

등변분포 평면응력을 받는 SS-C-SS-C 직사각형 판의 진동과 좌굴의 엄밀해

Exact Solutions for Vibration and Buckling of An SS-C-SS-C Rectangular Plate Loaded by Linearly Varying In-plane Stresse

강재훈[†] · 심현주* · 장경호**

Jae-Hoon Kang, Hyun-Ju Shim and Kyong-Ho Chang

(2003년 9월 14일 접수 : 2003년 12월 20일 심사완료)

Key Words : Free Vibration(자유진동), Buckling(좌굴), SS-C-SS-C Rectangular Plate(SS-C-SS-C 직사각형 판), Exact Solution(엄밀해), Frobenius Method(프로비니어스 법), In-plane Buckling Moment(평면 좌굴모멘트)

ABSTRACT

Exact solutions are presented for the free vibration and buckling of rectangular plates having two opposite edges ($x=0$ and a) simply supported and the other two ($y=0$ and b) clamped, with the simply supported edges subjected to a linearly varying normal stress $\sigma_x = -N_0[1 - \alpha(y/b)]/h$, where h is the plate thickness. By assuming the transverse displacement (w) to vary as $\sin(m\pi x/a)$, the governing partial differential equation of motion is reduced to an ordinary differential equation in y with variable coefficients, for which an exact solution is obtained as a power series (the method of Frobenius). Applying the clamped boundary conditions at $y=0$ and b yields the frequency determinant. Buckling loads arise as the frequencies approach zero. A careful study of the convergence of the power series is made. Buckling loads are determined for loading parameters $\alpha=0, 0.5, 1, 1.5, 2$, for which $\alpha=2$ is a pure in-plane bending moment. Comparisons are made with published buckling loads for $\alpha=0, 1, 2$ obtained by the method of integration of the differential equation ($\alpha=0$) or the method of energy ($\alpha=1, 2$). Novel results are presented for the free vibration frequencies of rectangular plates with aspect ratios $a/b=0.5, 1, 2$ when $\alpha=2$, with load intensities $N_0/N_{cr}=0, 0.5, 0.8, 0.95, 1$, where N_{cr} is the critical buckling load of the plate. Contour plots of buckling and free vibration mode shapes are also shown.

1. 서론

평면하중을 받는 판의 횡진동^(1~10)과 좌굴^(8~17)의

연구는 대부분 등분포하중을 받는 직사각형 판에 관한 것이었으며, 변분포하중에 관한 연구는 상대적으로 드물며 이 또한 모두 근사적 방법에 의한 것이었다.

[†] 책임저자 : 정희원, 중앙대학교(서울캠퍼스) 공과대학 건축학부

E-mail : jhkang@cau.ac.kr

Tel : (02) 820-5342, Fax : (02) 812-4150

* 중앙대학교(서울캠퍼스) 대학원 건축학과

** 중앙대학교(서울캠퍼스) 건설환경공학과

변분포 평면하중을 받는 판의 대표적인 예로 순수 휨모멘트를 받는 판의 문제를 들 수가 있다. 이러한 판의 해석을 통해서 보의양단에 휨 모멘트를 받고 있는 I-형강 또는 와이드플랜지 형강의 웨브를 근사적으로 해석할 수 있다. 특히 마주보는 두 모서리가 단

순지지(SS)되고, 나머지 두 모서리는 고정(C)된 SS-C-SS-C판의 해석을 통해 양단이 단순지지된 이러한 형강의 웨브의 진동과 좌굴의 근사해석에 이용될 수 있다(특히 플랜지가 웨브에 비해 상대적으로 두꺼워 회전이 거의 구속된 형강의 경우).

진동의 특별한 경우로 취급될 수 있는 분기좌굴의 문제는 진동수가 0이 되게 하는 평면하중의 크기를 결정하는 것이다. 등변분포 평면응력을 받는 SS-C-SS-C판의 임계좌굴하중을 Nike⁽¹⁴⁻¹⁵⁾가 에너지법을 이용하여 근사적으로 계산하였으나 아직까지 엄밀해를 구한 연구는 없다.

본 연구에서는 단순지지된 마주보는 두 모서리에 등변분포 평면응력이 작용하는 SS-C-SS-C판의 진동과 좌굴의 엄밀해를 유도하였다. 이 경우 판의 운동을 지배하는 편미분방정식은 변계수를 가지는 상미분방정식으로 전환이 되어 변수분리해가 존재하게 된다. Frobenius의 멱급수법을 이용하여 엄밀해를 구하였다. 자유진동의 대표적인 경우에 대해서 급수의 수렴성을 확인하였으며, 이렇게 구한 좌굴하중을 Nike의 근사해와 비교 하였다. 여러 가지 유형의 평면하중과 변장비를 가진 판의 진동수와 좌굴하중을 계산하였으며, 등고선의 형태로 진동과 좌굴모드를 제공하였다.

2. 해석

Fig. 1은 가로×세로의 크기가 $a \times b$ 이고, 단순 지지된 두 모서리($x=0, a$)에는 등변분포 평면응력이 작용하고 있으며, 모서리 $y=0$ 와 b 에서는 고정된 SS-C-SS-C 직사각형 판을 보여 주고 있다. 이 판의 진동과 좌굴의 지배운동방정식은 다음과 같다

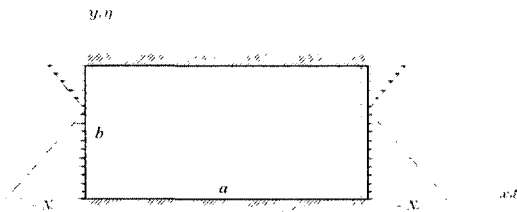


Fig. 1 An SS-C-SS-C rectangular plate loaded by linearly varying in-plane stresses

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1)$$

여기서 w =횡변위, ρ =밀도, h =판두께, t =시간, q =단위면적 당 횡분포하중, ∇^4 =겹조화 미분연산자로 $\partial^4/\partial x^4 + 2\partial^4/\partial x^2 \partial y^2 + \partial^4/\partial y^4$ 로 정의되며, D 는 판의 휨강성으로 다음 식으로 정의된다.

$$D \equiv Eh^3/12(1-\nu^2) \quad (2)$$

여기서 E =탄성계수, ν =푸아송비이다. 식 (1)에서 $N_x, N_y = x-, y-$ 방향으로 단위길이 당 평면력(인장일 때 +), $N_{xy} = xy-$ 평면에서 단위길이 당 전단력으로, 평면응력($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$)과의 관계식은 $N_x = \sigma_x h, N_y = \sigma_y h, N_{xy} = \tau_{xy} h$ 이다.

등변분포하중 N_x 를 다음 식과 같이 y 에 대해서 선형적으로 가정한다.

$$N_x = -N_0(1 - \alpha \cdot y/b) \quad (3)$$

여기서 N_0 =아래 모서리($y=0$)에서 압축력의 세기, α =수치인자이다. α 의 크기에 따라 Fig. 2와 같이 다양한 형태의 평면하중 N_x 를 표현할 수 있다. $q = N_y = N_{xy} = 0$ 으로 하고, 식 (3)을 (1)에 대입하면 다음 식과 같이 표현된다.

$$\nabla^4 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{N_0}{D} \left(1 - \alpha \frac{y}{b}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

계산의 편의성을 위해 무차원좌표 $\xi \equiv x/a$ 와 $\eta \equiv y/b$ 를 이용하면 식 (4)는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2k^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + k^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + \frac{a^4 \rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{a^2 N_0}{D} (1 - \alpha \eta) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad (5)$$

여기서, $k(\equiv a/b)$ =변장비(aspect ratio)이다.

식 (5)의 해인 횡변위 w 를 다음 식과 같이 가정한다.

$$w(\xi, \eta, t) = Y_m(\eta) \sin(m\pi\xi) \sin \omega t \quad (6)$$

여기서, $Y_m = \eta$ 의 처짐함수, $\omega =$ 고유진동수, $m =$ 모드형상의 x-방향 반파(half-wave) 수이다. 식 (6)은 $\xi=0$ 과 1에서의 단순지지 경계조건을 만족시킨다. 식 (6)을 (5)에 대입하면 다음 식이 계산된다.

$$Y_m^{IV} - 2\beta_m^2 Y_m'' + \{\beta_m^4 - N^*(1-\alpha\eta)\beta_m^2 - \lambda^2/k^4\} Y_m = 0 \quad (7)$$

여기서, Y_m^{IV} , $Y_m'' = \eta$ 에 관한 Y_m 의 4계와 2계도함수, β_m 는 다음 식으로 정의되며,

$$\beta_m \equiv m\pi/k \quad (m = 1, 2, 3) \quad (8)$$

$\lambda =$ 무차원 진동수, $N^* =$ 아래 모서리($y=0$)의 무차원 압축력으로 다음 식으로 정의된다.

$$\lambda \equiv \omega a^2 \sqrt{\rho h/D}, \quad N^* \equiv N_0 b^2/D \quad (9 \sim 10)$$

식 (7)은 각 m 에 대한 상미분방정식으로 변계수를 가지지만, 멱급수해법인 Frobenius법⁽¹⁸⁾을 이용하면 엄밀해를 구할 수 있다.

처짐함수 Y_m 을 다음 식으로 가정한다.

$$Y_m(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n} \eta^n \quad (11)$$

여기서, $C_{m,n} =$ 임의의 계수. 식 (11)을 (7)에 대

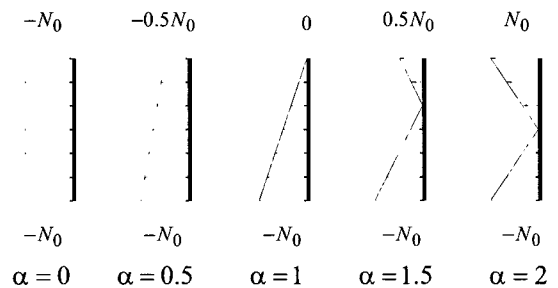


Fig. 2 Examples of in-plane loading N_x along $x=0$

입 하면, 다음 식이 계산된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)C_{m,n} \eta^{n-4} \\ & - 2\beta_m^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_{m,n} \eta^{n-2} \\ & + (\beta_m^4 - N^* \beta_m^2 - \lambda^2/k^4) \sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n} \eta^n \\ & + \alpha \beta_m^2 N^* \sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n} \eta^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

첨수를 이동하면 식 (12)는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} [\{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)C_{m,n+4} \\ & - 2\beta_m^2(n+2)(n+1) \times C_{m,n+2} + \Gamma C_{m,n} \} \eta^n + \\ & \alpha \beta_m^2 N^* C_{m,n} \eta^{n+1}] = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

여기서

$$\Gamma \equiv \beta_m^4 - N^* \beta_m^2 - \lambda^2/k^4 \quad (14)$$

이다. 항등식의 성질을 이용하면, η^0 의 계수에 대해서 다음 식이 계산되며,

$$C_{m,4} = \beta_m^2 C_{m,2} / 6 - \Gamma C_{m,0} / 24 \quad (15)$$

$\eta^n (n=1,2,3...)$ 의 계수에 대해서 다음 식이 계산된다.

$$C_{m,n+4} = \frac{2\beta_m^2(n+2)(n+1)C_{m,n+2} - \Gamma C_{m,n} - \alpha \beta_m^2 N^* C_{m,n-1}}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} \quad (16)$$

$n \geq 4$ 일 때 식 (15)와 (16)은 $C_{m,n}$ 에 대해서 점화 관계(recursion relationship)를 가진다.

따라서 $C_{m,0}$, $C_{m,1}$, $C_{m,2}$, $C_{m,3}$ 은 임의의 계수이며, $n \geq 4$ 일 때의 계수 $C_{m,n}$ 은 $C_{m,i} (i=0,1,2,3)$ 로 표현된다. 4개의 경계조건은 미지수가 $C_{m,i} (i=0,1,2,3)$ 인 4개의 동차방정식을 만든다. 비자명해(non-trivial solution)를 구하기 위해 계수행렬의

행렬식을 0으로 취하여 무차원 진동수(λ)를 구한다. 행렬의 각 원소는 무한급수의 형태로 표현된다. 각 λ 를 다시 4개의 동차방정식에 대입 하면 각 λ 에 대응하는 모드형상을 결정해 주는 고유벡터 $C_{m,n}/C_{m,0}$ ($n=1, 2, 3$)를 구할 수 있다.

SS-C-SS-C판에서 변위와 회전각이 0인 고정 모서리($\eta=0, 1$)에서의 경계조건은 다음 식과 같다.

$$w|_{\eta=0} = 0 \rightarrow C_{m,0} = 0, \quad \partial w / \partial \eta|_{\eta=0} = 0 \rightarrow C_{m,1} = 0 \quad (17a)$$

$$w|_{\eta=1} = 0 \rightarrow Y_m(1) = 0, \quad \partial w / \partial \eta|_{\eta=1} = 0 \rightarrow Y'_m(1) = 0 \quad (17b)$$

고정모서리 $\eta=0$ 에서의 경계조건 (17a)로 $C_{m,0} = C_{m,1} = 0$ 이 되며 $C_{m,2}$ 와 $C_{m,3}$ 를 미지수로 하는 2개의 동차방정식이 만들어 진다. 따라서 고유치

(진동수와 좌굴하중)를 계산해 주는 행렬식은 4차에서 2차로 줄어든다.

3. 수렴성 연구

무한급수로 표현된 식 (11)의 엄밀해의 상극한은 수치계산에서 요구되는 정확도에 따라서 어떤 유한수(N)로 택하게 된다. 이 과정은 경계치 문제의 엄밀해를 구할 때 Bessel 함수와 Hankel 함수와 같은 초월함수의 계산과정과 동일하다. 결과의 정확성을 입증하고 식 (11)의 멱급수의 수렴률을 조사하기 위한 수렴성 연구가 요구된다.

Table 1은 N_0 가 임계하중(N_{cr})의 0.5이고 x -방향으로 2개의 반파($m=2$)를 갖는 진동모드에 대해서 3가지 하중조건($\alpha=0, 1, 2$)에 대한 정사각형 판($a/b=1$)의 하위 3개의 무차원 진동수 $\lambda(\equiv \omega a^2 \sqrt{\rho h/D})$ 에 대한 수렴성 연구결과를 보여 주고 있다.

Table 1은 y -방향 반파수가 증가하는 상위 진동모드의 정확한 수렴치를 얻기 위해서는 더 많은 항수가 필요하다는 사실을 보여주고 있다. 이 표에서 밑줄이 쳐진 숫자는 최소의 N 으로 계산된 4자리까지 수렴된 진동수를 의미한다. 작은 항 수(N)을 사용할 때 진동수 행렬식에서 근을 찾을 수 없는 경우에는 (-)으로 표시하였다. 또한 Table 1은 진동수가 단조 수렴하지 않고 진동 수렴함을 보여 주고 있다.

Table 1 Convergence of nondimensional frequencies $\lambda \equiv \omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ for $a/b = 1, m=2$, and $N_0/N_{cr} = 0.5$

N	$\alpha=0$			$\alpha=1$			$\alpha=2$		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
19	8.701	-	-	-	-	-	-	-	-
0	-	-	-	-	-	-	-	-	-
21	25.38	-	-	-	-	-	-	-	-
22	-	-	-	-	-	-	-	-	-
23	33.53	-	-	-	-	-	-	-	-
24	-	-	-	-	-	-	-	-	-
25	37.36	2375	-	24.88	2396	-	2486	-	-
26	39.38	68.19	-	-	-	-	-	-	-
27	38.48	-	-	34.17	-	-	-	-	-
28	38.80	78.53	-	43.24	61.44	-	-	-	-
29	38.68	2081	-	37.89	2096	-	2161	-	-
30	38.72	84.08	-	39.72	76.48	-	-	-	-
31	38.71	87.56	115.9	38.89	-	-	25.97	-	-
32	38.71	85.90	-	39.22	83.66	-	-	-	-
33	38.71	86.46	132.0	39.09	88.67	118.8	38.27	2176	-
34	38.71	86.25	-	39.14	86.14	-	57.26	61.53	-
35	38.71	86.32	142.8	39.12	87.04	135.3	43.72	-	-
36	38.71	86.30	-	39.13	86.67	-	47.22	84.59	-
37	38.71	86.30	148.1	39.12	86.81	145.1	45.47	2284	-
38	38.71	86.30	150.7	39.13	86.76	154.3	46.20	92.99	-
39	38.71	86.30	149.6	39.12	86.78	149.0	45.88	98.81	134.1
40	38.71	86.30	150.0	39.13	86.77	150.6	46.01	95.82	-
41	38.71	86.30	149.8	39.13	86.77	149.9	45.96	96.96	148.1
42	38.71	86.30	149.9	39.13	86.77	150.2	45.98	96.47	162.6
43	38.71	86.30	149.9	39.13	86.77	150.1	45.97	96.67	153.7
44	38.71	86.30	149.9	39.13	86.77	150.1	45.97	96.59	156.4
45	38.71	86.30	149.9	39.13	86.77	150.1	45.97	96.62	155.2
46	38.71	86.30	149.9	39.13	86.77	150.1	45.97	96.61	155.6
47	38.71	86.30	149.9	39.13	86.77	150.1	45.97	96.61	155.5
48	38.71	86.30	149.9	39.13	86.77	150.1	45.97	96.61	155.5

4. 좌굴하중과 모드형상

Table 2는 등분포하중($\alpha=0$)을 받을 때 본 연구의 멱급수법과 Timoshenko(11,16,17)의 미분방정식의 적분법에 의한 무차원 임계좌굴하중(N_{cr}^*)을 비교한 것이다.

3자리로 구한 Timoshenko의 결과는 $a/b=0.8$ 과 0.9일 때를 제외하고 대부분 멱급수법과 일치한다.

Table 2의 좌굴하중은 임계값(critical value)이다. 즉, 각 a/b 에 대한 무한개의 좌굴하중치 중에서 최소값이다. $a/b \leq 0.9$ 일 때 모드형상은 x -방향으로 하나의 반파($m=1$)를 갖지만, $1 < a/b < 1.6$ 일 때 임계좌굴모드에서는 $m=2$ 라는 사실을 Fig. 3은 보여 주고 있다. Fig. 3에서 $m=1$ 과 2일 때 교차 하는 곡

선의 아래 부분은 각 a/b 에 대한 무차원 임계좌굴 하중(N_{cr}^*)을 의미한다.

Table 2 Comparison of nondimensional critical buckling loads $N_{cr}^* \equiv N_{cr} b^2 / D$ from Timoshenko and the exact methods for $\alpha = 0$

Method	0.4 (m=1)	0.5 (m=1)	0.6 (m=1)	a/b 0.7 (m=1)	0.8 (m=1)	0.9 (m=1)	1.0 (m=2)
Timoshenko	93.2	75.9	69.6	69.1	71.9	77.3	75.9
Power Series	93.247	75.910	69.632	69.095	72.084	77.545	75.910

Table 2는 변장비가 $0.4 \leq a/b \leq 1.0$ 일 때의 임계좌굴하중을 보여 주고 있지만, 이 표의 N_{cr}^* 은 변장비가 $m(a/b)$ ($m=1, 2, 3, \dots$) 일 때의 N_{cr}^* 이기도 하다. 예를 들면, $N_{cr}^* = 69.095$ 는 $a/b = 0.7, 1.4, 2.1, 2.8, \dots$ 일 때의 N_{cr}^* 이다. 이러한 사실은 고유치의 수학적 해와 식 (6)의 모드형상으로부터 알 수 있다. 함수 $\sin m\pi\xi$ 는 ξ 에 대해서 주기적이다. 예를 들면 $m=3$ 일 때 $\xi=0$ 과 1의 단순지지 모서리조건은 모드형상의 $\xi=1/3$ 과 $2/3$ 에서 나타나는 절선(node line)에서 다시 되풀이 된다. 또한 $a/b = 0.4$ 일 때 93.247 은 임계좌굴하중 이면서 $a/b = 0.8$ ($m=2$), $a/b = 1.2$ ($m=3$), 일 때의 좌굴하중(N_{cr}^*)이 된다.

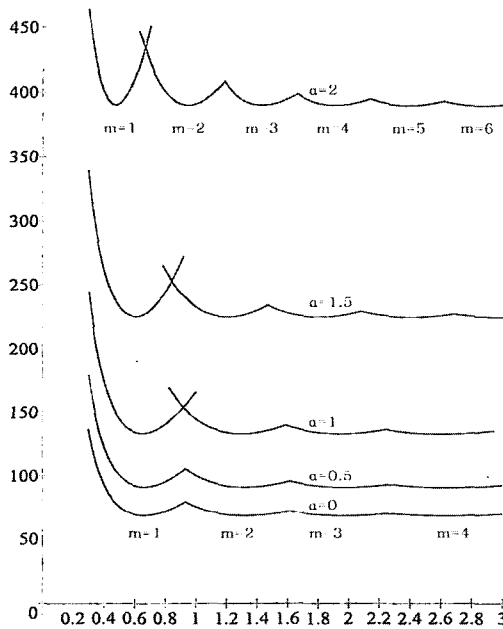


Fig. 3 Nondimensional critical buckling load N_{cr}^* vs. aspect ratio a/b for $\alpha = 0, 0.5, 1, 1.5, \text{ and } 2$

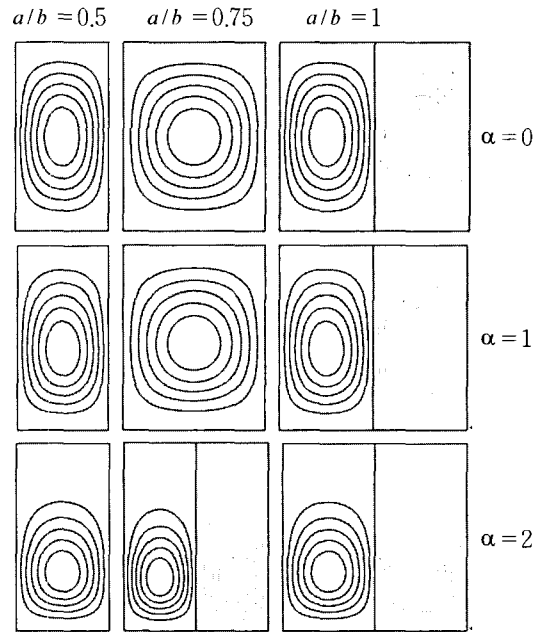


Fig. 4 Contour plots of critical buckling mode shapes

Table 3 Comparison of nondimensional critical buckling loads $N_{cr}^* \equiv N_{cr} b^2 / D$ from the power series and energy methods for $\alpha = 1$

Method	0.4 (m=1)	0.5 (m=1)	0.6 (m=1)	0.64 (m=1)	0.65 (m=1)	0.66 (m=1)	a/b 0.67 (m=1)	0.7 (m=1)	0.8 (m=1)	0.9 (m=1)	1.0 (m=2)	1.2 (m=2)	1.4 (m=2)
Energy	175	145	135	133.9	133.8	133.9	134.0	134.7	141.0	152.1	145	135	135
Power Series	174.4	145.2	134.8	133.7	133.7	133.7	133.8	134.6	141.0	152.0	145.2	134.8	134.6

Table 4 Comparison of nondimensional critical buckling loads $N_{cr}^* \equiv N_{cr} b^2 / D$ from the power series and energy methods for $\alpha = 2$

Method	a/b															
	0.3	0.35	0.40	0.45	0.47	0.48	0.5	0.6	0.7	0.7	0.8	1.0	1.2	1.5	2.0	
	(m=1)	(m=1)	(m=1)	(m=1)	(m=1)	(m=1)	(m=1)	(m=1)	(m=1)	(m=2)	(m=2)	(m=2)	(m=3)	(m=3)	(m=4)	
Energy	467.0	425.0	402.0	392.0	390.9	391.1	392.2	412.2	452.0	424.0	402.0	392.0	402.0	392.0	392.0	
Power Series	464.5	422.5	400.4	391.3	390.5	390.5	391.5	411.8	451.6	422.5	400.4	391.5	400.4	391.5	391.5	

Table 5 Nondimensional frequencies $\lambda \equiv \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ for $\alpha = 2$

a/b	N _o /N _{cr}	n	m=1	m=2	m=3	m=4
0.5	0	1	13.69	42.59	91.70	16.07
		2	23.65	51.67	100.3	169.0
	0.5	1	11.49	37.93	86.14	156.2
		2	24.15	52.63	101.1	161.0
	0.8	1	7.685	31.74	79.57	147.8
		2	24.67	52.84	100.7	172.1
	0.95	1	3.926	27.65	75.66	144.3
		2	24.91	52.66	100.1	163.4
	1	1	0	26.08	74.25	143.0
		2	24.98	52.55	99.58	160.8
1	0	1	28.95	54.74	102.2	170.3
		2	69.33	94.59	140.2	206.7
	0.5	1	27.47	45.97	87.22	151.7
		2	69.65	96.61	143.6	210.4
	0.8	1	25.07	30.74	64.62	127.0
		2	70.11	98.68	146.0	211.3
	0.95	1	23.37	15.70	46.96	110.6
		2	70.41	99.63	147.3	210.6
	1	1	22.71	0	39.00	104.3
		2	70.51	99.92	147.9	210.4
2	0	1	95.26	115.8	156.4	219.0
		2	254.1	277.3	318.1	378.3
	0.5	1	94.76	109.9	137.3	183.9
		2	254.2	278.6	322.4	386.4
	0.8	1	93.98	100.3	104.5	123.0
		2	254.4	280.5	327.7	394.7
	0.9	1	93.64	95.90	87.80	88.21
		2	254.5	281.2	329.7	397.3
	0.95	1	93.46	93.47	77.50	62.82
		2	254.5	281.6	330.7	398.5
1	1	93.26	90.85	65.16	0	
	2	254.6	282.1	331.7	399.7	

Table 3과 4는 $\alpha = 1$ 과 2일 때의 N_{cr}^* 을 보여주고 있다. 엄밀한 멱급수해와 Nike(14~15)의 에너지법에 의한 해를 비교하였다. Nike는 변위함수로 $W(\xi, \eta) = \sin m\pi\xi \sum C_n Y_n(\eta)$ 을 사용하였는데 여기서 $Y_n(\eta)$ 는 양단이 고정된 보의 자유진동의 고유함

수이다. 이 에너지법에 의한 해는 매우 정확한 것을 알 수 있다. Nike는 Table 4에서 $a/b = 0.7$ 일 때 $N_{cr}^* = 452$ 을 계산하였지만, 임계모드($N_{cr}^* = 424$)는 $m=1$ 이 아니라 $m=2$ 일 때 발생한다는 것을 그는 간과했다.

Fig. 3은 $\alpha = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ 일 때의 좌굴하중을 그림으로 보였다. 어떤 변장비에 대해서 a 가 증가할수록 임계좌굴모드의 x -방향 반파수(m)가 증가한다는 것을 보여 준다. 예를 들면, $a/b = 2.8$ 일 때 $\alpha = 0$ 에서 2로 증가할 때 $m=4$ 에서 6으로 증가한다. y -방향으로 2개 이상의 반파를 가지는 좌굴모드가 존재하지만 이 모드는 항상 상위 좌굴 하중에 해당한다. 임계모드는 항상 1개의 y -방향 반파수($n=1$)를 가진다. 또한 $a/b > 3$ 인 비교적 긴 직사각형 판의 N_{cr}^* 는 a/b 에 관계없이 거의 일정 하며 좌굴수(m)만이 변한다는 것을 보여 준다.

Fig. 4는 3가지 형태의 하중($\alpha = 0, 1, 2$)과 3가지 변장비($a/b = 0.5, 0.75, 1$)를 가진 판의 임계좌굴 모드를 동일한 처짐을 갖는 지점을 선으로 연결한 등고선(contour line)의 형태로 보여준다. Fig. 4로 부터 다음의 사실을 알 수 있다.

- (1) $\alpha = 0$ 인 모드형상은 $\eta = 0.5$ 인 축에 관해서 대칭이다.
- (2) a 가 증가할수록 등고선의 중심은 최대 압축 하중을 받는 부분($\eta = 0$)으로 이동한다.
- (3) $\alpha = 2$ 일 때 $a/b = 0.75$ 인 판과 $\alpha = 0, 1, 2$ 일 때 $a/b = 1$ 인 판의 임계모드형상은 x -방향으로 2개의 반파수($m=2$)를 가지며, 판의 왼쪽 또는 오른쪽 받은 처짐이 양 또는 음이고, 나머지 받은 그와 반대이다.
- (4) 정사각형 판($a/b = 1$)의 모드형상의 각각의 반은 $a/b = 0.5$ 인 모드형상과 동일하다.

5. 고유진동수와 모드형상

Table 5는 $\alpha=2$ 일 때의 3가지 변장비($a/b = 0.5, 1, 2$)와 4종류의 하중($N_0/N_{cr}=0, 0.5, 0.8, 0.95, 1$)에 대한 무차원 진동수 λ 를 보여 주고 있다. N_0 가 증가하여 N_{cr} 이 되면 진동수가 0이 되는 모드가 발생한다.

Table 5는 판의 각 형상과 N_0/N_{cr} 에 대해서 8개의 진동수를 보여 주고 있다. 이 진동수는 하중방향(x)으로 $m=1\sim 4$ 개의 반파를 가지며 y -방향으로 $n=1\sim 2$ 개의 반파를 갖는 모드형상에 해당 한다. 각 하중에 대한 기본(최하위) 진동수는 굵은 글씨체로 강조하였다. N_0/N_{cr} 이 작거나 크지 않을 때 기본모드는 항상 $(m, n)=(1,1)$ 일 때 발생 하지만, N_0/N_{cr} 이 증가하면 m 도 2~4로 증가한다. N_0/N_{cr} 이 증가할수록 λ 의 감소율은 커지며, 특히 임계좌굴모드에서는 이런 현상이 더 확연히 나타난다. 그러나 (1,2)와 (2,2) 모드에서는 N_0/N_{cr} 증가할 때 오히려 진동수는 증가한다.

Fig. 5는 3가지 유형의 하중($\alpha = 0, 1, 2$)을 받는 정사각형 판의 $(m, n)=(2,1)$ 일 때 진동모드를 보여 주고 있다. N_0/N_{cr} 이 0에서 0.5, 0.95로 증가함에 따라 등고선이 압축력이 최대인 지역으로 이동 하며, 특히 임계좌굴이 (2,1) 모드에서 발생하는 $\alpha=2$ 인

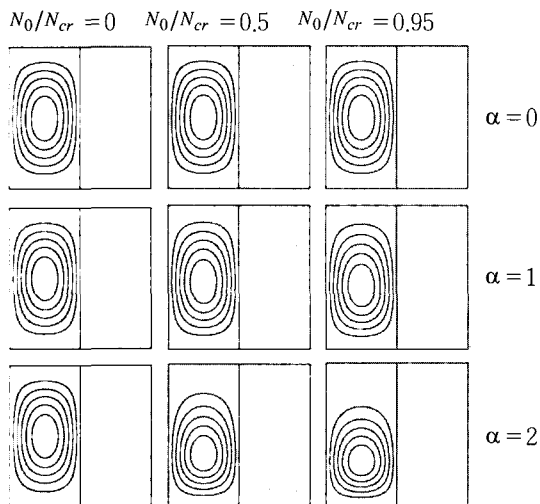


Fig. 5 Free vibration mode shapes for the (2,1) mode of a square plate

경우에 그런 현상이 두드러진다.

6. 결론

등분포 평면응력을 받는 단순지지된 마주보는 두 모서리를 가진 직사각형 판의 진동과 좌굴을 엄밀한 방법으로 해석하였다. 이 해석법을 상대적으로 실용적인 나머지 두 모서리($y=0, b$)가 고정된 판(SS-C-SS-C 판)에 적용하였다.

평면 모서리 하중(N_x)이 y 에 대해서 선형적인 등분포하중보다 더 일반적일 경우 즉, N_x 가 y 의 임의의 함수 $f(y)$ 일 경우 엄밀해를 구하는 것은 불가능하다. 우선 x 와 y 의 함수인 N_x, N_y, N_{xy} 를 결정하는 평면탄성(plane elasticity)의 문제를

풀어야 한다. 그러나 식 (6)에서 가정된 변수분리해는 더 이상 식 (1)을 만족시키지 못한다.

본 연구의 엄밀한 해석법은 2차의 특성행렬식을 만들며, 이 행렬식의 근(고유치)이 바로 좌굴하중과 고유진동수이다. 이러한 절차는 식 (3)의 특별한 경우인 등분포 평면하중($\alpha=0$)에 대한 다른 엄밀한 해석법과 동일하다.

Table 1의 멱급수의 수렴성 연구에서 적은 수의 항(N)이 사용된 급수는 근을 주지 못하거나 정확한 해를 줄 수 없었다. 정확한 해를 구하기 위해서는 최소한 30항 이상이 요구되었으며, 일반적으로 45항 이상이 필요하였다. 또한 수렴의 성격이 단조수렴이 아니라 진동수렴하였으며, 항 수가 증가함에 따라 수렴의 진동폭이 반드시 감소하지는 않았다.

참고 문헌

- (1) Leissa, A. W., 1969, Vibration of Plates, Washington D.C. U.S. Govt. Printing Office, Reprinted 1993, by The Acoustical Society of America.
- (2) Leissa, A. W., 1973, "The Free Vibration of Rectangular Plates," Journal of Sound and Vibration, Vol. 31, No. 3, pp. 257~293.
- (3) Dickinson, S. M., 1971, "Lateral Vibration of Rectangular Plates Subject to In-plane Forces," Journal of Sound and Vibration, Vol. 16, No. 3, pp. 465~472.

- (4) Bassily, S. F. and Dickinson, S. M., 1972, "Buckling and lateral Vibration of Rectangular Plates Subject to In-plane Loads a Ritz Approach," Vol. 22, No. 2, pp. 219~239.
- (5) Dickinson, S.M., 1978, "The Buckling and Frequency of Flexural Vibration of Rectangular Isotropic and Orthotropic Plates Using Payleigh's Method," Vol. 61, No. 1, pp. 1~8.
- (6) Bassily, S. F. and Dickinson, S. M., 1978, "Buckling and Vibration of In-Plane Loaded Plates Treated by a Unified Ritz Approach," Vol. 59, No. 1, pp. 1~14.
- (7) Kaldas, M. M. and Dickinson, S. M., 1981, "Vibration and Buckling Calculations for Rectangular Plates Subject to Complicated In-plane Stress Distributions by Using Numerical Integration in a Rayleigh-ritz Analysis," Vol. 75, No. 2, pp. 151~162.
- (8) Ilanko, S. and Tillman, S. C., 1985, "The Natural Frequencies on In-plate Stressed Rectangular Plates," Vol. 98, No. 1, pp. 25~34.
- (9) Singh, J. P. and Dey, S. S., 1990, "Transverse Vibration of Rectangular Plates Subjected to In-plane Forces by a Difference Based Variational Approach," Vol. 32, No. 7, pp. 591~599.
- (10) Laura, P. A. A., Larrondo, H. A., Cortinez, V. H. and Avalos, D. R., 1991, "Transverse Vibrations of Rectangular Plates of Non-Uniform Thickness Subjected to a Uniform State of In-plane Stress," Vol. 151, No. 1, pp. 175~180.
- (11) Timoshenko, S. and Gere, J., 1963, Theory of Elastic Stability, 2ndEd., New York, McGraw-Hill Book Company, Inc.
- (12) Bulson, P., 1970, The Stability of Flat Plates, London, Chatto & Windus.
- (13) Japan Column Research Council, 1971, Handbook of Structural Stability, Tokyo, Corona Publishing Company.
- (14) Nilke, K., 1936, "Biegungs-Beulung der Rechteck-platte mit Eingespanter Lngsrndern," Bauingineur, Vol. 17, p. 111.
- (15) Nilke, K., 1937, "Biegungsbeulung der Rechteck-platte," Ingeieur Archiv, Vol. 8, p. 403.
- (16) Timoshenko, S., 1907, Bull. Polytech, Inst. Kiev.
- (17) Timoshenko, S., Z. 1910, Math. Physik, Vol. 58, p. 343.
- (18) Wylie, Jr. C. R., 1951, Advanced Engineering Mathe-matics, New York, McGraw-Hill Book Company, Inc