, y) = 0, i = 1, m \quad (29)$$

$$x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \quad (30)$$

$$y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m]^T \quad (31)$$

식 (29)를 다른 식들에 대입하면 식 (26)-(31)은 다음과 같이 된다.

Find \mathbf{x} (32)

to minimize $F(\mathbf{x})$ (33)

subject to $g_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) \leq 0, j = 1, p$ (34)

위의 정식화에 대한 라그랑지 함수와 K-K-T 조건은 다음과 같다.

$$L = F + \sum_{j \in J} \lambda_j g_j \quad (35)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} + \sum_{j \in J} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial \mathbf{x}} + \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}_k} + \sum_{j \in J} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial \mathbf{y}_k} \right) \frac{d\mathbf{y}_k}{d\mathbf{x}} = 0 \quad (36)$$

$$\lambda_j g_j = 0, \lambda_j \geq 0, j \in J \quad (37)$$

그러므로 식 (36)과 식 (37)은 전통적인 최적화 방법에서의 최적조건에 대한 필요조건이다. 다분야 통합 최적설계를 같은 문제에 적용할 경우 다분야 통합 최적설계가 N 번째 과정에서 최적점에 수렴한다고 하자. 이 때 설계변수 값과 연성변수 값의 (N-3) 번째 과정부터 N 번째 과정까지 값의 변화는 다음 식과 같다.

$$\mathbf{y}_{N-2} = \mathbf{y}(\mathbf{x}_{N-3}), \mathbf{y}_{N-1} = \mathbf{y}(\mathbf{x}_{N-2}), \mathbf{y}_N = \mathbf{y}(\mathbf{x}_{N-1}) \quad (38)$$

$$\mathbf{y}_{N-1} \neq \mathbf{y}_N, \mathbf{x}_{N-1} = \mathbf{x}_N \quad (39)$$

식 (38)과 식 (39)를 보면, 최적점에 수렴할 경우 연성변수 \mathbf{y} 가 미소하게 변하더라도 설계변수 값은 변하지 않는다는 것을 알 수 있다. 여기서 n 번째 설계변수를 가지고 있는 k 번째 하부 시스템의 최적화를 위한 정식화는 다음과 같다.

Find \mathbf{x}^k (40)

to minimize $f^k(\mathbf{x}^k)$ (41)

subject to $g_j^k(\mathbf{x}^k) \leq 0, j = 1, p^k$ (42)

$$\mathbf{x}^k = [x_1^k, x_2^k, x_3^k, \dots, x_{n^k}^k]^T \quad (43)$$

이 정식화에서 연성변수 \mathbf{y} 는 하부 시스템 최적화

과정 동안에 상수이다. (N-1) 번째 과정에서 K-K-T 조건은 다음과 같다.

$$\left[\frac{\partial L^k}{\partial \mathbf{x}^k} \right]_{N-1} = \left[\frac{\partial f^k}{\partial \mathbf{x}^k} \right]_{N-1} + \left[\sum_{j \in J_k} \lambda_j^k \frac{\partial g_j^k}{\partial \mathbf{x}^k} \right]_{N-1} = 0 \quad (44)$$

$$\lambda_j^k g_j^k(\mathbf{x}^k) = 0, \lambda_j^k \geq 0, j \in J_k \quad (45)$$

여기서 λ_j^k 는 j 번째 제한조건의 라그랑지 승수이고, J_k 는 k 번째 하부 시스템에서의 활성화된 제한조건들의 집합이다. MDOIS 의 (M-1) (단, M>1)번째 반복 과정에서 테일러 시리즈 전개에 의해서 다음과 같은 선형 근사화된 설계변수를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{x}_{opt, M}^k - \mathbf{x}_{opt, (M-1)}^k = \left[\frac{d\mathbf{x}^k}{d\mathbf{y}^k} \right]_{OS, (M-1)} \cdot (\mathbf{y}_M^k - \mathbf{y}_{M-1}^k) \quad (46)$$

여기서 $\mathbf{x}_{opt, (M-1)}^k$ 는 최적점에서의 설계변수 값, $\left[\frac{d\mathbf{x}^k}{d\mathbf{y}^k} \right]_{OS, (M-1)}$ 는 최적 민감도, \mathbf{y}_{M-1}^k 는 k 번째 하부 시스템에서 (M-1) 번째 반복 과정에서의 연성변수 값이다. MDOIS 가 N 번째 반복 과정에서 수렴하면 식 (38)과 식 (39)를 만족한다. 그러므로 다음 식을 만족해야 한다.

$$\left[\frac{d\mathbf{x}^k}{d\mathbf{y}^k} \right]_{OS, (M-1)} \cdot (\mathbf{y}_M^k - \mathbf{y}_{M-1}^k) = 0 \quad (47)$$

식 (47)를 만족하기 위해서는 다음 식 중에 하나가 만족되어야 한다.

$$(1) \left[\frac{d\mathbf{x}^k}{d\mathbf{y}^k} \right]_{OS, (M-1)} = 0 \quad (48)$$

$$(2) \text{ The vectors } \left[\frac{d\mathbf{x}^k}{d\mathbf{y}^k} \right]_{OS, (M-1)}, i = 1, \dots, n^k \text{ are orthogonal to } (\mathbf{y}_M^k - \mathbf{y}_{M-1}^k). \quad (49)$$

먼저 식 (48)을 만족할 경우를 생각해보자. 최적화가 N 번째 반복과정에서 수렴할 경우 그때는 다음 식을 만족해야 한다.

$$\left[\frac{d\mathbf{x}^k}{d\mathbf{y}^k} \right]_{OS, N} = 0 \quad (50)$$

식 (20)과 식 (24)로부터

$$d_j = \mathbf{b}^T \cdot \frac{d\mathbf{x}^k}{dy_i^k} + \mathbf{0} \cdot \frac{d\lambda}{dy_i^k} = 0 = \frac{\partial g_j(\mathbf{x}^k)}{\partial y_i^k}, i=1, \dots, m^k, j \in J_k \quad (51)$$

여기서 y_i^k 는 k 번째 하부 시스템에서 i 번째 연성변수, \mathbf{b} 는 식 (20)에서 \mathbf{B} 의 j 번째 행이다.

처음 가정에 의해서 목적함수는 연성변수의 함수가 아니다, 따라서 연성변수에 대한 목적함수의 편미분은 다음과 같다.

$$\frac{\partial f^k}{\partial y_i^k} = 0 \quad (52)$$

식 (51)과 식 (52)로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{i=1}^{m^k} \frac{\partial y_i^k}{\partial \mathbf{x}^k} \left(\frac{\partial f^k}{\partial y_i^k} + \sum_{j \in J_k} \lambda_j^k \frac{\partial g_j^k}{\partial y_i^k} \right) = 0 \quad (53)$$

따라서 MDOIS 가 수렴할 경우, k 번째 하부 시스템의 K-K-T 조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial L^k}{\partial \mathbf{x}^k} = \frac{\partial f^k}{\partial \mathbf{x}^k} + \sum_{j \in J_k} \lambda_j^k \frac{\partial g_j^k}{\partial \mathbf{x}^k} = 0, \lambda_j^k \geq 0 \quad (54)$$

식 (53)과 식 (54)를 더하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial L^k}{\partial \mathbf{x}^k} = \frac{\partial f^k}{\partial \mathbf{x}^k} + \sum_{j \in J_k} \lambda_j^k \frac{\partial g_j^k}{\partial \mathbf{x}^k} + \sum_{i=1}^{m^k} \frac{\partial y_i^k}{\partial \mathbf{x}^k} \left(\frac{\partial f^k}{\partial y_i^k} + \sum_{j \in J_k} \lambda_j^k \frac{\partial g_j^k}{\partial y_i^k} \right), \lambda_j^k \geq 0 \quad (55)$$

첫번째 하부 시스템부터 w 번째 하부 시스템까지 식 (55)를 전개한 후에 모두 더하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} + \sum_{j \in J^*} \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial \mathbf{x}} + \sum_{q=1}^m \frac{\partial y_q}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial F}{\partial y_q} + \sum_{j \in J^*} \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial y_q} \right) = 0, \lambda_j^* \geq 0 \quad (56)$$

여기서 $J^* = J_1 + J_2 + \dots + J_k + \dots + J_w$

식 (56)은 문제를 하나의 최적화 문제로 설계했을 때의 K-K-T 조건인 식 (36), 식 (37)과 같다.

또한 MDOIS 의 반복과정은 식 (49)가 만족되면 종료된다. 그러나 식 (49)가 만족될 경우에 항상 K-K-T 조건을 만족하는 연성변수 값과 설계변수 값을 얻을 수 있는 것은 아니다. 그리고 더 좋은 해를 계속 찾을 수 없다. 따라서 이 경우에는 K-K-T 조건이 항상 만족된다는 것은 보장할 수 없다. 따라서 식 (48)이 MDOIS 의 수렴을 위한 조건이 된다. 만약 식 (48)과 식 (49)가 만족되지 않을 경우 해는 구할 수 없다. 설계변수 변화량의 놈(norm)은 수렴조건 식 (48)과 같은 역할을 한다. 따라서 설계변수 변화량의 놈을 수렴조건으로 사용할 수 있다

3.3 전역 민감도를 사용할 경우의 MDOIS 의 최적 민감도

전역 민감도를 사용하는 경우는 하나의 최적화 문제로 설계할 경우에 다음 식과 같이 비등제한조건의 수를 증가시키는 경우와 같다.

$$h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (57)$$

$$\delta h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, i=1, \dots, m \quad (58)$$

식 (58)로부터 $\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}}$ 는 다음과 같이 될 수 있다.

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx_1} & \dots & \frac{dy_1}{dx_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{dy_m}{dx_1} & \dots & \frac{dy_m}{dx_n} \end{pmatrix} \quad (59)$$

여기서 $\frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}}$ 는 또 다른 연성변수로 생각할 수 있다.

k 번째 하부 시스템의 M 번째 반복과정에서 연성변수는 식 (15)를 이용해서 갱신되면, 최적화를 위한 정식화는 다음과 같다.

$$\text{Find } \mathbf{x}^k \quad (60)$$

$$\text{to minimize } f^k(\mathbf{x}^k) \quad (61)$$

subject to

$$g_j^k(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}_M^k + \frac{d\mathbf{y}^k}{d\mathbf{x}^k} \cdot (\mathbf{x}^k - \mathbf{x}_{M-1}^k)), j=1, \dots, p^k \quad (62)$$

$$\mathbf{x}_i^k \leq \mathbf{x}^k \leq \mathbf{x}_i^k \quad (63)$$

위의 정식화는 연성변수의 수가 증가한 것을

제외하고는 같다. 따라서 전역 민감도를 사용하지 않는 경우의 증명이 전역 민감도를 사용하는 경우에 그대로 사용할 수 있다.

4. 수학적 예제

여기서는 본 논문에서 제시한 독립적 하부 시스템에 의한 다분야 통합 최적설계의 성능을 비교하기 위하여 2 개의 수학적예제에 적용하였다. 첫 번째 문제는 독립적 하부 시스템에 의한 다분야 통합 최적설계의 전제조건을 만족하는 문제이고, 나머지 문제는 독립적 하부 시스템에 의한 다분야 통합 최적설계의 전제조건을 만족하지 문제이다. 즉, 설계변수가 여러 하부 시스템에 공유된 문제이다. 독립적 하부시스템에 의한 다분야 통합 최적설계의 전제조건을 만족하지않는 수학적 예제의 최적화 수치 결과들을 보여줌으로써 독립적 분해 기준에 맞지 않는 문제에서도 적용할 수 있는 공학적인 알고리즘임을 확인하였다.

4.1 수학적예제 1

이 예제는 독립적 하부 시스템에 의한 다분야 통합 최적설계를 테스트하기 위하여 개발한 수학적예제로 다음과 같다.

$$\text{Find } x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 \quad (64)$$

$$\text{to minimize } F = y_2 + y_3 \quad (65)$$

subject to

$$h_1 = \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_3x_4 - 3}{25} - y_1 - 4.2y_4 = 0 \quad (66)$$

$$h_2 = \frac{x_1x_4 + x_2x_3 + x_3x_4 - 10}{20} + 2y_1 - y_4 = 0 \quad (67)$$

$$g_1 = x_1x_2 + x_2^2 + y_4 - 3 \leq 0 \leq 0 \quad (68)$$

$$g_2 = x_4^2 - 4x_3x_4 - 2x_4 + y_1 + 7 \leq 0 \quad (69)$$

Table 1 Optimization results

	AAO	MDF	MDOIS
x1	-0.64	-0.64	-0.64
x2	-1.46	-1.45	-1.45
x3	1.54	1.54	1.54
x4	1.01	1.01	1.01
y1	0.26	0.25	0.27
y4	-0.05	-0.05	-0.05
Objective function	-9.32	-9.32	-9.32

$$g_3 = x_3^2 + x_4 - x_3y_1 - 3 \leq 0 \quad (70)$$

여기서

$$y_1 = \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_3x_4 - 3}{25} - 4.2y_4 \quad (71)$$

$$y_2 = x_1^2 + 2.0x_1x_2^4 + 5.0x_2 + x_1e^{y_4} + 12 \quad (72)$$

$$y_3 = x_4^2 + 2x_3x_4^2 - 8x_3 + x_4y_1^2 \quad (73)$$

$$y_4 = \frac{x_1x_4 + x_2x_3 + x_3x_4 - 10}{20} + 2y_1 \quad (74)$$

이 문제를 독립적으로 분해하면 다음과 같다.

Subspace 1

$$\text{Find } x_1, x_2 \quad (75)$$

$$\text{to minimize } f^1 = y_2 \quad (76)$$

$$\text{subject to } g_1 \leq 0 \quad (77)$$

Subspace 2

$$\text{Find } x_3, x_4 \quad (78)$$

$$\text{to minimize } f^2 = y_3 \quad (79)$$

$$\text{subject to } g_2 \leq 0 \quad (80)$$

$$g_3 \leq 0 \quad (81)$$

Table 1 은 문제를 하나로 정식화해서 최적화하는 다분야 통합 최적설계 방법인 All-at-once, MDF 와 결과를 비교한 것이다. 이 결과를 보면 각각의 독립된 설계문제로 분해해서 독립적 하부 시스템에 의한 다분야 통합 최적설계를 적용한 결과가 하나의 문제로 정식화해서 최적화한 결과와 같게 나옴을 알 수 있다.

4.2 수학적예제 2

이 예제는 인공신경망(Neural-Network)을 이용한 CSSO 를 테스트하기 위해 개발된 문제이다. 문제는 다음과 같이 정의된다.^(20,21)

$$\text{Find } x_1, x_2, x_3 \quad (82)$$

$$\text{to minimize } F(\mathbf{x}) = y_2 + y_3 \quad (83)$$

$$\text{subject to } h_1 = x_1^2 + x_2 + x_3 - 0.2y_4 - 4.0 - y_1 \quad (84)$$

$$h_2 = x_1 + x_3 - \sqrt{y_1} - 2.0 - y_4 \tag{85}$$

$$g_1 = -y_3 \leq 0 \tag{86}$$

$$g_2 = -y_6 \leq 0 \tag{87}$$

여기서

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \tag{88}$$

$$\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \ y_5 \ y_6]^T \tag{89}$$

$$y_1 = x_1^2 + x_2 + x_3 - 0.2y_4 - 4.0 \tag{90}$$

$$y_2 = y_1 + (x_2 - 2.0)^2 \tag{91}$$

$$y_3 = \frac{y_1}{8} - 1 \tag{92}$$

$$y_4 = x_1 + x_3 - \sqrt{y_1} - 2.0 \tag{93}$$

$$y_5 = x_3 - 2.0 - e^{-y_4} \tag{94}$$

$$y_6 = 1.0 - \frac{y_4}{10} \tag{95}$$

문제를 독립적으로 분해하면 다음과 같다.

Subspace 1

Find x_1, x_2 (96)

to minimize $f^1 = y_2$ (97)

subject to $g_1 = -y_3 \leq 0$ (98)

Subspace 2

Find x_3 (99)

to minimize $f^2 = y_5$ (100)

subject to $g_2 = -y_6 \leq 0$ (101)

이 문제에서 연성변수는 y_1, y_4 이며, 식 (84)와 식 (85)를 이용하여 시스템 해석을 통해서 연성변수 값을 구한다. 이 예제는 독립적 분해 기준에는 적합하지 않다. 따라서 이 예제는 독립적으로 분해되지 않는 문제에도 적용할 수 있다는 수치적 예제이다. 이 문제는 Table 2에서 CSSO, MDF와 설계결과를 비교하였다.

Table 2 Optimization results

	CSSO	MDF	MDOIS
x1	3.02	3.02	3.02
x2	2.00	2.00	2.00
x3	2.00	2.00	2.00
No. of iteration	3.00	3.00	3.00
Objective function	7.99	8.00	7.99

5. 결론

최근 들어 많은 공학적 설계문제들은 다분야 환경에서 설계가 이루어진다. 따라서 여러 분야 사이에는 연성관계가 존재한다. 이러한 설계환경에서 여러 분야를 동시에 고려하기 위해서 개발된 방법이 다분야 통합 최적설계이다. 실제 설계문제 중에는 연성관계를 제외하고 서로 독립적으로 정의될 수 있다. 따라서 본 논문에서는 그러한 설계 문제에 적용하기 위해 MDOIS 라는 MDO 방법을 개발하였다.

MDOIS 는 몇 개의 가정하에서 K-K-T 조건을 만족한다는 것을 수학적으로 증명되었다. MDOIS 는 다른 MDO 방법에 비해서 상대적으로 간단하다. 이 개발된 방법은 수학예제를 통해서 테스트되었다. 그리고 독립적 하부 시스템에 의한 다분야 통합 최적설계의 분리기준을 만족하는 수학문제를 개발하여 다른 알고리즘과 비교하였다. 또한 독립적 분해 기준을 만족하지 않는 수학문제에 적용하고, 기존의 다분야 통합 최적설계방법의 결과와 비교하여 독립적 분해 할 수 없는 문제에 적용할 수 있을 보임으로써 알고리즘의 유용성을 검증하였다.

본 논문은 다분야 통합 최적설계 알고리즘 개발에 초점을 맞추었기 때문에 소개하지 않았지만 자동차 충돌문제에 적용하여 충돌문제와 같이 큰 문제에도 적용하는데 아무런 문제가 없음을 검증하였다.

향후에 더 많은 설계문제에 적용하여 검증을 수행해야 하며, 이 알고리즘을 적용하기 위한 전제 조건을 만족하지 않는 설계문제에 대해서도 적용할 수 있는 방법을 개발해야 한다.

후 기

본 연구는 최적설계연구센터의 지원을 받아 수행하였습니다.

참고문헌

- (1) Sobieszczanski-Sobieski, J., James B. B. and Dovi A. R., 1985, "Structural Optimization by Multilevel Decomposition," *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 11, pp. 1775~1782.
- (2) Sobieszczanski-Sobieski, J., 1982, "A Linear Decomposition Method for Large Optimization Problems - Blueprint for Development," *NASA TM 83248*.
- (3) Hulme, K. F. and Bloebaum, C. L., 1998, "A Comparison of Solution Strategy for Simulation-Based Multidisciplinary Design Optimization," *AIAA Paper AIAA-97-4977, AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 38th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*.
- (4) Moon-Kyun Shin, 2001, *Multidisciplinary Design Optimization Based on Independent Subspaces*, Ph.D. Dissertation, Hanyang University.
- (5) Hajela, P., Bloebaum, C. L. and Sobieszczanski-Sobieski, J., "Application of Global Sensitivity Equations in Multidisciplinary Aircraft Synthesis," *J. of Aircraft*, Vol. 27, No. 12, pp.1002~1010.
- (6) Sobieszczanski-Sobieski, J., 1990, "On the Sensitivity of Complex, Internally Coupled Systems," *AIAA Journal*, Vol. 28, No. 1, pp. 153~160.
- (7) Sobieszczanski-Sobieski, J., 1990, "Sensitivity Analysis and Multidisciplinary design Optimization for Aircraft Design: Recent Advances and Results," *Journal of Aircraft*, Vol. 27, No. 12, pp. 993~1001.
- (8) Hajela, P., Bloebaum, C. L. and Sobieszczanski-Sobieski, J., 1990, "Application of Global Sensitivity Equations in Multidisciplinary Aircraft Synthesis," *Journal of Aircraft*, Vol. 27, No. 12, pp. 1002~1010.
- (9) Arora J.S., 1989, *Introduction to Optimum Design*, McGraw-Hill book company, New York.
- (10) Vanderplaats, G. N., 1984, *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*, McGraw-Hill book company, New York.
- (11) Mokhtar S. Bazaraa, Hanif D. Sherali and Shetty, C. M., *Nonlinear Programming : Theory and Algorithm*, John Wiley & Sons, Inc.
- (12) Sobieszczanski-Sobieski, J., 1988, "Optimization by Decomposition: A Step from Hierarchic to Non-Hierarchic Systems," *In Recent Advances in Multidisciplinary Analysis and Optimization (Ed. J.-F. Barthelemy)*, NASA CP 3031.
- (13) Hulme, K. F., 2000, *The Design of a Simulation-Based Framework for Development of Solution Approaches in Multidisciplinary Design Optimization*, Ph.D. Dissertation, State University of New York at Buffalo.
- (14) Cramer, E. j., Dennis J. E., Jr., Frank, P. D., Lewis, R. M. and Shubin, G. R., 1993, "Problem Formulation for Multidisciplinary Optimization," *Center for Research on Parallel Computation, Rice Univ., Rept. CRPC-TR93334*, Houston.
- (15) Sobieszczanski-Sobieski, J., Agte, J., and Sandusky Jr. R., 1998, "Bi-Level Integrated System Synthesis," *Proceedings of AIAA/USAF/NASA/ISSMO symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, St. Louis, MO, AIAA-98-4916.
- (16) Braun R. D., 1996, *Collaborative Optimization: An Architecture for Large-Scale Distributed Design*, Ph.D. Dissertation, Stanford University.
- (17) Sobieski, I.P. and Kroo, I., 1996, "Collaborative Optimization Applied to an Aircraft Design Problem," *AIAA Aerospace Sciences Meeting*, AIAA Paper No. 96-0715.
- (18) Sobieszczanski-Sobieski, J., Barthelemy, Ed. J.-F. and Riley, K. M., 1981, "Sensitivity of Optimum Solutions to Problem Parameters," *Proceedings of AIAA/ASME/ASCE/AHS 22nd Structures, Structure Dynamics, and Materials Conference*, Atlanta, Georgia.
- (19) Barthelemy, Ed. J.-F., Sobieszczanski-Sobieski, J., 1983, "Optimum Sensitivity Derivatives of Objective Functions in Nonlinear Programming," *AIAA Journal*, Vol. 21, No. 6, pp. 913~915.
- (20) Renaud, J. E. and Gabriele, G. A., 1994, "Approximation in Nonhierarchic System Optimization," *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 1, pp. 198~205.
- (21) Renaud, J. E. and Gabriele, G. A., 1993, "Improved Coordination in Nonhierarchic System Optimization," *AIAA Journal*, Vol. 31, No. 12, pp.2367~2373.