

정적-외연적 강소성 유한요소법의 개발 및 Osakada방법에서 변형을 증분에 따른 영향분석

정동원*, 이승훈*

Development of Static-explicit rigid-plastic finite Element Method and Investigate the effect of strain increment in Osakada method

Dong-won Jung[#], Seoung-hun Lee^{*}

ABSTRACT

In rigid-plastic finite element method, there is a heavy computation time and convergence problem. In this study, static-explicit rigid-plastic finite element method will be introduced. This method is the way that restrict the convergence interval. It is expected that various results from the numerical analysis will give very useful information for the design of tools in sheet metal forming process.

Key Words : Static-implicit method(정적-내연적방법), Static-explicit method(정적-외연적방법), Convergence(수렴), Computation time(계산시간), Sheet metal forming(금속 박판성형)

1. 서론

비선형 유한요소해석법(finite element method)은 타 방법에 비해서 적용범위가 넓고, 비교적 정확한 해석을 할 수 있다는 특징 때문에 대부분의 박판 성형공정 해석에 주로 사용되고 있다. 이러한 유한요소를 이용한 해석에도 수치적 기법에 따라 여러 가지로 구분되어지는데, 크게 큰 시간간격을 가지며 각 단계마다 힘 평형을 맞추며 여러 번 축차하여 수렴해나가는 내연적 유한요소 해석법(implicit finite element method)과 작은 시간간격을 가지며 각 단계에서 동적 평형방정식을 만족시키는 해를 구하며 축차하지 않는 외연적 유한요소 해석

법(explicit finite element method)으로 구분된다. 그 중에서 정적 내연적방법(static-implicit method)은 큰 시간간격을 가지고 각 단계마다 힘 평형을 맞추며 여러 번 축차(iteration)를 통해 수렴시켜 나가는 방법으로서 수렴을 위한 계산시간이 길다는 단점과 기하학적 형상이 매우 복잡하거나 대용량의 문제에 대해서는 수렴성이 문제가 되어 정량적 해를 얻을 수 없다는 단점이 있지만 비교적 정확한 해석을 할 수 있다는 장점을 가지고 있다¹.

반면, 동적 외연적방법(dynamic-explicit method)은 수렴성이 문제가 되지 않아 복잡한 형상이나 대용량의 문제에도 적용하여 정량적인 해를

접수일: 2003년 4월 15일; 게재승인일: 2004년 11월 14일
제주대학교 기계에너지생산공학부
E-mail jdwcheju@cheju.ac.kr Tel. (064) 754-3625
* 제주대학교 대학원

얻을 수 있다. 강소성 해석방법은 각 단계마다 변형량을 조절할 수 있어 계산시간을 줄일 수 있으므로 작은 시간간격을 가지고 각 단계에서 동적 평형 방정식을 만족시키며 해를 구할 수 있다. 이것은 원래 빠른 속도의 동적인 거동에 적합하기 때문에 비드해석과 같은 복잡한 접촉현상을 포함하는 정적인 문제에 적용시킬 경우에는 해석결과에 심한 진동을 야기 시키게 된다. 따라서 해의 정확성을 보장받기 힘들고 신뢰성 있는 결과를 얻기 힘들다. 정적 내연적방법 또한, 제품의 형상이 복잡해지면서 난이 한 접촉을 보이거나 형상이 아주 복잡한 대용량의 문제에 있어서는 수렴이 이뤄지지 않고 정량적 해를 얻을 수 없는 단점을 보인다².

이와 같은 수치해석 진행 과정 중 일어나는 문제점들을 보완하기 위해서 본 연구에서는 정적 외연적 유한요소방법(Static-explicit FEM)이라는 새로운 수치적 기법을 도입하여 강소성 문제에 대한 공정해석에 처음으로 적용시켜 보았다. 정적 외연적방법은 내연적방법의 기본 구성방정식에 근거하지만, 그와 차이를 보이는 점은 동적 외연적방법과 마찬가지로 수렴검사가 이뤄지지 않는다는 것이다. 즉, 정적 외연적 방법은 현 단계에서 축차 없이 얻어진 해를 바로 다음 단계의 초기 추정 값으로 적용하며, 해의 정확도를 높이기 위해서 시간 간격의 크기를 매우 작게 정하는 특징을 가지고 있다. 그리고 시간 간격의 크기는 시행착오 법에 의해 경험적으로 얻을 수 있다.

외연적 유한요소해석에서 해의 정확도와 안정도에 가장 크게 영향을 미치는 것은 수렴간격이라 할 수 있다. 정확도를 높이기 위해서 수렴간격을 무한정 작게 줄일 수는 없기 때문에 그 크기를 결정할 수 있는 방법이 필요하다.

본 연구는 정적 외연적 유한요소방법을 이용하여 강소성문제에 대해서 산업현장에서 빠르게 적용할 수 있도록 계산시간의 단축과 수렴성을 보완하는 방법을 제안하는 것이다. 즉, 수렴을 위한 축차를 제한하고 각 단계에서 변형량을 작게 조정하는 방법으로 계산시간의 단축과 수렴성 문제해결을 시도해 보았다.

2. 본 론

2.1 정적 외연적 방법

평면변형도 강소성 유한요소법을 이용하여 박판성형을 해석할 때 기존에는 비선형 방정식을 뉴턴랩슨(Newton-Raphson)방법을 통해 Fig. 1에서처럼 축차를 통해 원하는 해를 수렴시켜왔다.

이 방법으로 해를 구할 때 해석하려는 형상이 복잡해질수록 계산시간이 길어지고 수렴성이 문제가 되어 정량적인 해를 구할 수 없다. Fig. 2와 같이 축차 없이 처음 접하는 접선을 따라가면서 해를 구할 수 있도록 Fig. 3과 같은 방법을 통해서 수렴성 문제해결을 시도했다³.

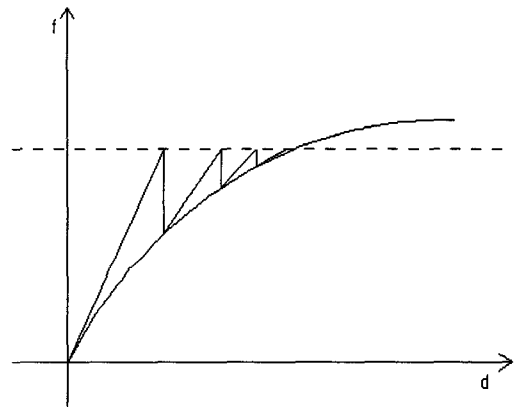


Fig. 1 Newton-Raphson method

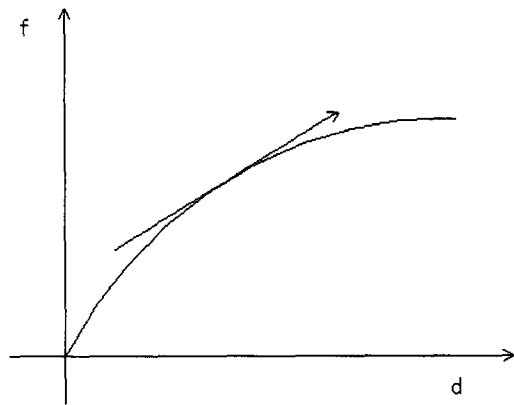


Fig. 2 Tangent vector

본 연구에서 축차에 의한 수렴과정 없이 해를 구하면 정확하지 않은 근사적인 해를 따라 가므로 해의 오차가 많이 발생 될 것으로 보이나 수렴구간

(punch stroke)을 조정함으로써 어느 정도의 오차 범위를 줄일 수 있다. Fig.4는 정적-외연적 방법의 맥락을 보여주는 개념도이다.

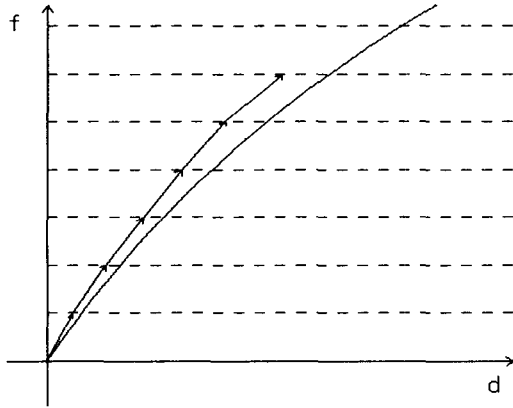


Fig. 3 Restricted-iteration method

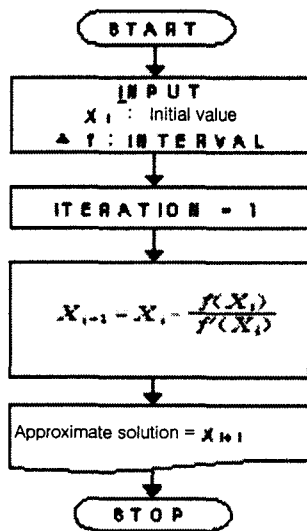


Fig. 4 Flow diagram

2.2 평면 변형도 강소성 유한요소법

기하학적, 재료적 비선형성을 고려하여 박판성형을 해석하는 것이 효과적이다. 위와 같은 점을 고려하여 정완진⁴등은 Hill^{5, 6}의 신이방성이론을 따르는 재료에 대하여 강소성 유한요소법을 유도하였다. 본 연구에서는 정완진등에 의해 개발된 유한요소법을 평면변형 문제 경우에 한하여 적용하였다.

강소성 유한요소법의 변분식은 다음과 같이 나타난다⁷.

$$\int_{A^0} \bar{\sigma} \delta(\Delta \bar{\epsilon}) t^0 dA^0 - \int_{S^r} t \cdot \delta u dS^r = 0 \quad (1)$$

유한요소 수식화 과정을 적용하면 다음과 같은 비선형 방정식을 얻을 수 있다.

$$Q(\tilde{U}) = P(\tilde{U}) + F \quad (2)$$

여기서 $P(\tilde{U})$ 는 압력에 의한 절점력을 나타내고 F는 그 외의 힘에 의한 절점력을 나타내며 식 (1)의 첫째항에 해당하는 $Q(\tilde{U})$ 는 다음과 같다.

$$Q(\tilde{U}) = \sum_e \int_{A^{e0}} \bar{\sigma}_e^0 g^1 \frac{\partial(\Delta \bar{\epsilon})}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_1} K_1 t^0 dA^0 \quad (3)$$

식(2)는 비선형 '방정식'이므로 식 (4)와 같이 선형화하여 뉴턴랩슨 방법으로 해를 구한다.[7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial U} [Q(\tilde{U}) - P(\tilde{U})] \bar{U} = \bar{U}_{(i-1)} \cdot \Delta \tilde{U}_{(i)} \quad (4) \\ = F - Q(\tilde{U}_{(i-1)}) + P(\tilde{U}_{(i-1)}) \end{aligned}$$

본 연구에서 특정부분의 응력을 알 수 없어 해가 발산하게 되는데 이러한 어려움을 수치적으로 해결하기 위하여 Osakada⁸등이 사용한 방법을 채택하여 변형률 증분을 다음과 같이 수정하여 사용하였다.

$$\bar{d\epsilon} = \sqrt{d\epsilon^2 + d\epsilon_0^2} \quad (5)$$

이때 구성방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}_0}{\sqrt{d\epsilon^2 + d\epsilon_0^2}} \bar{d\epsilon} \quad (6)$$

2.3 경사면 경계조건을이용한 접촉처리 방법

요소단위로 박막요소에 대한 유한요소법의 접촉문제를 고려하게 되면 요소 내에서 수직응력을 구할 수 없으므로 절점단위로 접촉을 고려하는 것이 편리하다.

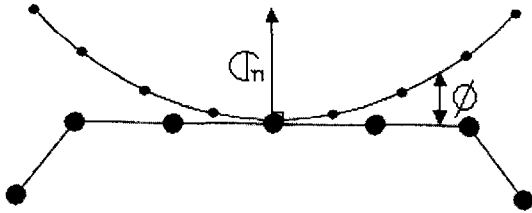


Fig.5 Contact condition between two bodies

Fig.5와 같이 두 물체가 접촉할 때 접촉조건을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_n \cdot \phi = 0 \quad (7.a)$$

$$\phi \geq 0 \quad (7.b)$$

$$\sigma_n \leq 0 \quad (7.c)$$

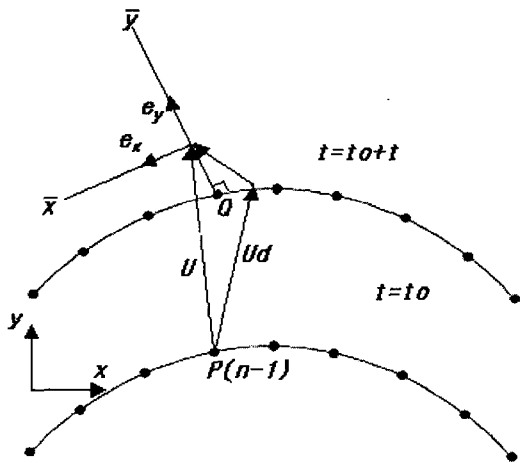


Fig. 6 Treatment of skew boundary condition

본 연구에서는 경사좌표계를 사용하여 2차원 형상의 금형에 의한 박판성형 해석 시 접촉조건을 만족시켰다. 2차원 상의 임의의 곡면형상은 다음과 같이 매개변수로 나타낼 수 있다.

$$r(u) = X^S(u)e_x + Y^S(u)e_y \quad (8)$$

Fig.6에서 접촉면상의 접촉점 P에 가장 가까운 점 Q는 P와 Q사이의 거리를 최소화함으로써 얻어진다⁷.

$$|QP|^2 = (X(P) - X^S(u))^2 + (Y(P) - Y^S(u))^2 \quad (9)$$

Fig.6과 같이 금형표면위의 점 Q에서의 금형바깥 방향의 수직벡터의 방향을 e_y , 절점 P의 편치에 대한 상대변위 U_r 이 e_y 에 수직인 성분벡터의 방향을 e_x 로 한다. e_y, e_x 는 다음과 같다.

$$e_x = \frac{U_r - (U_r \cdot e_y)e_y}{|U_r - (U_r \cdot e_y)e_y|}$$

$$e_y = \frac{n(Q)}{|n(Q)|} \quad (10)$$

여기서 U_r 은 절점의 금형에 대한 상대변위를 나타낸다. 변환행렬 T는 다음과 같다⁷.

$$\Delta U = T \Delta \bar{U} \quad (11)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\bar{X}, X) & \cos(\bar{Y}, X) \\ \cos(\bar{X}, Y) & \cos(\bar{Y}, Y) \end{bmatrix} \quad (12)$$

식(12)의 변환행렬을 이용하여 접촉절점에 대하여 유한요소 방정식을 원래의 직교좌표계 (X, Y)로부터 경사좌표계 (\bar{X}, \bar{Y})로 변환한다.

$$\bar{K} \Delta U = \bar{R} \quad (13)$$

여기서, $\bar{K} = T^T K T$, $\bar{R} = T^T R$ 이다. Coulomb 마찰조건을 만족시키기 위해 마찰력을 경사좌표계에서 절점력으로 다음과 같이 표시하였다⁷.

$$(F_S)_i = -\frac{2}{\pi} \mu (F_y)_i \tan^{-1}(k |U_x|) \quad (14)$$

$$U_x = U_r - (U_r \cdot e_y)e_y \quad (15)$$

여기서 k는 큰상수이다. 식 (14)에 의해 생기는 강성행렬에 기여하는 항들은 좌표변환 후에 계산되었다. 접촉조건 중에서 식(7.c)를 만족하기 위해서는 접촉절점과 금형사이에 작용하는 절점력이 압축력이어야 한다. 따라서 접촉중인 절점의 바깥방향의 수직력이 음이면 (접촉 --> 비접촉) 상태전환

을 하여 반복 계산한다. 이때 절점력은 근사적으로 다음과 같이 구해진다⁸.

$$P_y = \sum_{j=1}^n (\Delta U_j K_{yy}^{-1}) - R_y \quad (16)$$

만일 P_y 가 음이면 (접촉 --> 비접촉) 절점의 접촉상태를 변경하고 변위 벡터를 수정하지 않고 다시 계산한다.

3. 해석 결과

3.1 성형공정 해석적용

본 논문에서 제시된 방법을 이용해 제시된 수식화를 통해 프로그램 된 평면변형 유한요소 프로그램을 이용해 트렁크리드 성형공정에 적용시켰다.

수렴구간(punch stroke)을 0.5mm로 고정시키고 정적-외연적 방법을 이용하여 $d\epsilon_0$ 값을 조정하면서 해석했다. 여기서 $d\epsilon_0$ 는 특정부분의 응력을 알 수 없어 해가 발산하게 되는데 이러한 어려움을 수치적으로 해결하기 위하여 Osakada⁸등이 제안한 방법으로 변형을 증분의 값에 $d\epsilon_0$ 값을 추가하여 해가 발산하는 것을 방지하기 위한 방법이다. 식(5), (6)에서 수식화 된 결과에 따라 평면 변형 유한요소 해석 프로그램을 작성하여 성형품의 각 단면들을 성형단계에 따라 2차원 해석하였다. 해석에 사용된 재료는 다음과 같다.

- 응력-변형도 곡선 : $\bar{\sigma} = 51.915 (\bar{\epsilon})^{0.25}$
- 수직 이방성 계수 : $R = 2.00$
- 재료 두께 : $t = 0.8\text{mm}$
- Coulomb 마찰계수 : $\mu = 0.2$
- 구속력(Binding Force) :
15kgf/mm(오른쪽), 15kgf/mm(왼쪽)
- 성형단계 :
Maximum allowable punch stroke = 300mm

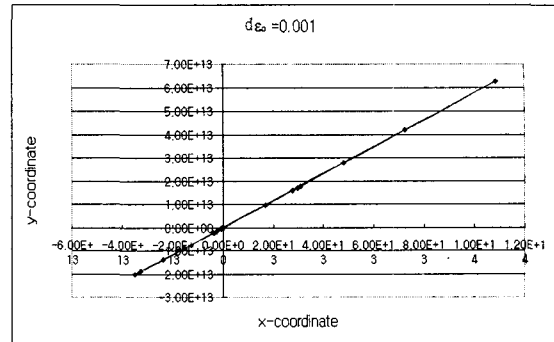


Fig. 7 Shape curve at the $d\epsilon_0(=0.001)$

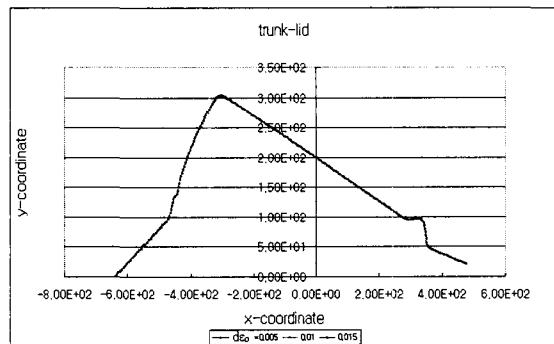


Fig. 8 Shape curve at the $d\epsilon_0(=0.005)$

Fig.7은 $d\epsilon_0$ 값을 0.001로 주었을 때의 성형곡선이며 해의 발산으로 인해 원하는 결과를 얻지 못하게 된다. Fig.8은 $d\epsilon_0$ 값을 0.005이상으로 했을 때의 성형곡선이며 임의의 값 이상이면 무난히 해석됨을 알 수 있다. Fig.9에서는 $d\epsilon_0$ 값이 0.001일 때 두께 분포를 나타내고 있는데, 역시 해의 발산으로 인해 원하는 결과를 얻을 수 없었다. Fig.10에서는 $d\epsilon_0$ 값을 0.005~0.5까지 증가시키면서 두께 분포의 변화를 살펴봤다. 결과에서 알 수 있듯이 $d\epsilon_0$ 값을 증가시킬수록 내연적 방법의 결과에서 멀어짐을 알 수 있다. 이는 $d\epsilon_0$ 값을 크게 가정했기 때문에 발생하는 오차라고 생각된다. Fig.10에서 알 수 있듯이 $d\epsilon_0$ 값을 0.005값 이상일 때 수렴되며 $d\epsilon_0$ 값이 작을수록 정적-내연적 방법의 결과에 접근함을 알 수 있다.

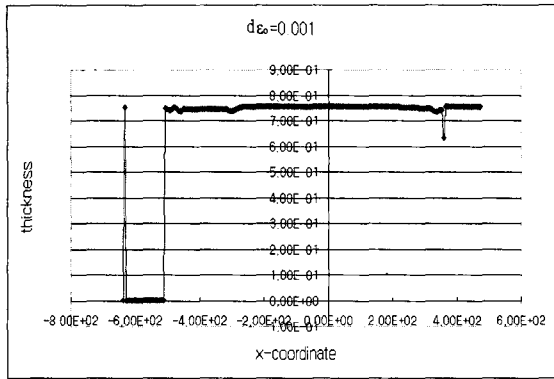


Fig. 9 Thickness distribution at the $d\epsilon_0(=0.001)$

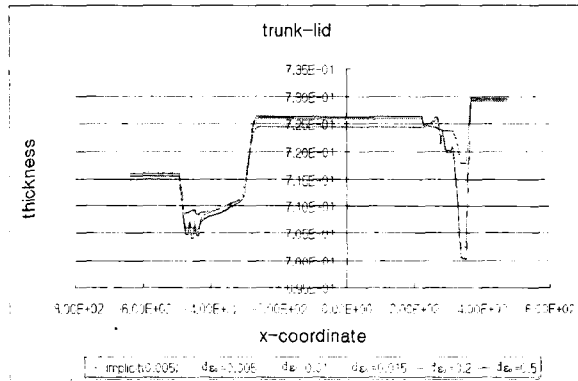


Fig. 10 Thickness distribution

4. 결론

본 연구에서는 해의 발산을 극복하기 위해 제안된 Osakada⁸ 등이 제안한 방법을 이용해 $d\epsilon_0$ 값의 영향에 대해 $d\epsilon_0$ 값에 따른 결과를 내연적 방법의 결과와 비교해 보았다.

- 1) $d\epsilon_0$ 값을 너무 작게 조정하면 특정부분의 해의 발산을 극복하지 못하게 된다.
- 2) $d\epsilon_0$ 값을 임의로 조정할 때, 값이 증가할수록 해의 오차가 크게 발생한다.
- 3) $d\epsilon_0$ 값을 적절히 조정했을 때, 정적-외연적 방법의 결과는 정적-내연적방법의 결과에 접근하고 수렴성과 계산시간에 큰 장점을

보인다.

정적-내연적방법, 정적-외연적방법 모두해의 발산을 억제할 수 있는 최소한의 값을 이용하여 해석하는 방법이 필요한 것으로 보여진다.

후기

이 논문은 2003년도 제주대학교발전기금 청봉 학술연구기금의 지원에 의해서 연구되었음.

참고 문헌

1. Yang, D.Y., Jung, D.W., Song, I.S., Yoo, D. J. and Lee, J.H., Comparative investigation into implicit, explicit and iterative implicit/explicit schemes for the simulation of sheet-metal forming processes, J. Materials Processing Technology, vol. 50, pp.39-53, 1995.
2. Park, Won-Bae, Kim, Chang-Man, Kim, Nak-Soo, Soo, Dae-gyo and Chun, Ki-Chan, A Study on the Drawing characteristics of Sheet through step Drawbead, Transactions of Materials processing, Vol.5, No.2, pp130-137, 1996.
3. Zienkiewicz, O.C and Taylor, R.L. McGraw-Hill "The Finite element method" 4th ed., 1989.
4. Chung, W. J., Kim, Y. J. and Yang, D. Y. Rigid-Plastic Finite Element Analysis of Hydrostatic Bulging of Elliptic Diaphragms using Hill's New Yield Criterion, Int.J. Mech. Sci., Vol.31, pp193-207, 1989.
5. R. Hill, Theoretical of textured aggregates, Math Proc. Camb. phil. Soc., Vol.85, pp179-191, 1979.
6. R. Hill, The mathematical Theory of plasticity, Oxford University Press
7. Jung, D.W. and Yang, D.Y., Step-wise combined implicit-explicit finite-element simulation of autobody stamping processes, J. Materials Processing Technology, Vol.83, pp.245-260, November, 1998.
8. Osakada, K., Nakano, J. and Mori, K., Finite element method for rigid-plastic analysis of metal forming formulations for finite deformation, Int.J. Mech. Sci., Vol.24, pp459-468, 1982.