한국소음진동공학회논문집 제 14 권 제 1 호, pp. 73~79, 2004.

다단 Spline 곡선에 의한 단면형상 변화를 통한 회전 외팔보의 진동특성 최적화

Modal Characteristic Optimization of Rotating Cantilever Beams via Shape Variation of Cross-section by Multi-stage Spline Function

조 정 은* · 유 홍 희†

Jung Eun Cho and Hong Hee Yoo

(2003년 10월 20일 접수 : 2003년 12월 19일 심사완료)

Key Words : Modal Characteristics(진동특성), Optimization(최적화), Cantilever Beam(외팔 보), Rotating Angular Speed(회전 각속도), Design Requirement(설계 요구조건)

ABSTRACT

When structures undergo rotating motion, their modal characteristics often vary significantly. The variations of modal characteristics are determined from their geometric shapes and their rotating angular speed. Since the modal characteristics vary during the operation of the structures, they should be carefully scrutinized. In this paper, rotating cantilever beams are chosen as design targets which need to meet some specific design requirements. The thickness and the width of the rotating beams are assumed as multi-stage spline functions and the stage values for the thickness and the width are used as design variables for the optimization problems.

1. 서 론

외팔 보 형태의 구조물로는 터빈과 헬리콥터의 블레이드 그리고 인공위성의 안테나 등에서 예를 쉽게 발견 할 수 있으며 이와 같은 외팔 보 형태의 구조물의 설계시에는 공진과 같은 문제를 피하기 위하여 그 구조물의 고유진동수를 파악하고 고려해야 하는 것은 당연하다. 운동이 없는 구조물의 진동특성을 설계에 쉽게 적용하는 것과 다르게 대부분의 구조물은 운동을 수반하며 이런 운동이 구조물의 진동특성을 현격히 변화시키는 경우가 많다. 운동이 없는 상태에서 얻어진 진동특성에 근거하여 운동하는 구조물을 설계하였다면 이는 그 구조물의 작동 시 문제를 발생시킬 수도 있다. 그러므로 회전구조물의 진동특성 변화는 안전을 위해 운동을 고려하여 정확하게 파악되어야 하며 설계에 이를 적용할 때는 보다 신중해야한다.

회전운동을 하는 외팔 보의 진동특성에 관한 연구는 Southwell과 Gough[1]에 의해 1920년대 초에 시작되었다. 그 후에 1950년대부터 1970년대를 지나면서 이론적, 수치적인 발전으로[2~5] 정확하고 다양한 해석들이 가능하게 되었으며 최근에는 새로운 모델링 방법의 도입으로 더욱 효율적이고 정확한 진통특성 해석이 가능하게 되었다.[6~10] 그러나 이상의 연구는 어떤 정해진 형상을 갖는 회전 외팔 보의 진동특성 해석을 위한 연구였으며, 역으로 어떤 진동특성을 갖는 형상을 구하기 위한 방법은 제시되지 않았다.

본 연구에서는 회전 구조물의 실제적인 설계를 위해 참고문헌(11)에 제시된 모델링을 사용하였고, 어

† 책임저자 : 정회원, 한양대학교 기계공학부
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr
Tel : (02) 2290-0446, Fax : (02) 2293-5070
* 정회원, 한양대학교 대학원 기계설계학과

떤 특정한 진동특성이 설계 요구조건으로 제시되었을 때 이를 만족시키는 외팔 보의 단면 형상 최적화를 달성하는 것에 그 목적을 두었다. 선행연구[12]로 면내 방향 굽힘 진동에서 두께형상만을 고려한 연구가 이루어졌으나 이는 보 전체길이에 대해 두께를 단순 3차 다항식으로 가정함으로써 다양한 최적화 형상을 찾는데 어려움이 있었다. 본 연구에서는 기존의 연구를 일반화하기 위하여 면외방향 굽힘진동에 대해서 두께와 폭의 형상을 동시에 고려한 형상 최적화를 수행하였고, 외팔 보 전체를 여러 개의 등 간격 구간으로 나누어 각 구간에서 3차 다항식으로 가정한 후 각 단에서의 두께와 폭을 설계변수로 정하여 최적화를 수행함으로써 최적화된 외팔 보의 형상을 구현하였다.

본 논문에서는 운동방정식을 유도하기 위해 Kane[13]의 방법이 사용되었으며 근사화를 위해 가상모드법이(assumed mode method) 사용되었다. 또한 최적화를 수행하기 위한 방법으로 MFD(method of feasible direction)방법을[14~15] 사용하였으며 민감도 계산의 방법으로 직접미분법(direct differentiation method)을 사용하였다.

2. 운동방정식

2.1 운동방정식 유도

본 장에서는 운동방정식을 복합 변형 변수를 이용한 선형 동적 모델링에 의한 회전 외팔 보를 모델링으로 하여 유도하였다. 더욱 자세한 내용은 참고문헌(7)을 참조할 수 있다. 본 연구는 회전 외팔 보의 단면형상 변화로 인한 진동특성 변화에 초점을 맞추기 위해 다음 두 가지를 가정하였다. 첫째, 외팔 보 재질은 일정하고 등방성을 갖는다. 둘째, 전단 및 단면관성 효과는(rotary inertia effect) 고려하지 않았다. Fig. 1은 각속도 Ω로 회전하는 기준틀 A에 고정된 외팔 보의 형상을 나타낸다. 그림에서 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$는 기준틀 A상에 고정된 단위 벡터들이며, $\vec{u}$는 외팔 보 상 임의의 점 P^*의 탄성변위 벡터를, u_1, u_2, u_3는 그 성분들을 나타낸다. 기준틀 A의 각속도와 O점의 속도는 각각의 성분을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\vec{\omega}^A = \Omega \hat{a}_3, \quad \vec{v}^O = v_1\hat{a}_1 + v_2\hat{a}_2 + v_3\hat{a}_3 \tag{1}$$

따라서 P 점의 속도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{v}^P = [v_1 + \dot{u}_1 - \Omega u_2]\ \hat{a}_1 + [v_2 + \dot{u}_2 + \Omega(x+u_1)]\hat{a}_2 + [v_3 + \dot{u}_3]\hat{a}_3 \tag{2}$$

여기서 x는 O점으로부터 임의의 점 P^*까지의 거리를 나타낸다. 그리고 인장변수 s와 u_2, u_3는 다음과 같이 가상 모드법으로 근사화 한다.

$$s(x,t) = \sum_{j=1}^{\mu_1} \phi_{1j}(x) q_{1j}(t)$$
$$u_2(x,t) = \sum_{j=1}^{\mu_2} \phi_{2j}(x) q_{2j}(t)$$
$$u_3(x,t) = \sum_{j=1}^{\mu_3} \phi_{3j}(x) q_{3j}(t) \tag{3}$$

여기서 $\phi_{1j}, \phi_{2j}, \phi_{3j}$ 및 q_{1j}, q_{2j}, q_{3j}는 변수 s, u_2, u_3를 근사화 하기 위한 가상모드와 일반 좌표들이며, μ_1, μ_2, μ_3는 각 모드 함수들의 개수이다. u_1 대신 s를 근사화하여 운동방정식을 유도하기 위하여 다음의 기하학적 관계식을 이용한다.

$$x + s = \int_0^x [(1+\frac{\partial u_1}{\partial \sigma})^2 + (\frac{\partial u_2}{\partial \sigma})^2 + (\frac{\partial u_3}{\partial \sigma})^2]^{1/2} d\sigma \tag{4}$$

운동방정식은 다음 식으로부터 구해진다.

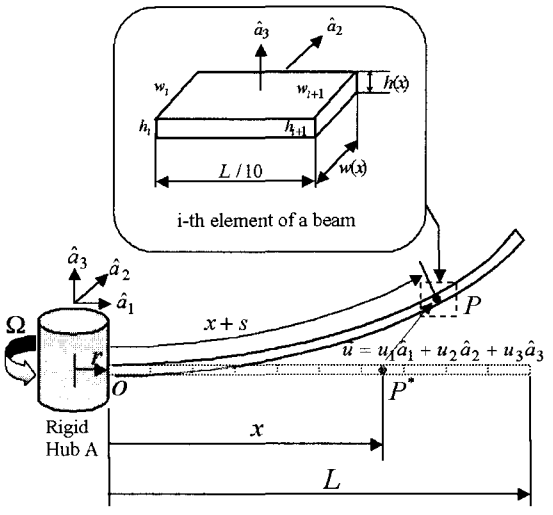

Fig. 1 Configuration of a rotating cantilever beam

$$\int_0^L \rho h w(\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_i})\cdot \vec{a}^P dx+\frac{\partial U}{\partial q_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,\mu) \tag{5}$$

여기서 L 과 ρ 는 보의 길이와 밀도를 나타내며, q_i 는 q_{1j}, q_{2j}, q_{3j} 로 구성되고 μ 는 일반좌표의 총 개수로 μ_1, μ_2, μ_3 의 합이다. 보의 탄성에너지 U 는 다음과 같다.

$$U=\frac{1}{2}\int_0^L EA(\frac{\partial s}{\partial x})^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L EI_{zz}(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2})^2 dx+\frac{1}{2}\int_0^L EI_{yy}(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2})^2 dx \tag{6}$$

여기서 E, A, I_{zz}, I_{yy} 는 각각 영률, 단면적, 그리고 z 및 y 방향 2차 면적 모멘트들을 나타낸다. 보의 단면은 사각형이며 그 두께와 폭은 보 전체 길이에 대하여 10개의 등 간격으로 나눈 구간에서 3차 다항식의 형태로 가정하였다. 그리고 i 번째 구간에서의 두께 f_i 와 폭 g_i 는 다음과 같이 표현하였다.

$$f_i(x)=a_i(x-\frac{i\times L}{10})^3+b_i(x-\frac{i\times L}{10})^2+c_i(x-\frac{i\times L}{10})+d_i$$
$$g_i(x)=p_i(x-\frac{i\times L}{10})^3+q_i(x-\frac{i\times L}{10})^2+r_i(x-\frac{i\times L}{10})+s_i \quad (i=0,1,\cdots,9) \tag{7}$$

그리고 보의 전체 구간에 대한 두께 h 와 폭 w 는 위의 식을 이용하여 곡선적합의 방법을 사용함으로써 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$h(x)=\sum_{i=0}^{9} f_i(x)\times u_i$$
$$w(x)=\sum_{i=0}^{9} g_i(x)\times u_i$$
$$\text{where if } \quad x\in\left(\frac{i\times L}{10}, \frac{(i+1)\times L}{10}\right] \quad u_i=1$$
$$\text{otherwise} \quad u_i=0 \tag{8}$$

2.2 진동방정식 유도

본 연구는 회전 외팔보의 단면형상 변화에 의한 굽힘진동 특성변화에 초점을 맞추고 있다. Fig. 1에서 O 점이 회전 중심이라 하면 식 (5)에 의해 구해지는 운동방정식으로부터 다음과 같은 면외방향 굽힘진동 방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_3}(\int_0^L \rho h w\phi_{3i}\phi_{3j}\,dx)\ddot{q}_{3j} + \sum_{j=1}^{\mu_3}(\int_0^L E\frac{h^3 w}{12}\phi_{3i,xx}\phi_{3j,xx}\,dx)q_{3j} + \sum_{j=1}^{\mu_3}\Omega^2(\int_0^L \rho h w x(\int_0^x \phi_{3i,\sigma}\phi_{3j,\sigma}\,d\sigma)dx)q_{3j} = 0 \quad (i=1,2,\cdots,\mu_3) \tag{9}$$

위의 식에 두께 h 와 폭 w 를 나타내는 식 (8)을 대입하여 행렬 형태로 표현한 진동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[M^{33}]\{\ddot{q}_3\}+\left\langle [K^B]+\Omega^2[K^G]\right\rangle\{q_3\}=0 \tag{10}$$

여기서 $[M^{33}], [K^B], [K^G]$ 의 요소들은 다음과 같이 정의된다.

$$M_{ij}^{33}\equiv\int_0^L \rho h w\phi_{3i}\phi_{3j}\,dx \tag{11}$$

$$K_{ij}^{B}\equiv\int_0^L E\frac{h^3 w}{12}\phi_{3i,xx}\phi_{3j,xx}\,dx \tag{12}$$

$$K_{ij}^{G}\equiv\int_0^L \rho h w x(\int_0^x \phi_{3i,\sigma}\phi_{3j,\sigma}\,d\sigma)dx \tag{13}$$

3. 최적화 문제설정 및 수치해석 결과

3.1 문제설정

진동방정식에서 예측할 수 있듯이 이 구조물의 고유진동수는 회전 각속도 그리고 구조물의 단면 형상을 결정하는 두께와 폭에 의해 결정 되어진다. 따라서 회전각속도에 의한 고유진동수를 목적함수로 다음 식과 같이 정의 내릴 수 있다.

$$\omega_k=\omega_k(\Omega, X)$$
$$X=\begin{bmatrix} h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10} \\ w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9, w_{10}\end{bmatrix} \tag{14}$$

여기서 $h_0,\cdots,h_{10}$ 와 $w_0,\cdots,w_{10}$ 는 보의 길이를 10개의 등 간격 구간으로 나누었을 때 각 구간의 양

단 두께와 폭을 의미하며 이들을 설계변수 X로 정하였다. 또 재료는 알루미늄으로 선정하였으며 그 물성치는 Table 1에 나타나 있다.

3.2 첫번째 고유진동수 영역결정

회전 구조물의 고유진동수는 단면형상에 의해 구성되어진 함수가 된다. 따라서 단면형상 변화로 고유진동수의 변화범위를 결정할 수 있으며 이를 위해 설정된 목적함수와 구속조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\text{Min(or Max)} \quad \omega_1(\Omega_s, X)\\
&\text{Subject to} \quad \int_0^L h(X,x)\,w(X,x)\,dx \le L\,h_{ini}\,w_{ini}\\
&\qquad \int_0^L h(X,x)\,w(X,x)\,dx \le L\,h_{ini}\,w_{ini}\\
&\qquad h(X,x) \ge h_{\min} \quad (0 \le x \le L)\\
&\qquad w(X,x) \ge w_{\min} \quad (0 \le x \le L)
\end{aligned} \tag{15}$$

where Ω_s : 회전 각속도

$h_{ini} = 0.002$ m: 균일한 보의 초기 두께

$w_{ini} = 0.035$ m: 균일한 보의 초기 폭

$h_{\min} = 0.001$ m: 보의 최소 두께

$w_{\min} = 0.0175$ m: 보의 최소 폭

Table 1 Material and geometric properties of the beam

Description	Data
Young's modulus(E)	69.0 GPa
Density(ρ)	2.71×10^3 kg/m^3
Length(L)	0.4 m

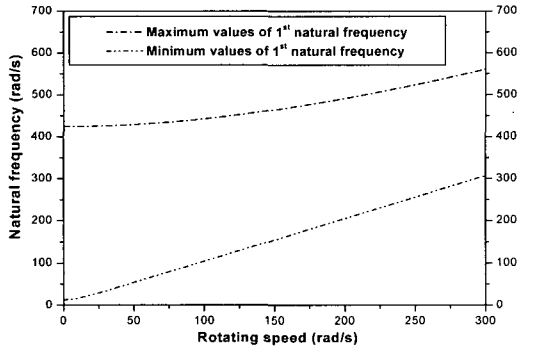

Fig. 2 Band of the first natural frequency versus rotating speed

Fig. 2는 회전 각속도(Ω_s)를 0 rad/s에서 300 rad/s까지 증가시키면서 최적화 수행 후 얻어진 첫번째 고유진동수의 최소값과 최대값을 보여주고 있는데 두 곡선 사이의 영역은 보의 형상변경을 통해 조절 가능한 고유진동수의 영역을 나타낸다. 이 결과를 얻기 위하여, 각속도 0 rad/s에서는 균일한 보의 두께와 폭을 초기치로 사용하여 최적화 문제를 수행하였으며, 각속도가 0.1 rad/s로 증가하였을 경우는 이전 단계인 각속도 0 rad/s에서 구하여진 최적해 값을 초기치로 사용하여 문제를 풀어 나갔다. 이와 같은 방법으로 각속도 300 rad/s까지 3001번의 최적화가 수행되어졌다. Fig. 3은 각속도 0 rad/s 에서 최소 고유진동수를 갖는 형상을 찾아가는 과정의 목적함수의 변화를 보여준다.

Fig. 4와 5는 각속도 300 rad/s에서 최대와 최소 고유진동수를 갖는 보의 두께와 폭 형상을 보의 길이에 따라 나타내고 있다. 고유진동수를 최소로 하는

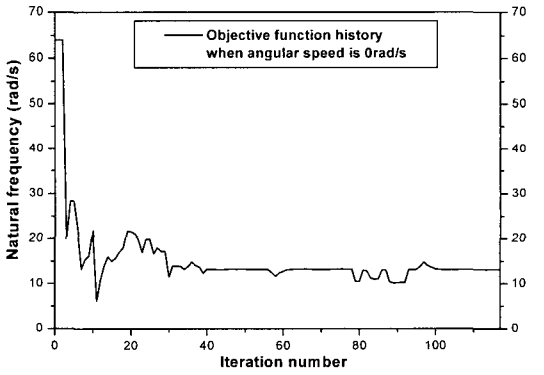

Fig. 3 Convergence history of the objective function

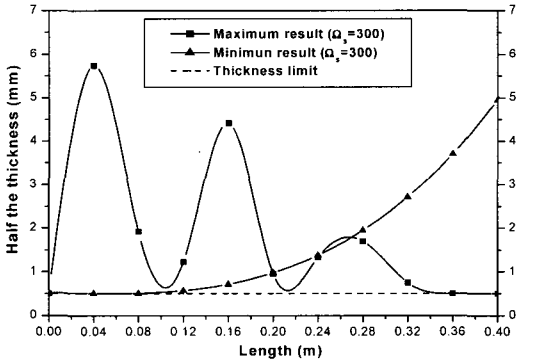

Fig. 4 Half the thickness shapes which maximize and minimize the first natural frequency

형상은 두께와 폭이 모두 변화하며 자유단 쪽으로 갈수록 단순 증가하는 형상이다.

그러나 고유진동수를 최대로 하는 형상은 두께는 변화를 보이고 폭은 최소값에서 결정됨을 확인할 수 있다. 특별히 두께 형상은 3개의 최대 점을 갖는 물결치는 형상으로 매우 흥미로운 결과이다.

3.3 무회전시 고유진동수를 만족하는 보의 형상

이번에는 3.2절의 문제에, 회전이 없을 시의 고유진동수는 형상변화와 관계없이 일정하게 유지시키기 위한 무회전 시 고유진동수 구속조건을 추가로 부가한 경우의 결과를 살펴 보겠다. 즉,

$$\text{Min(or Max)} \quad \omega_1(100, X)$$
$$\text{Subject to} \quad (0, X) - \omega_1(0, X_0) = 0$$
$$\int_0^L h(X,x)\, w(X,x)\, dx \le L\, h_{ini}\, w_{ini}$$

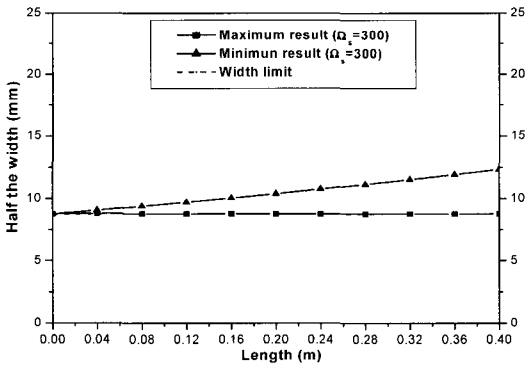

Fig. 5 Half the width shapes which maximize and minimize the first natural frequency

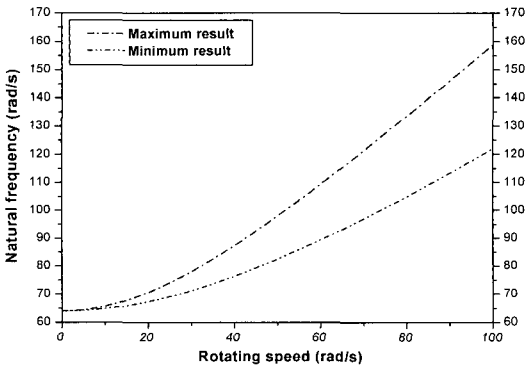

Fig. 6 Band of the first natural frequency versus rotating speed

$$h(X,x) \ge h_{\min} \quad (0 \le x \le L)$$
$$w(X,x) \ge w_{\min} \quad (0 \le x \le L) \qquad (16)$$

여기서 X_0는 균일한 보가 갖는 설계 변수들을 나타낸다. Fig. 6은 각속도 0 rad/s에서 100 rad/s까지 첫번째 고유진동수 가능영역을 보여준다. 그리고 Fig. 7과 8은 최대, 최소고유진동수를 갖는 보의 두께와 폭 형상을 보의 길이에 따라 나타낸 결과이다. 3.2 절의 결과와 달리 고유진동수를 최대, 최소로 하는 형상은 두께와 폭 모두에서 변화하고 있음을 확인할 수 있다.

3.4 회전시 고유진동수를 만족하는 보의 형상

이번에는 실제적인 설계문제에서 접할 수 있는(공진과 같은 문제를 일으킬 수 있는 고유진동수 영역을 피하는 외팔 보를 설계하기 위해) 임의의 각속도에서

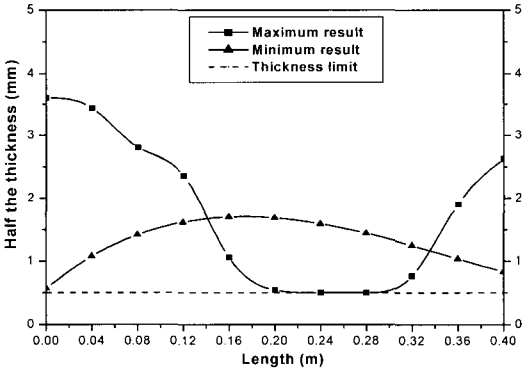

Fig. 7 Half the thickness shapes which *maximize and minimize the first natural* frequency

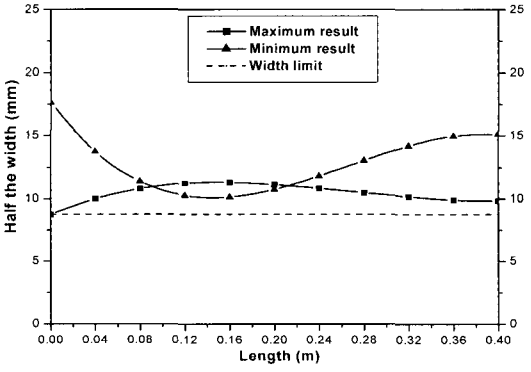

Fig. 8 Half the width shapes which maximize and minimize the first natural frequency

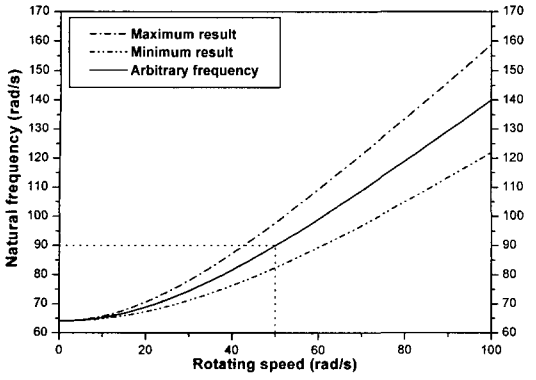

Fig. 9 Specified first natural frequency locus along with the maximum and the minimum loci

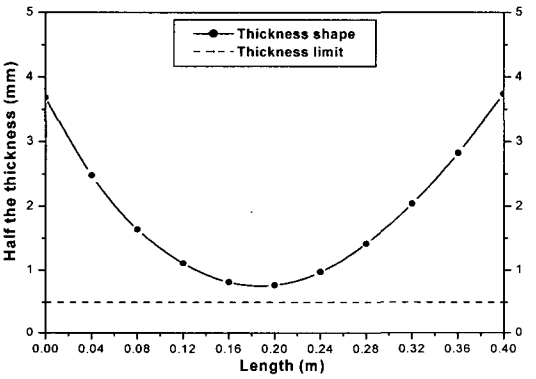

Fig. 10 Half the thickness shape of the beam which satisfies the specified first natural frequency

특정한 고유진동수를 만족하는 형상을 찾도록 최적화 문제를 정식화 하였다. 즉 임의의 각속도 Ω_G 와 고유진동수 ω_G 는 50 rad/s와 90 rad/s로 정하였으며 목적함수와 구속조건은 다음 식과 같이 정의하였다.

$$\begin{aligned} &\text{Min } [\omega_1(\Omega_G, X)-\omega_G]^2 \\ &\text{Subject to } \omega_1(0,X)-\omega_1(0,X_0)=0 \\ &\int_0^L h(X,x)\,w(X,x)\,dx \le L\,h_{ini}\,w_{ini} \\ &h(X,x)\ge h_{\min} \quad (0\le x\le L) \\ &w(X,x)\ge w_{\min} \quad (0\le x\le L) \end{aligned} \tag{17}$$

Fig. 9는 각속도가 100 rad/s까지 변화할 때 무회전시 고유진동수를 만족하는 첫번째 고유진동수의 최대, 최소 가능영역과 이 영역 안에서 $\omega_1(\Omega_G, X)-\omega_G=0$ 을 만족하는 고유진동수의 변화를 보여주고

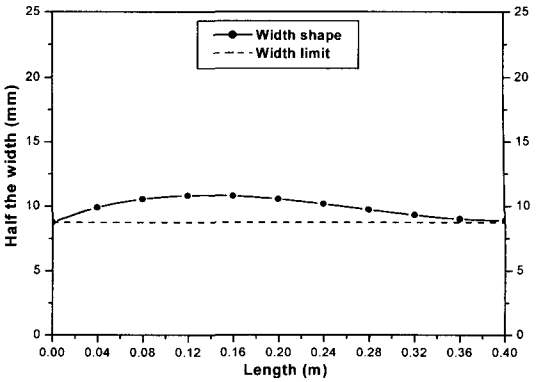

Fig. 11 Half the width shape of the beam which satisfies the specified first natural frequency

있다. 그리고 Fig. 10 과 11은 임의의 회전각속도에서 특정한 고유진동수를 만족하는 보의 두께와 폭 형상을 보의 길이에 따라 나타낸 결과이다.

4. 결 론

본 연구에서는 요구되는 특정 진동특성을 만족하는 회전 외팔 보의 단면 형상을 설계하기 위한 방법 및 결과를 제시하였다. 길이에 대하여 10개 등 간격으로 나눈 각 구간에서 두께와 폭을 3차 다항식 형태로 나타내었고, 각 구간 양단 두께와 폭을 설계변수로 정의하여 최적화 문제를 정식화하였다. 해석 결과를 통하여 회전 외팔 보의 고유진동수를 최대화 및 최소화 시킬 수 있는 특정한 보의 형상을 설계할 수 있음을 확인 하였으며, 또한 실제적인 설계문제에서 접할 수 있는 공진과 같은 문제를 피하기 위하여 임의의 회전각속도에서 특정한 고유진동수를 만족하는 보의 두께와 폭 형상 역시 설계할 수 있음을 확인하였다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계 신기술 연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참 고 문 헌

(1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British A. R. C. Reports and Memoranda No. 766.

(2) Yntema, R., 1955, "Simplified Procedures and Charts for the Rapid Estimation of Bending Frequencies of Rotating Beams," NACA 3459.

(3) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs, Vol. 25, pp. 28~30.

(4) Carnegie, W., 1959, "Vibrations of Rotating Cantilever Blading: Theoretical Approaches to the Frequency Problem Based on Energy Methods," J. of Mechanical Engineering Sci., Vol. 1, pp. 235~240.

(5) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," J. of Sound and Vibration, Vol. 56, pp. 175~185.

(6) Kane, T., Ryan, R. and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," J. of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 10, pp. 139~151.

(7) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," J. of Sound and Vibration, Vol. 181(2), pp. 261~278.

(8) 신상하, 유홍희, 1996, "전단 및 단면 관성 효과를 고려한 회전 외팔보의 모델링 및 진동해석," 한국소음진동공학회논문집, 제 6 권, 제 2 호, pp. 179~186.

(9) Yoo, H. and Shin, S., 1998, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams," J. of Sound and Vibration, Vol. 212, No. 5, pp. 807~828.

(10) Yoo, H., Seo, S. and Huh, K., 2002, "The effect of a concentrated mass on the modal characteristics of a rotating cantilever beam," J. of Mechanical Engineering Science, Vol. 216, Part C, pp. 151~163.

(11) Yoo, H., 1995, "Flapwise Bending Vibration of Rotating Cantilever Beams," Transactions of the KSME, A, Vol. 19, No. 2, pp. 348~353.

(12) Yun, Y. and Yoo, H., 2001, "Shape Optimization of a Rotating Cantilever Beam Considering its Modal and Stress Characteristics," Transactions of the KSME, A, Vol. 25, No. 4, pp. 645~653.

(13) Kane, T. and Levinson, D., 1985, Dynamics: Theory and Applications, New York: McGraw-Hill Book Company.

(14) Arora, J., 1989, Introduction To Optimum Design, New York: McGraw-Hill Book Company.

(15) DOT user manual, Vanderplaates Research and Development, Inc., 1995.