

# 유연구조물의 최소중량설계에 관한 연구

박중현#

## A Study on the Minimum Weight Design for Flexible Structure

Jung-Hyen Park#

### ABSTRACT

A control-structure combined optimal design problem is discussed taking a 3-D truss structure as a design object. We use descriptor forms for a controlled object and a generalized plant because the structural parameters appear naturally in these forms. We consider not only minimum weight design problem for structure system, but also suppression problem of the effect of disturbances for control system as the purpose of the design. By minimizing the linear sum of the normalized structural objective function and control objective function, it is possible to make optimal design by which the balance of the structural weight and the control performance is taken.

**Key Words :** Combined optimal design (통합최적설계), Minimum weight design (최소중량설계), Vibration control (진동제어), 3-D Truss structure (3 차원트러스구조물), Weighting factor (가중인자)

### 1. 서론

구조-제어시스템의 통합최적설계는 고도의 기계구조물을 설계하는데 있어 유력한 동적설계수법의 하나이다. 특히, 인공위성이나 우주 스테이션으로 대표되는 제어가 어려운 유연구조, 대규모 시스템인 유연우주구조물 등의 설계에는 적절한 수법으로 고려되어진다. 이러한 대규모 구조물의 설계에서는 경량설계라는 구조설계사양과 진동억제 등의 엄격한 제어시스템사양이 존재한다. 그러나 구조물이 경량일 경우 강성이 작기 때문에 미소한 외란에 의해서도 진동이 발생한다. 또한, 감쇠가 작기 때문에 일단 발생한 진동은 수렴하기 어렵다는 결점이 있다. 그러한 진동에 대하여 제진특성

을 확보하기 위하여는 제어시스템설계에 대한 부담이 증가한다. 역으로 제어시스템설계에 대한 부담을 작게 하기 위해서는 구조물의 강성을 높일 필요가 요구되며, 결과적으로 구조중량이 증가한다. 이러한 경우와 같이 구조설계와 제어설계 분야에 밀접한 관련이 있는 경우, 구조-제어시스템을 통합적으로 설계할 필요가 있다.<sup>1,2</sup>

일반적으로 이러한 문제는 설계대상을 상태방정식으로 기술하여 취급해왔다. 본 논문에서는 설계대상의 표현에 있어 디스크립터 형식을 사용한다. 디스크립터 형식은 시스템에 나타나는 변수사이의 동적, 정적 관계의 자연스러운 기술을 가능하게 함으로써, 변수간의 결합 및 물리정수의 배치에 유래하는 구조시스템의 더욱 우수한 모델링

접수일: 2003 년 3 월 29 일; 게재승인일: 2004 년 1 월 19 일  
교신저자, 신라대학교 자동차기계공학과  
Email : sky@silla.ac.kr Tel. (051) 309-5727

을 가능하게 한다.<sup>3</sup>

본 연구에서는, 3 차원 트러스 구조물을 유한요소법에 의해 모델링화 한 것을 설계대상으로 하여 구조-제어 시스템의 통합최적설계문제를 다룬다. 구조시스템의 평가함수는 구조중량이며, 제어시스템의 평가함수는 전체 페루프시스템의 외란에서 제어출력까지의 전달함수의  $H^\infty$  norm 이다. 통합최적설계문제의 평가함수는 정규화 되어진 구조-제어시스템 평가함수의 가중인자포함 선형함수로 한다. 이 평가함수를 최소화 함으로써 구조중량과 제어성능의 균형이 잡힌 최적설계가 가능하다고 생각되어진다. 최적설계문제에 있어서의 설계변수로는 트러스 부재의 단면적을 채용하여, 수치 시뮬레이션을 통하여 본 설계법의 유효성을 보인다.

## 2. 시스템의 정식화

본 논문에서는, 재질 및 구조적 배치는 변화하지 않는  $n$  개의 부재로부터 구성되는 입체 트러스 구조물을 설계대상으로 한다. 유한요소법에 의해 모델링하면 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$M(a)\ddot{q} + D(a)\dot{q} + K(a)q = L_1w + L_2u \quad (1)$$

여기서  $M(a), D(a), K(a)$  는 각각 질량, 감쇠, 강성 행렬,  $q, L_1, w, L_2, u$  는 절점변위벡터, 외란입력배치행렬, 외란입력, 조작입력배치행렬, 조작입력이다. 그리고  $a = [a_1 \dots a_n]^T$  는 설계변수인 트러스 부재단면적  $a_i (i=1, \dots, n)$  의 벡터이다.

다음으로,  $x$  디스크립터변수,  $z$  제어출력,  $y$  관측출력으로 하여, 식(1)을 디스크립터 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$E\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \quad (2)$$

$$z = C_1x + D_{12}u \quad (3)$$

$$y = C_2x + D_{21}w \quad (4)$$

여기서  $E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M(a) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K(a) & -D(a) \end{bmatrix}$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ L_1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ L_2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad (5)$$

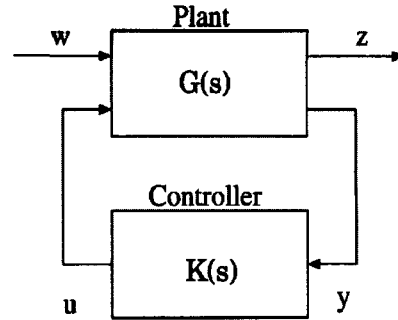


Fig. 1  $H^\infty$  Control system

디스크립터 방정식과 비교하여, 식(1)의 운동방정식을 상태방정식으로 변환하면

$$\dot{x} = A_s x + B_{1s} w + B_{2s} u \quad (6)$$

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M(a)^{-1}K(a) & -M(a)^{-1}D(a) \end{bmatrix}$$

$$B_{1s} = \begin{bmatrix} 0 \\ M(a)^{-1}L_1 \end{bmatrix}, B_{2s} = \begin{bmatrix} 0 \\ M(a)^{-1}L_2 \end{bmatrix}$$

와같이 표현되어, 식(6)에서는 질량행렬  $M(a)$  가 역행렬  $M(a)^{-1}$  의 형태로 나타난다. 일반적으로, 질량행렬의 요소 한 개가 변화하는 경우에도 역행렬의 모든 요소가 변화하므로, 구조시스템의 요소 변경은 상태방정식 계수행렬의 변경에 복잡하게 나타난다. 그러므로, 디스크립터 형식이 상태방정식보다 시스템 모델링에 있어 우수한 표현이라고 말할 수 있다.

제어대상을 식(2)~(4)와 같은 디스크립터 방정식으로 나타낸다.  $H^\infty$  제어문제란, Fig. 1 과 같은 페루프시스템의 외란입력  $w$  에서 제어출력  $z$  까지 전달함수행렬  $T_{zw}$  의  $H^\infty$  norm 이, 어떤 주어진  $\gamma > 0$  에 대하여 다음의 식을 만족하는 내부안정인  $H^\infty$  콘트롤러  $K(s)$  를 구하는 문제이다.

$$N = \|T_{zw}\|_\infty < \gamma \quad (7)$$

여기서  $T_{zw} = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}$   
 $G_{ij}(s) = C_i(sI - A)^{-1}B_j + D_{ij}$   
 $\|T_{zw}\|_\infty = \sup_w \sigma_{\max}(T_{zw}(jw))$

여기서  $\sigma_{\max}(T_{zw})$  는  $T_{zw}$  의 최대특이값이다. 주파수영역에서 정의되어진 식(7)의 사양은 다음과 같이 시간영역에서 표현가능하다.

$$\int_0^{\infty} z^T(t)z(t)dt < \gamma^2 \int_0^{\infty} w^T(t)w(t)dt \quad (8)$$

식(8)의 우변이 시스템에 대한 외란의 영향을 나타내므로,  $N$  값이 작을수록 외란에 의한 진동의 영향을 억제하는 것이 가능하다.

다음과 같은 두개의 대칭인 Riccati 방정식을 생각한다(식 9,11).<sup>4,5</sup>

$$\begin{aligned} & (A - B_2 D_{12}^{\#} C_1)^T X + X^T (A - B_2 D_{12}^{\#} C_1) \\ & - X^T (B_2 R_{12}^{-1} B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) X \\ & + (D_{12}^{\perp} C_1)^T (D_{12}^{\perp} C_1) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$E^T X = X^T E \geq 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & (A - B_1 D_{21}^{\#} C_2) Y + Y^T (A - B_1 D_{21}^{\#} C_2)^T \\ & - Y^T (C_2 R_{21}^{-1} C_2^T - \gamma^{-2} C_1 C_1^T) Y \\ & + (B_1 D_{21}^{\perp}) (B_1 D_{21}^{\perp})^T = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$E Y = Y^T E^T \geq 0 \quad (12)$$

여기서  $R_{12} = D_{12}^T D_{12} > 0, R_{21} = D_{21} D_{21}^T > 0$   
 $D_{12}^{\#} = R_{12}^{-1} D_{12}^T, D_{12}^{\perp} = I - D_{12} D_{12}^{\#}$   
 $D_{21}^{\#} = D_{21}^T R_{21}^{-1}, D_{21}^{\perp} = I - D_{21}^{\#} D_{21}$

이 두개의 Riccati 방정식을 만족하는 해  $X, Y$  가 존재하며, 또한, 다음이 성립한다고 가정한다.

$$\det(I_n - \gamma^{-2} Y X) \neq 0, Z = (I_n - \gamma^{-2} Y X)^{-1} \geq 0 \quad (13)$$

이때, 다음과 같은  $H^{\infty}$  콘트롤러가 존재한다.

$$E \dot{x}_k = A_k x_k + B_k y \quad (14)$$

$$u = C_k x_k + D_k y \quad (15)$$

여기서  $A_k = A - B_k C_2 + \gamma^{-2} Y^T C_1^T C_1$   
 $+ (B_2 + \gamma^{-2} Y^T C_1^T D_{12}) C_k$   
 $B_k = (Y^T C_2^T + B_1 D_{21}^T) R_{21}^{-1}$   
 $C_k = R_{12}^{-1} \{ D_{12}^T C_1 + (B_2 + \gamma^{-2} Y^T C_1^T D_{12})^T Z \}$   
 $D_k = 0$

### 3. 최적설계문제

본 연구에서는 구조시스템에 대한 최소중량설계문제와 제어시스템의 외란에 의한 영향 억제문제를 설계목적으로 생각한다. 대상구조물로서 트러스 구조물을 채용하면 시스템의 질량, 감쇠, 강성행렬은 트러스 부재 단면적의 함수로 모델링이 가능하다.<sup>6,7</sup> 구조 평가함수를 전체구조중량  $W$ , 제어 평가함수를  $H^{\infty}$  norm  $N$  으로 한다.  $W$  는 부재의 밀도, 길이, 단면적을  $\rho_i, l_i, a_i$  라고 하면, 다음과 같이 계산된다.

$$W(a) = \sum_{i=1}^n \rho_i l_i a_i \quad (16)$$

$N$  은 구조물에 대하여 식(17)의 구간에서  $\gamma$  이터레이션을 사용하여  $H^{\infty}$  최적제어문제를 풀었을 경우의  $\gamma$  의 최소값으로 한다.

$$0 < \gamma \leq \gamma^{\max} \quad (17)$$

최적설계문제에서의 평가함수  $J$  를 정규화 되어진  $W$  와  $N$  의 선형함수로 하여 다음식과 같이 정의한다.

$$J(a) = w_W \frac{W(a)}{W_0} + w_N \frac{N(a)}{N_0} \quad (w_W + w_N = 1) \quad (18)$$

$w_W, w_N$  은 구조, 제어시스템의 평가함수에 대한 가중인자이며,  $W_0, N_0$  는 단일단면적 초기구조에서의 구조중량과  $H^{\infty}$  norm 의 값이다. 설계변수로 부재단면적  $a$  를 채용하여 식(18)을 최소화함으로써, 구조중량과 제어성능의 균형 잡힌 최적설계를 실현가능 하게한다.<sup>8,9</sup>

$H^{\infty}$  제어문제는 모든 경우에 있어 해가 존재하지는 않기 때문에, 가해조건을 설계문제의 제약조건으로 고려할 필요성이 있다. 결과적으로, 본 연구에서의 최적설계문제를 다음과 같이 기술한다.

$$\min_a J(a) = w_W \frac{W(a)}{W_0} + w_N \frac{N(a)}{N_0}$$

$$\text{subject to } \begin{cases} \text{There exists } X \text{ in Eq. (9).} \\ \text{There exists } Y \text{ in Eq. (11).} \\ \text{Eqs. (10), (12), (13) are satisfied.} \end{cases} \quad (19)$$

그리고, 설계변수에 대하여 다음과 같은 제약조건을 정의한다.

$$a^{\min} \leq a \leq a^{\max} \quad (20)$$

$a^{\min}, a^{\max}$  는 부재 단면적의 하한값, 상한값이다.

#### 4. 수치 시뮬레이션

Fig. 2 에 보이는 3 차원 트러스 구조물을 설계 대상으로 한다. 유연구조물인 3 차원 트러스 구조물은 이하와 같은 무차원화 되어진 사양을 가진다고 가정한다.

장부재 길이 ( $a_l : l=1, \dots, 6$ )	10
단부재 길이 ( $a_s : s=7, \dots, 12$ )	$2\sqrt{2}$
밀도 ( $\rho$ )	1.0
중탄성계수 ( $E$ )	$10^4$

Fig. 2 의 구조물에서는, 절점 5,6,7,8,9,10 은 각각  $x, y, z$  방향에 고정되어 있다. 절점 1 의  $x, y, z$  방향에 센서가 배치되어 절점 1 의 변위를 측정한다. 또한, 절점 1 에는 액츄에이터가  $x, y, z$  방향에 배치되어 제어입력을 가하는 것으로 한다. 외란은 절점 2,3,4 의  $y$  방향으로 작용한다고 가정한다. 감쇠 특성은 다음과 같이 정의한다.

$$D(a) = 0.001M(a) + 0.001K(a) \quad (21)$$

먼저, 각 부재의 단면적이  $a_i = 1.0 (i=1, \dots, 12)$  로 동일한 경우를 생각한다. 이러한 구조를 초기구조라고 한다. 초기구조에 대한 구조중량  $W$  는 76.971 이며, 식(17)에 해당하는 다음구간에서 계산되어진  $N$  값은 0.485 이다.

$$0 < \gamma \leq 10 \quad (22)$$

초기구조에 대한 이러한 구조중량과  $H^\infty$  norm 값은 식(18)의  $W_0, N_0$  로 사용한다.

부재 단면적을 설계변수로 하여 식(20)에 해당하는 각 부재 단면적의 제약조건을 다음으로 한다.

$$0.5 \leq a_i \leq 1.5 (i=1, \dots, 12) \quad (23)$$

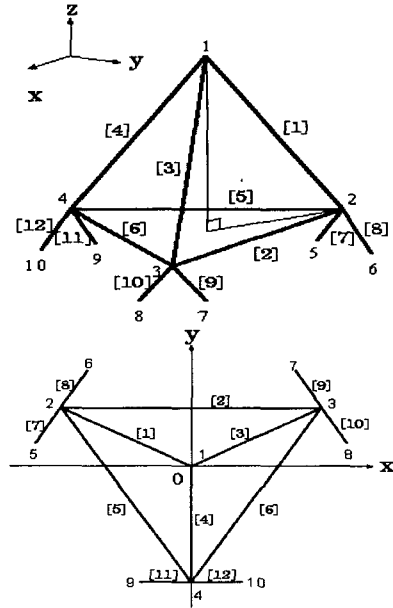


Fig. 2 3-D truss structure

먼저, 가중인자를 이하와 같이 설정하여 통합 최적설계를 실행한다.

$$(w_W, w_N) = (0.5, 0.5) \quad (24)$$

이 설정(case1)에서의 최적화 결과, 평가함수  $J$  가 최소값을 가질 경우의 구조중량  $W$  는 71.383, 제어성능의 평가함수인  $N$  값은 0.437 이었다. 초기구조와 비교하여 구조중량은 7.3%,  $H^\infty$  norm 값은 9.9% 감소시키는 것이 가능했다. 그리고, 가중인자를 이하와 같이 설정(case2)하여

$$(w_W, w_N) = (0.6, 0.4) \quad (25)$$

최적화를 실행한 결과는,  $W$  가 64.945,  $N$  가 0.460 이었다. 이 경우에 있어서는 초기구조와 비교하여, 구조중량을 15.6%,  $H^\infty$  norm 을 5.2% 줄이는 것이 가능하였다. 이러한 두 가지 어느 경우라도, 초기구조와 비교하여, 구조중량을 감소시키고, 외란에 의한 진동에 대한 제진성능을 향상시키는 설계가 가능함을 확인하였다.

다음으로, 가중인자를 이하와 같이 설정하여 통합최적설계를 실행하였다.

$$(w_W, w_N) = (0.7, 0.3) \quad (26)$$

이 설정(case3)에서는 구조중량  $W$  는 54.693,  $N$  값은 0.519 이었다. 초기구조와 비교하여 전체구조중량은 28.9% 저감 시키는 것이 가능하였으나,  $N$  값은 7.0% 증가하여 외란의 영향에 의한 진동에 대한 제진성능은 악화되었다. 그리고, 가중인자를 다음과 같이 설정(case4)하여

$$(w_W, w_N) = (0.3, 0.7) \quad (27)$$

최적화를 실행한 결과는,  $W$  가 85.308,  $N$  는 0.419 이었다. 이 경우는 초기구조에 비해  $N$  값은 13.6% 저감 가능으로 외란에 의한 진동의 제진성능은 향상되었지만, 구조중량은 10.8% 증가하였다. 이러한 결과는, 설계자의 가중인자선택에 의하여 설계사양의 밸런스가 조절가능하다는 사실을 나타내고 있다. 각 경우에 대한 트러스 구조물의 각 부재 단면적을 Fig. 3, 4 에 나타낸다.

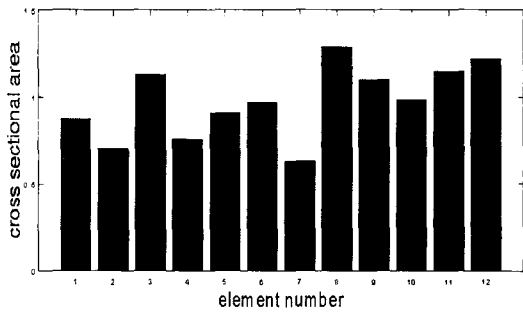


Fig. 3(a) Case 1:  $(w_W, w_N) = (0.5, 0.5)$

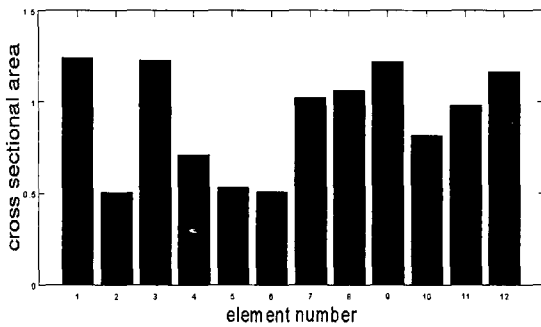


Fig. 3(b) Case 2:  $(w_W, w_N) = (0.6, 0.4)$

Fig. 3 Distribution of cross sectional areas

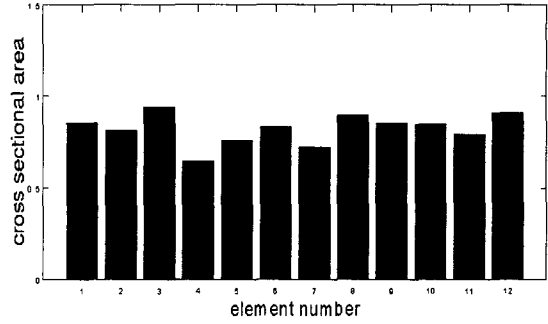


Fig. 4(a) Case 3:  $(w_W, w_N) = (0.7, 0.3)$

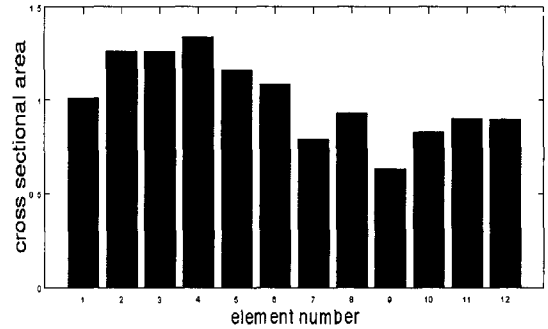


Fig. 4(b) Case 4:  $(w_W, w_N) = (0.3, 0.7)$

Fig. 4 Distribution of cross sectional areas

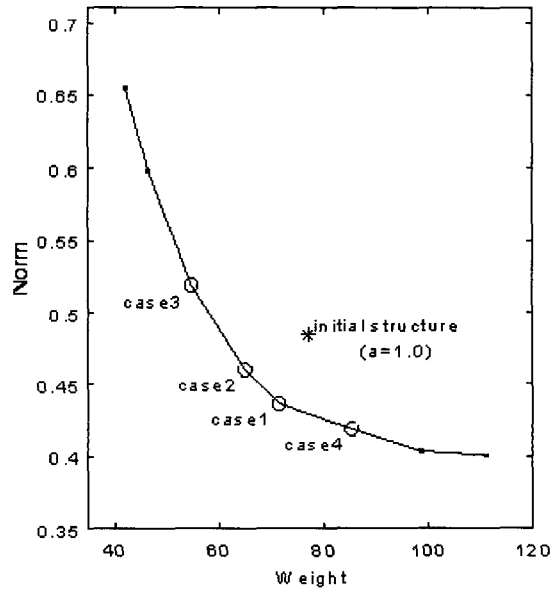


Fig. 5 Relation of structural weight and  $H^\infty$  norm

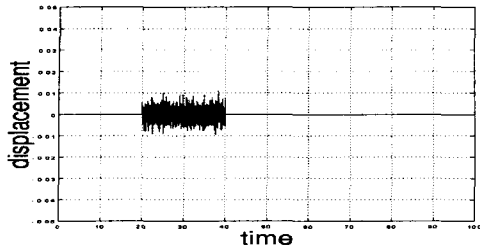


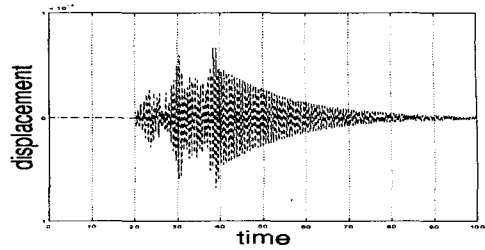
Fig. 6 Disturbance

지금부터는, 구조와 제어 평가함수인 구조중량  $W$  와 외란 입력에서 제어 출력까지의 전달함수의  $H^\infty$  norm  $N$  과의 관계에 대해서 고찰해 보자. 몇 가지 경우의 가중인자 ( $w_W, w_N$ ) 에 대하여 통합최적화를 실행한 결과, 구조중량  $W$  와  $H^\infty$  norm  $N$  의관계를 Fig. 5 에 나타낸다. Fig.5 의 \*는 트러스 부재의 단면이  $a_i = 1.0 (i=1, \dots, 12)$  로 동일한 경우인 초기구조의 경우이고, 실선은 부재 단면적을 변화시킨 통합최적화를 실시한 경우의  $W$  와  $N$  의 관계를 표시한다. Fig. 5 의 결과로부터 구조중량과  $H^\infty$  norm 은 서로 경합하는 관계에 있다는 사실을 알 수 있다. 즉, 구조중량  $W$  가 커지면 norm  $N$  값은 보다 작은 해를 얻을 수 있으며, 역으로 구조중량이 작아지면  $H^\infty$  norm  $N$  값은 커진다는 사실을 나타낸다. 또한 Fig. 5 의 결과는 본 연구에서 사용한 가중인자법의 유효성을 나타내고 있다.

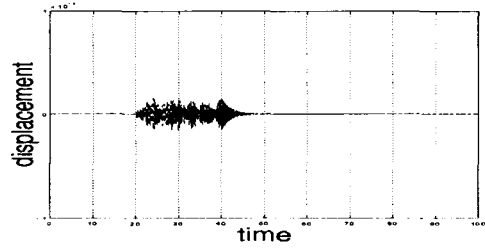
다음으로,  $N$  값과 제어성능에 관하여 고찰해 보겠다. 절점 2,3,4 의  $y$  방향에 Fig. 6 과 같은 외란이 가해진다고 가정하여, 몇 가지 경우에 있어서 절점 1 의  $y$  방향 변위 시간응답을 Fig. 7 에 나타낸다. Fig. 7(a), (b)는 부재 단면 동일구조인 경우의 응답이며, 이 경우 각각의  $W$  값은 38.485, 115.456,  $N$  값은 0.681, 0.393 이었다. 이 결과로부터 구조중량이 가벼울수록 외란의 영향이 크다는 사실을 알 수 있다. 또한, Fig. 7(c), (d)는 초기구조와 거의 동일 중량인 최적구조(case1)의 경우에 있어서의 응답이며, case1 의 구조가 외란의 영향이 작다는 것을 알 수 있다. 이러한 결과들로부터, 본 연구에서의 수법이 경량화와 진동억제에 유효하다는 사실을 알 수 있다.

### 5. 결론

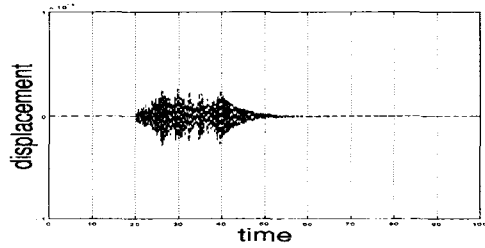
본 연구에서는 디스크립터 방정식으로 표현되는 시스템에 대하여 구조-제어 통합최적 설계법을



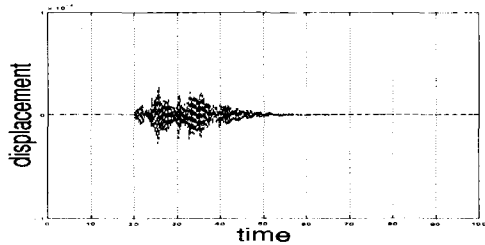
(a) uniform cross sectional areas ( $a_i = 0.5$ )



(b) uniform cross sectional areas ( $a_i = 1.5$ )



(c) initial structure ( $a_i = 1.0$ )



(d) optimal cross sectional areas (case1)

Fig. 7 Response of displacement at node 1

제안하였다. 설계법에서의 평가함수로써, 구조 평가함수와 제어 평가함수의 가중인자포함 선형합을 사용하여, 외란에 대한 제진성능을 향상시킴과 동시에 구조중량을 저감시킬 수 있는 최소중량설계를 가능하게 하였다.

### 참고문헌

1. Park, J. H., "Combined Optimal Design of Structure-Control Systems by Sliding Mode Control," Journal of the KSPE, Vol. 19, No. 10, pp. 45-51, 2002.
2. Onoda, J. and Haftka, R. T., "An Approach to Structure/Control Simultaneous Optimization for Large Flexible Spacecraft," AIAA Journal, Vol. 25, No. 8, pp. 1133-1138, 1987.
3. Ikeda, M., "System Theory based on Descriptor Form," SICE Journal, Vol. 24, No. 7, pp. 597-604, 1985.
4. Takaba, K. and Katayama, T., "Descriptor System and  $H^\infty$  Control," SICE Journal, Vol. 34, No. 9, pp. 733-740, 1995.
5. Keh, J. E. and Lee, M. H., "Robust Controller Design for a Stabilized Head Mirror," International Journal of the KSPE, Vol. 3, No. 4, pp. 78-86, 2002.
6. Petrt, M., Introduction to Finite Element Vibration Analysis, Cambridge University Press, pp. 231-392, 1990.
7. Park, Y. C., Lee, G. C., Park, D. S. and Lee, D. H., "The Strength Evaluation of TiNi/Al6061 Composite by Using Finite Element Method," Journal of the KSPE, Vol. 19, No. 2, pp. 72-78, 2002.
8. Yoshise, Y., "Optimization Method for Convex Programming Problem," Trans. of ISCIE, Vol. 38, No. 3, pp. 155-160, 1994.
9. Box, M. J., Davies, D. and Swann, W. H., Non Linear Optimization Methods, Baihukan Press, pp. 47-125, 1972.