

유연 구조물에 대한 동역학 모델링 및 LQG/LTR 제어기 설계

채장수[#], 박태원^{*}

Dynamic Modeling and LQG/LTR Controller Design for the Flexible Structures

Jang Soo Chae[#], Tae Won Park^{*}

ABSTRACT

Some of Spacecraft's structures are flexible so that a certain expected disturbance can easily excite a low frequency vibration on these structures, having very low natural damping. Such vibration will degrade the performance of the system, which should to be kept in a specific shape or attitude against the undesired vibration. In this paper, LQG/LTR controller is developed using an additional dynamic model to increase the performance of the frequency responses at low frequency area. This study presents that the LQG/LTR design was an effective controller for the flexible structure.

Key Words : LQG/LTR, Flexible Structures(유연구조물), FEM(유한요소법), TFL(목표필터루프), LTR(루프전달회복)

기호설명

d_{31} = lateral strain constant
 E = electrical field
 D = electrical displacement
 $\phi(x)$ = mode shape function
 K_f = kalman filter gain matrix
 $S_f(S)$ = sensitivity
 $T_f(S)$ = loop transfer function
 $p(x,y)$ = electrical polarity function
 $f(x,y)$ = contact area function
 $T_1 S_1$ = mechanical energy
 $D_3 E_3$ = electrical energy

1. 서론

우주 구조물들은 길이에 비해 두께가 얇고, 가벼운 소재로 만들어져 조립되기 때문에 유연성을 가지고 있다. 위성 구조물인 태양전지판, 안테나 등은 이러한 유연성 때문에 낮은 고유진동수와 감쇠계수를 가지게 되어 동적하중 및 내,외부 교란력에 대해 매우 민감한 반응을 갖게 되고[1-2]. 또한 가볍고 거대한 구조물의 유연성은 기계적인 특성 및 열역학적 피로 특성이 좋지 않고, 낮은 진동수 때문에 인공위성의 자세제어 bandwidth 내로 쉽게 떨어질 수가 있기 때문에 시스템의 불안정성을 유발하게 된다.

접수일: 2003년 4월 17일; 게재승인일: 2003년 11월 14일
교신저자: 아주대학교 기계공학과, 대학원
E-mail jschae@ajou.ac.kr Tel.(042)939-3571
* 아주대학교, 기계공학과

Nurre¹, Thomas² 등은 유연 구조물의 진동제어에 대한 연구는 최근 약 20년 동안 많이 수행되어 왔다. 일반적으로 제어의 여러 분야 중에서 감쇠특성을 이용한 분야는 주로 이산계의 감지기와 작동기를 사용하여 왔다. 그러나 이러한 이산계에서는 제어 및 관측 스펙오버 문제점이 발생되었고, 이러한 스펙오버 현상을 해결하기 위한 많은 연구가 수행되고 있다. Haftka³, Bals⁴, Tzou⁶ 등은 연속체에 대해 압전재료를 이용하여 분포된 감응기 및 작동기를 이용하여 보의 진동제어 적용의 타당성을 밝혔다. 압전재료는 외부 하중인 전압에 비례해서 변형을 일으키는데, 압전재료가 제어 대상인 구조물의 적절한 위치에 부착되어 수축 및 팽창을 유발시켜서 발생된 에너지를 제어력으로 작동시켜 원하는 반응을 얻을 수 있다. 즉, 압전소자가 감지기와 작동기로서 역할을 수행하게 된다. 이철희⁶ 등은 압전필름 작동기를 구조물 진동제어에 사용하여 위치 추적제어를 수행하였으며, 또한 채장수⁹ 는 유연구조물에서 발생하는 감쇠비 불확실성을 고려한 강건제어기를 설계하였으며, 팍문규¹¹, Harrington은 최적제어기(LQG)를 바탕으로 단위모드제어와 위치 되먹임과 속도제어 실험을 통해 이에 대한 가능성을 제시하였다. 본 논문에서는 유한요소모델을 이용하여 보다 정확한 제어시스템을 구성하였으며, 압전재료를 이용하여 불필요한 유연체 구조물의 외란을 최소화하고, 또한 단일모드 및 다중모드에 대한 강건한 제어가 가능하도록 LQG/LTR 제어기를 이용하여 이에 대한 가능성을 검토하였다..

2. 유연보 및 압전재료 모델

2.1 유연보

유연 보와 압전재료의 상호작용에 따른 모델은 주로 변형도와 변형률 감지기와 작동기로서 사용되는 압전재료 요소의 형상에 의해 결정되어 진다. 본 연구에서는 고려된 압전재료의 공간적인 형상은 Fig. 1과 같으며, 압전재료가 접합된 유연 보의 형상은 Fig. 2와 같으며, 두께는 보의 두께에 비해 무시할 정도이다. 유연 보의 상하표면에 접착된 압전재료는 각각 되먹임 전압에 의해 작동되는 이산형 감지기 역할과 작동기의 역할을 수행한다.

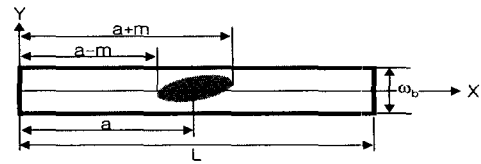


Fig. 1 Flexible beam model with piezo materials(top view)

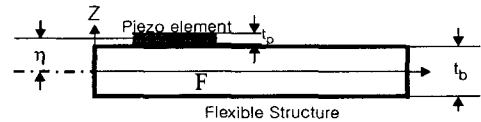


Fig. 2 Cross section of flexible beam with piezo material

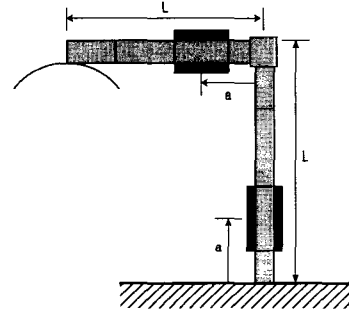


Fig. 3 "ㄱ" shape flexible beam with piezo sensors and actuators

원점좌표 X-Y는 보의 중립 축에 수평하게 설정된 좌표축이다. 본 연구에서 제시된 "ㄱ"자형 유연보에 대한 모델은 Fig. 3과 같으며, 끝단에는 집중 질량인 안테나가 위치하며, 모델의 단순화 및 제어를 위한 자유도를 줄이기 위해 보의 기계적인 특성을 고려하여 고유진동수에 대한 이론 해와 유한요소해 값을 비교하여 가장 근접한 유한요소모델의 요소(element)수를 각각 4개로 선택하여 시스템 전체의 자유도 수를 줄였다.

3. 지배방정식

3.1 지배방정식

감지기와 구동기가 부착된 유연 보(Fig. 2)의 운동방정식을 Hamilton's principle을 사용하여 식(1)으

로 정리 할 수 있다.

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta T - \delta U + \delta W] dt = 0 \quad (1)$$

여기서 T는 운동에너지, U는 변형에너지, W는 외력에 의한 일이다. 여기서 고려되는 것은 순수 유연보의 운동에너지 및 탄성 변형 에너지이며, Euler-Bernoulli 이론과 변형이 적다고 가정하였다.

3.2 압전방정식

전기장과 기계적 탄성장을 연계하는 선형관계식은 다음 식(2)와 같이 나타 낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} D_3 \\ S_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_3^T & d_{31} \\ d_{31} & s_{11}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_3 \\ T_1 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

여기서 d_{31} 은 압전재료의 전하상수, E_3 은 전기장 그리고 s 는 탄성계수의 역수이다. D 는 전기장에 의한 변위, S 는 응력에 의한 변형률을 나타낸다. 압전 재료요소에 대한 기계적 에너지($T_1 S_1$)와 전기적 에너지($D_3 E_3$)로부터 변형에너지를 다음 식(3)과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} -U &= \frac{1}{2} \int_V (-T_1 S + D_3 S_3) dV \\ &= \frac{1}{2} \Gamma e^e - q^T b e - \frac{1}{2} q^T K_p q \end{aligned} \quad (3)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{w_p h}{t_p} (\epsilon_3^T - d_{31}^2 E_p), \quad e = t_p E_3 \\ b_i &= \text{sgn}(z_p) \frac{d_{31} E_p w_p t_p}{2} \int_{a-m}^{a+m} \Psi(x) \frac{d^2 \psi_i(x)}{dx^2} dx \\ K^{piezo} &= \frac{1}{4} t_b^2 E_p w_p t_p \int_{a-m}^{a+m} \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} dx \end{aligned}$$

본 연구에서는 압전재료와 유연보가 완전히 접촉되어 있으며, 열적인 변형을 무시하고 그리고 압전재료는 보의 두께에 비해 매우 얇다고 가정하였으며, 유연보와 압전재료에 대한 기계적 물성치는 Table 1과 같다.

압전재료의 감지기와 작동기 운용을 나타내기 위해 형상함수, Ψ 을 도입하였으며, 이는 적분효과 방지와 효과적인 감지기와 작동기를 위해 식(4)와

같이 나타냈다. 감지기에서 발생하는 전압은 전하의 시간적 변화로 표시되므로 압전재료가 극화되는 면적의 공간함수로 나타낼 수 있다.

$$\Psi(x) = \frac{1}{w_p} \int b(x, y) f(x, y) dy \quad (4)$$

여기서 $p(x,y)$ 는 극성함수, $f(x,y)$ 는 면적함수를 각각 나타낸다.

Table 1 Mechanical characteristics of flexible beam & piezo material

유연 보			
description	quantity	value	units
beam thickness	t_b	1.5875E-3	m
beam width	w_b	0.0254	m
Young's Modulus	E_b	1.03E+7	N/m ²
density	ρ	2800	kg/m ³
length	L	0.7	m
압전재료			
description	quantity	value	units
lateral strain constant	d_{31}	1.8E-10	m/V
Possion's ratio	ν	0.35	-
Young's Modulus	E_p	6.3E+10	N/m ²
permittivity	D	1.5E-8	N/V ²
bonding surface	$\text{sign}(z_p)$	-1(bottom)	-
thickness	t_p	2*1.9008E-4	m
centure position	a	0.085	m
density	ρ_p	7700	kg/m ³

3.3 압전감지기

감지기에 발생하는 전압, E(t)는 외부 전기장을 가하지 않으므로 순방향의 압전식을 이용하여 변형률에 의해 발생하는 전기량에 비례하며 다음 식(5)와 같이 나타 낼 수 있다.

$$V(t) = \sum_{i=1}^n C_i^V q_i(t) \quad (5)$$

여기서 C_i^V 는 변환상수이며 다음과 같이 나타낼 수 있으며, 형상함수와 압전재료의 물리적인 특징으로 구성된다.

$$C_i^V = \text{sgn}(z_p) \frac{d_{31} E_p w_p t_p}{2 C_p} \int_{a-m}^{a+m} \Psi(x) \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} dx$$

여기서 $\phi(x)$ 는 형상함수, t_b 는 유연 보의 두께를 나타내며 w_p, t_p, E_p 그리고 C_p 는 각각 압전재료 폭, 두께, 탄성계수 그리고 저항을 나타낸다. d_{31} 은 압전재료의 변형 상수이다. 즉, 압전 감지기에 발생하는 전압 $V(t)$ 는 모달 값 크기의 선형 합으로 표시된다.

3.4 압전작동기

압전재료에 구동전압, $V(t)$ 를 가하였을 때 발생하는 힘, $Q_i(t)$ 는 다음 식(6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$Q_i(t) = \alpha_i V(t) \quad (6)$$

여기서

$$\alpha_i = \text{sgn}(z_p) \frac{d_{31} E_p w_p t_p}{2C_p} \int_{a-m}^{a+m} \psi(x) \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} dx$$

4. 유한요소 모델

4.1 유한요소 모델

본 논문에서는 Fig.2, Fig. 3과 같이 압전재료인 감지기와 구동기가 부착된 "ㄱ" 자형 유연 보의 운동방정식을 구하기 위하여 중첩법을 사용하였다. 유한요소 모델에서 사용한 요소는 2-절점 4-자유도 보 요소로 절점변위, q^e 는 다음 식(7)과 같이 나타낼 수 있다¹².

$$q^e = \{w_1, \theta_1, w_2, \theta_2\} \quad (7)$$

여기서 w 는 횡방향 변위이고, θ 는 x 축에 대한 회전변위이다. 변위벡터는 유한요소의 보간함수를 이용하여 식(8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(x) \\ L(x) \end{bmatrix} q^e \quad (8)$$

여기서 N, L 은 w, θ 에 대한 보간함수이다.

4.2 동역학 지배방정식

유연 보에 대한 강성행렬은 각 요소의 절점에 작용하는 힘과 절점 변위와의 관계로부터 다음 식(9)와 같이 표현 할 수 있다.

$$[K] \{q\}^e = \{f\}^e \quad (9)$$

또한 질량행렬, $[m]$ 은 이산화된 요소의 운동방정식으로부터 다음 식(10)과 같이 얻을 수 있다.

$$[m]_s = \int_e m_s(s) \{N(x)\} \{N(x)\}^T dx \quad (10)$$

압전재료가 부착된 유연 보에 대한 운동방정식은 순수 보 요소에 대한 질량 $[M]$ 및 강성행렬 $[K]$ 를 구하고 여기에 접착된 압전재료 요소에 대한 질량(M_{piezo}) 및 강성행렬(K_{piezo})을 구하여 선형적으로 합하여 전체 시스템에 대한 운동방정식(11)을 구하였다.

$$(M_s + M^{\Sigma piezo}) \ddot{q} + C_s \dot{q} + (K_s + K^{\Sigma piezo}) q = F^{\Sigma piezo} \quad (11)$$

$M_s + M^{\Sigma piezo}, K_s + K^{\Sigma piezo}, C_s$ 은 각각 일반화된 질량행렬, 강성행렬, 감쇄행렬을 나타내며, $F^{\Sigma piezo}$ 은 일반화된 외력이다. 구조물의 감쇄계수는 1차모드에서 4%, 2차모드는 12%로 하였으며, 압전재료에 대한 감쇄영향은 구조물에 비해 적어 고려하지 않았다.

5. 제어 대상시스템 구성

본 제어시스템 설계는 압전재료가 부착된 유연 보에 대해 상대방정식 모델을 기본으로 하였으며, 유연 구조물 제어와 압전재료 transducer의 잡음 등의 외란 제어를 위해 LQG/LTR 제어방법을 적용하였다. Harrington은 LQG 제어방식을 유연구조물에 대해 실험을 통하여 단일모드의 외란에 대한 적응성에 대해 수행하였으나 충분한 안정성을 제공하지 못하였다. 본 논문에서는 유연체의 단일모드 및 다중모드의 외란효과를 제거하고, 제어기의 구성은 시스템의 안정성을 보장하기 위한 주파수 영역에서의 주파수 응답특성을 향상시키기 위해 새로운 동력학 모델을 추가하였으며, return ratio $-C(sI-A)^{-1}K_f$ 의 성능향상을 위해 목표필터루프(TFL)를 설계하여 보상하였으며, 보상된 시스템의 출력 return ratio $-C(j\omega I-A)^{-1}K_f$ 에 충분히 근접하도록 백색잡음을 선정하여 Kalman filter를 설계하였으며, 또한 출력의 return ratio $-C(sI-A)^{-1}K_f$ 주파수역에 근접하도록 루프전달회복 과정을 수행하였다

5.1 상태방정식

유연 보에 대한 동력학 식(11)을 상태방정식으로 정리하면 다음과 같이 식(12)와 같이 정리할 수 있다.

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i = F_i, i=1\dots 8 \quad (12)$$

$\eta_i = [w_i, \theta_i]^T$ 이며, 상태변수 x_1, x_2 를 다음과 같이 정의 한다.

$$x_1 = \eta, x_2 = \dot{\eta} = \dot{x}_1 \quad (13)$$

측정잡음 v 와 시스템 외란 G_w 를 고려하면 식(12)와 식(13)은 식(14)로 정리된다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Gw \\ y &= Cx + Du + v \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 u 는 제어신호벡터, y 는 측정출력 벡터이다. w 와 v 는 시간에 비상관인 0-평균 Gaussian 확률과정으로서 다음의 covariance를 갖는다.

$$\begin{aligned} E\{ww^T\} &= W = W^T \geq 0 \\ E\{vv^T\} &= V = V^T > 0 \end{aligned} \quad (15)$$

제어 시스템에서 감쇄계수에 대한 불확실성은 5%으로 하였으며, 센서에 대한 처리 노이즈는 대각행렬로 작은 값을 선정하였다.

5.2 제어기 설계

목표 : 주파수 대역 10 rad/sec

제어기 설계를 위해 안정도 이득이 보장된 Kalman filter를 이용하였으며, 루푸전달회복조건을 설정하기 위해 cost function을 식(16)과 같이 정의 하였다.

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left\{ \int_{-T}^T (x^T Qx + u^T Ru) dt \right\} \quad (16)$$

또한 목표필터루프 설계는 아래와 같은 과정을 거쳐서 Fig. 4와 같이 만족하도록 하였다.

i) principle-gain의 형태를 바꾸기 위해 플랜트 모델에 새로운 dynamic model를 포함시킴

ii) 특정 방향 신호의 principle-gain만을 증가시키기 위해 singular-value decomposition(SVD)을 사용하여 W 를 재구성 한다.

$$\text{즉, } \text{svd} [G_f(j\omega)W^{1/2}] = U\Sigma V^H$$

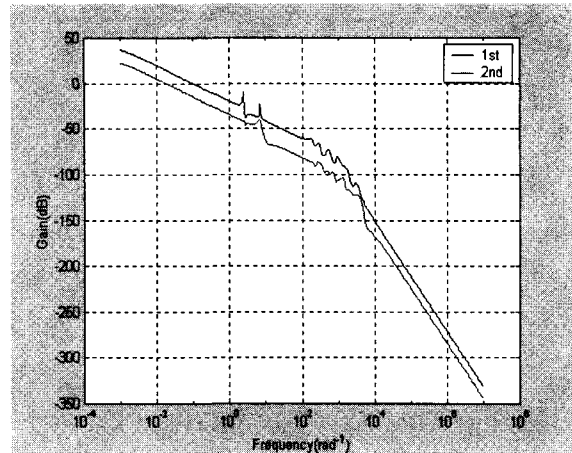


Fig. 4 Open-loop principal gains of initial Kalman filter (1st and 2nd represent the maximum and minimum singular values)

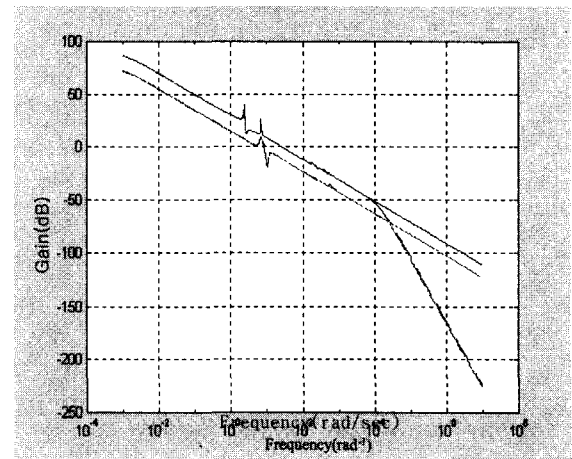


Fig. 5 Loop transfer recovery for weighting factor, $\rho = 10^{-10}$

이를 바탕으로 Fig. 6과 같이 $S_r(s), T_f(s)$ 가 상당히 좋은 안정도여유를 보장하게 되어 회복단계로 넘어 갈 수 있다.

또한 낮은 주파수 영역에서 -20dB/decate slope를 확보하기 위해 시스템에 식(17)과 같은 새로운 dynamic model을 첨가하였다.

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= A_w \zeta + B_w W \zeta \\ y &= C_w \zeta + D_w W \zeta \end{aligned} \quad (17)$$

새로운 모델을 포함한 플랜트의 상태공간 모델은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= A_a x_a + B_a u + \Gamma_a w_\zeta \\ y &= C_a x_a + D_a u + v \end{aligned} \quad (18)$$

여기서

$$\begin{aligned} \dot{x}_a &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix}, A_a = \begin{bmatrix} A & \Gamma C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix}, B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Gamma_a &= \begin{bmatrix} \Gamma D_w \\ B_w \end{bmatrix}, C_a = [C \ 0], D_a = 0 \end{aligned}$$

시스템에 대한 루프전달회복은 보상된 플랜트의 출력의 return ratio를 목표필터루프 설계와 충분한 주파수 영역에서 근접하도록 회복시켜주는 단계이다. 루프전달회복상태 점검은 Riccati 수식으로부터 $R = \rho I$ 에서 ρ 값을 감소시켜가며 충분한 주파수대역에서 충분히 근접하도록 하였으며, Fig. 5은 ρ 값을 줄여가면서 주계인 값을 결정하였으며, $\rho = 10^{-10}$ 에서 좋은 회복상태가 되었다.

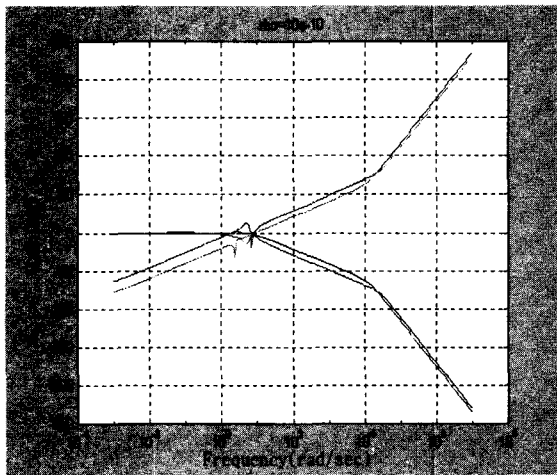


Fig. 6 Principal gains of $S_r(s)$ and $T_r(s)$ using Kalman filter with $\rho = 10^{-10}$

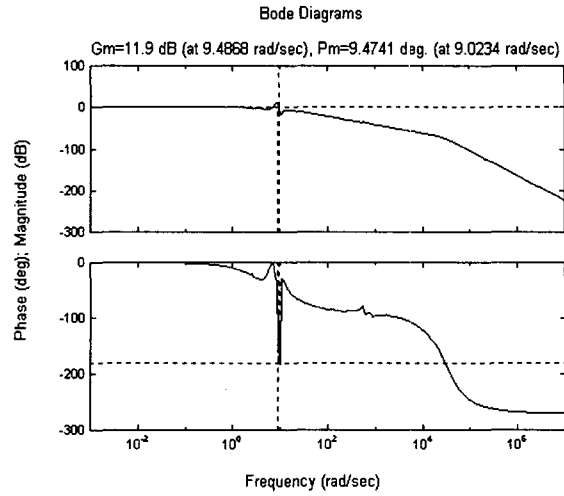


Fig. 7 Frequency response of final controller

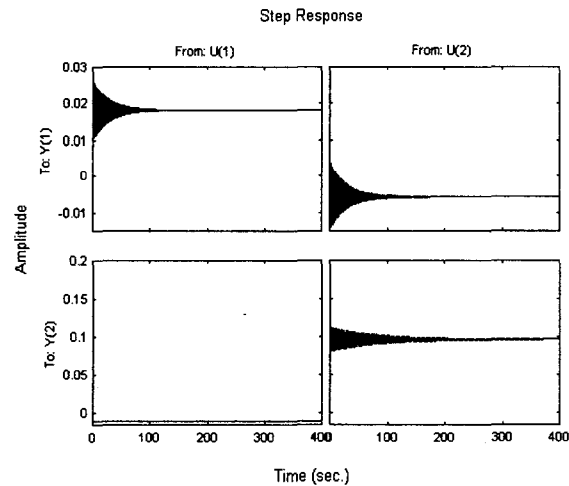


Fig.8 Open-loop step reponses to step demand on out

Table 2 GM and PM values at each design phase

구분	GM(dB)	PM(deg.)
Original System	45.15	∞
LQ	10.01	∞
TFL	6.00	111.19
LTR	11.90	9.47

시스템의 주계인(principal gain)에 대해 민감도함

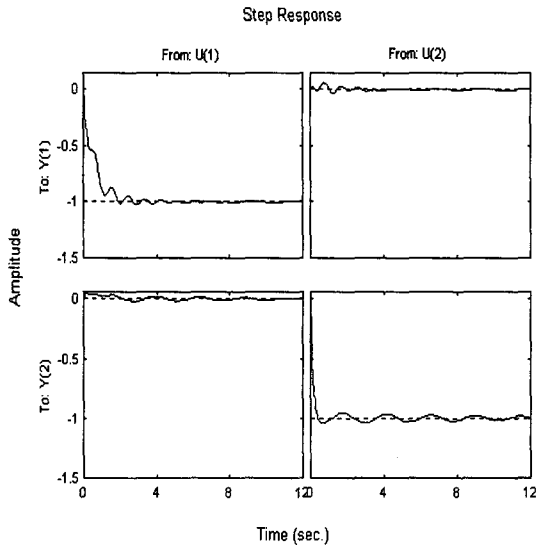


Fig.9 Closed-loop step reponses to step demand on out

수, $S(s)$ 와 페루프 전달함수, $T(s)$ 는 Fig. 6에서와 같이 증가되었음을 알 수 있다. Fig. 7은 최종적으로 설정된 LQR/LTR 제어기에 대한 bode 선도로, 게인 이득이 증가되었음을 알 수 있다. 외부입력인 $u(1)$, $u(2)$ 에 대해 유연체 구조물에 대해 개루프에(Fig. 8) 대한 계단응답과 페루프의 계단응답특성(Fig. 9)을 보면 강건하고 안정적으로 제어되고 있음을 알 수 있다. Table 2는 각 단계별로 게인 및 위상이득을 나타낸다.

6. 결론

본 연구를 통해서 유연체 구조물에 대해 유한요소법을 이용하여 능동진동 제어시스템에 대한 해석적인 모델을 제공하여 구조 동역학 해석과 제어를 동시에 수행 할 수 있으며, 불확실한 감쇄계수와 노이즈가 있는 다변수 모드 외란을 고려한 유연체 구조물에 대해 안정적인 제어를 수행 할 수 있었다.

또한 LQG/LTR 제어기를 적용함으로써, 기존의 최적제어기(LQR) 등에서 주파수 영역 성능과 안정도-강인성 문제, 그리고 LQG 설계에서의 가중행렬 선정의 비조직성 문제 및 성능과 안정도-강인성 문제를 보완 할 수 있었다. 그러나 원하는 범위내에서 민감도 함수의 최대특이값, $S_r(s)$ 와 전달함수의

최대특이값, $T_r(s)$ 를 제어하기에 어려움이 있었다.

참고문헌

1. Nurre, G.S., Ryan, R.S. and Sims, J.L., "Dynamics and Control of Large Space Structures," J. Guidance, Vol. 7, No. 5, pp. 514-526, 1984.
2. Thomas, H.L. and Schmit, L.A., "Control-Augmented Structural Synthesis with Dynamic Stability Constraints," AIAA Journal, Vol. 29, No. 4, pp. 619-626, 1991.
3. Haftka, R.T. and Adelman, H.M., "An analytical Investigation of Shape Control of Large Space Structures by Applied Temperatures," AIAA Journal, Vol. 23, pp. 450-457, 1985.
4. Balas, M.J., "Direct Velocity Feedback Control of Large Space Structures," Journal of Guidance and Control, Vol. 2, No. 5, pp. 252-253, 1979
5. Franklin, G., Powell, J., and Emami-Naeini, A., Feedback Control of Dynamic System, Addison-Wesley, Menlo Park, 1995
6. Tzou, H and Tseng, C., "Distributed Piezoelectric Sensor/Actuator Design for measurement/Control of distributed parameter Systems: A Piezoelectric Finite Element Approach," J. Sound and Vibration, Vol.138, No.1, pp.17-34, 1990.
7. 이철희, 최승복, "압전필름 작동기로구성된 스마트 유연 구조물의 강건추적제어," 대한기계학회 논문집(A), 제20권 제5호, pp. 1498~1507, 1996.
8. 채장수, 박태원, "감쇠비 불확실성을 고려한 유연구조물의 H_∞ 제어기 설계," 대한기계학회 논문집(A), 제26권, 제6호, pp. 602-608, 2002.
9. Harrington W., " Experimental Verification of an Optimal Linear Controller for a Flexible Structure, " Master's Thesis, Naval Postgraduate School, pp. 37-54, 1995.
10. Shahian B. and Hassul M., Control System Design Using Matlab, Prentice-Hall international Inc., pp. 384-391, 1993.
11. 광문규, "지능구조물의 능동진동제어를 위한 다중 PPF 제어기와 수정 LQG 제어기의 비교 연구", 한국소음진동공학회지, 제 8권 제 6호, 1998.
12. Reddy J., An Introduction to the Finite Element Method, McGraw-Hill International Editions, 1985