

케이싱 오실레이터의 특이점 해석

남윤주* · 배형섭* · 박명관†

(2003년 7월 7일 접수, 2003년 11월 12일 심사완료)

The Singularity Analysis of the Casing Oscillator

Yun-Joo Nam Hyeong-Sub Bae and Myeong-Kwan Park

Key Words : Casing Oscillator(케이싱 오실레이터), Geometrical Analysis(기하학적 방법), Jacobian Matrix(자코비안 행렬), Numerical Analysis(수치적 방법), Parallel Manipulator(병렬형 매니플레이터), Singularity(특이점), Singular Configuration(특이형상)

Abstract

In this paper, the new casing oscillator, which is a construction machine and which structure is similar to that of a parallel manipulator with redundancy, is proposed. The singularity analysis of this machine is performed by two different methods. First, the singularities are found by the numerical method at configurations where the rank of the Jacobian matrix becomes deficient. The singularities are outside the workspace. To investigate the physical information on these configurations, the singularities are examined by the geometric method at configurations where the casing oscillator cannot resist the external forces and moments applied to the upper platform due to losing static equilibrium. The results of the geometric method are the same as those of the numerical method. It proves that the new casing oscillator is free from the singularity, which causes serious problems to a parallel manipulator.

1. 서론

케이싱 오실레이터(Casing Oscillator)는 건물, 공장, 도로, 철도교, 철탑등의 기초작업에 사용되는 유압 구동식 건설장비(construction machine)로 케이싱(casing)을 좌·우로 회전, 요동하여 지면에 압입하는 장치이다. 케이싱(casing)을 지면에 최초 압입할 때, 지면의 기울기와는 상관없이 케이싱이 해수면에 대해 항상 수직인 방향을 유지하는 것이 중요하다.

현재 건설현장에서 사용되는 케이싱 오실레이터는 해수면에 수직인 방향으로 케이싱을 압입할 때 자동으로 수직을 보정해주는 장치가 부착되어 있지 않다. 따라서 압입 전 반드시 지면의 평탄화

작업을 선행해야 하며, 이는 많은 비용과 시간을 요구한다. 그리고 케이싱의 수직 압입 여부의 확인은 케이싱 내부의 흙을 제거하는 굴삭기에 부착되어진 수직계로 또 다른 작업자에 의해 측정이 이루어진다. 또한 작업 도중 케이싱에 기울어짐이 발생하는 경우 기중기나 크레인 등의 중장비를 사용하여 물리적인 방법으로 수직을 보정하고 있다. 따라서 이러한 방법으로는 수직 압입의 정확도가 떨어질 뿐 아니라 보정 작업에 많은 시간이 소요되고, 케이싱 외부에 손상을 입혀 구조물의 강도를 약화시키게 되므로 사고의 위험이 따르게 된다.

본 논문에서는 이러한 문제점을 해결하기 위하여 외부 중장비의 사용없이 수직 압입 작업이 가능한 새로운 케이싱 오실레이터 시스템을 제시하였다. 수직 압입 작업을 위한 자동 밸런싱(auto-balancing)장치를 구현하기 위해서는 기구학적 해석이 우선되어야 한다. 따라서 케이싱 오실레이터와 유사한 구조를 가진 병렬형 매니플레이터(parallel manipulator)의 연구를 응용하여 역기구학(inverse kinematic)해석을 하였고, 자코비안 행렬

† 책임저자, 회원, 부산대학교 기계공학부 및 기계기술연구소

E-mail : mkpark@pusan.ac.kr

TEL : (051)510-2464 FAX : (051)514-0685

* 부산대학교 대학원

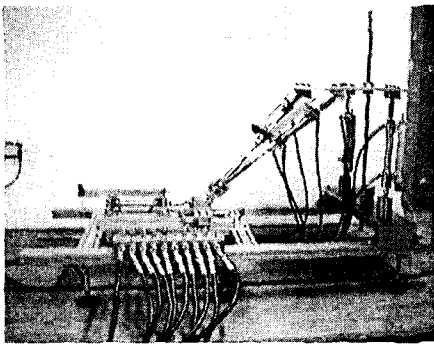


Fig. 1 Prototype of the Casing Oscillator

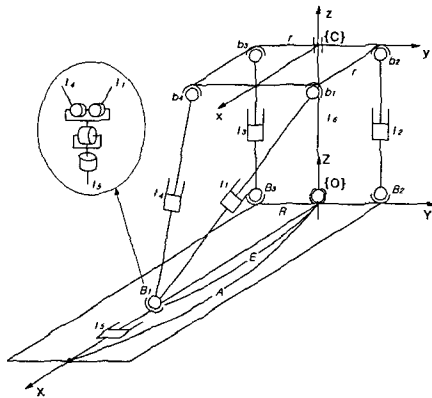


Fig. 2 Kinematic model of the Casing Oscillator

(Jacobian matrix)을 유도하였다.

병렬형 매니플레이터는 강성이 높고, 하중용량(load capacity)이 크며, 좋은 정밀도를 가지는 장점이 있으나, 작업공간(work space)과 관절공간(joint space)사이의 비선형 연속 대응 관계 때문에 특이점(singularity) 해석이 어렵다는 단점이 있다. 이는 직렬형 매니플레이터와는 달리 특이점 근처에서의 구동이 기구의 심각한 파괴를 초래할 수 있다는 점에서 병렬형 매니플레이터의 설계와 제어에 있어 매우 중요하다.

병렬형 매니플레이터의 특이점 해석에 대한 지금까지의 연구들을 간략히 살펴보면 다음과 같다. Fichter⁽⁴⁾는 처음으로 스투워드 플랫폼(Stewart platform)의 특이형상에 대해 소개하였고, Gosselin⁽⁵⁾는 작업영역의 경계를 계산하기 위한 기하학적 알고리즘을 제시하였다. Merlet⁽⁶⁾는 작업공간내의 특이점을 찾아 이를 피해 가는 운동 패적을 구하였으며, Gosselin 과 Angeles⁽⁷⁾는 특이점에 대한 분류를 최초로 시도하였다. Daniali 외 3 인⁽⁸⁾은 3 자유도 운동을 하는 평면 병렬형 매니플레이터를 구동방식에 따라 각기 특이점을 수치적으로 해석하였으나 특이형상과 작업공간과의 관계를 입

증하지 못했다. 또한 Long 과 Collins⁽⁹⁾는 병렬기구 조이스틱의 특이형상을 라인벡터(line vector)를 이용해 분석하였다. 대부분의 이전 연구들은 자코비안 행렬의 랭크(rank)수가 감소하는 점들을 찾는 수치적 방법을 이용하고 있다. 그러나 특이점은 일정한 영역에 한정되어 있지 않을 뿐 아니라 자코비안 행렬식이 여러 변수로 되어 있으므로 명확한 기하학적 형상을 찾기가 어렵다.⁽¹⁰⁾ 또한 이러한 방법으로는 특이형상에 대한 물리적 정보를 제공하지 못하는 결점을 가지고 있다.

본 논문은 여유구동하는 케이싱 오실레이터의 동작 특성과 관계된 구속조건을 이용하여 역기구학의 유일 해를 구하고, 정방향렬의 자코비안 행렬을 유도하여 두가지 방법으로 특이점을 분석한다. 먼저 자코비안 행렬의 랭크(rank)가 감소하는 점들을 수학적으로 찾고, 다음으로 상판에 부과되는 힘과 모멘트의 평형 관계식을 적용하여 힘과 모멘트를 지지할 수 없는 특이형상을 기하학적으로 해석하며, 이에 대한 물리적 의미를 찾는다. 여기서 두 방법의 결과는 일치하며, 케이싱 오실레이터는 특이점이 작업영역 밖에 존재함을 입증한다. 따라서 케이싱 오실레이터의 상용화 가능성을 밝히고, 4 자유도 병렬형 매니플레이터로서의 응용 가능성을 제시한다.

2. 좌표계 설정 및 자유도 해석

2.1 좌표계 설정

Fig. 1 는 케이싱 오실레이터의 실험장치 사진이며, Fig. 2 은 기구학 해석을 위한 실험장치의 단순화된 모델을 나타낸다. 케이싱 오실레이터는 하판과 상판이 5 개의 1 자유도 미끄럼 운동을 하는 작동기(actuator)로 연결된 병렬형 매니플레이터의 구조이다. 그리고 케이싱 오실레이터에 케이싱 I_c 가 장착되었을 때 하판과 상판의 중심좌표인 {O}와 {C}가 케이싱의 중심위치가 되며 케이싱은 항상 상판에 수직이다.

케이싱 오실레이터의 하판에 대한 상판의 운동을 기술하기 위해 2 개의 좌표계를 설정한다. XYZ 로 표시된 하판의 중심 {O}에 원점을 둔 좌표계는 기준좌표계이고, xyz 로 표시된 상판의 중심 {C}에 원점을 둔 좌표계는 이동좌표계로서 상판과 함께 운동한다. 하판상의 볼관절(ball joint) B_1, B_2 와 상판 상의 볼관절 b_1, b_2 를 연결하는 작동기를 I_1, I_2 로 표시한다. I_1, I_2 를 연결하는 유니버설 관절(universal joint)과 I_c 의 말단 부분에 있는

회전관절(revolute joint)이 연결되어 4 자유도 관절 B_i 를 구성한다. 그리고 B_i 은 상판상의 불관절 b_i , b_i 와 작동기 l_i , l_i 로 연결되어 있다. 그리고 하판 상의 고정 A에서 B_i 까지 연결하는 작동기를 l_i 라 하며, B_i 은 l_i 의 구동에 의해 X 축 위에서 병진 운동한다. XYZ 좌표계에 대한 하판상의 불관절 위치는 다음과 같다.

$$B_1 = [E \ 0 \ 0]^T \quad (1)$$

$$B_2 = [0 \ R \ 0]^T \quad (2)$$

$$B_3 = [0 \ -R \ 0]^T \quad (3)$$

xyz 좌표계에 대한 상판상의 불관절 위치는 다음과 같다.

$$b_1 = [r \ r \ 0]^T \quad (4)$$

$$b_2 = [0 \ r \ 0]^T \quad (5)$$

$$b_3 = [0 \ -r \ 0]^T \quad (6)$$

$$b_4 = [r \ -r \ 0]^T \quad (7)$$

또 하판에 대한 상판의 운동을 완전히 기술하기 위해서는 이동좌표계의 위치(position)를 나타내는 3 개의 병진변위와 자세(orientation)를 나타내는 3 개의 회전변위, 즉 6 개의 독립된 변수들이 필요하다. 상판 중심{C}의 위치벡터는 $[x_c \ y_c \ z_c]^T$ 로 표시한다. 상판의 회전운동은 케이싱 오실레이터에 장착된 케이싱이 하판의 중심{O}에 고정되어 회전하는 것과 같게 방향을 표현하기 위하여 X, Y, Z 축을 중심으로 한 각각의 회전에 대해 롤-피치-요각(ϕ, θ, ψ)을 이용하여 아래와 같은 회전행렬로 표시한다.

$$R = \begin{bmatrix} c\phi c\theta & c\phi s\theta s\varphi - s\phi c\varphi & c\phi s\theta c\varphi + s\phi s\varphi \\ s\phi c\theta & s\phi s\theta s\varphi + c\phi c\varphi & s\phi s\theta c\varphi - c\phi s\varphi \\ -s\theta & c\theta s\varphi & c\theta c\varphi \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서 $c\alpha = \cos \alpha$, $s\alpha = \sin \alpha$ ($\alpha = \phi, \theta, \varphi$)이다.

2.2 자유도 해석

케이싱 오실레이터의 자유도는 공간운동을 하는 기구의 자유도 판별식에 의해 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i - f_0 \quad (9)$$

$$= 6(14 - 17 - 1) + 31 - 3 = 4$$

여기서 F는 기구의 자유도, λ 는 기구부가 작동

하는 공간의 자유도, n은 하판을 포함한 링크들의 수, j는 관절의 수, f_i 는 i번째 관절의 자유도이고, f_0 는 여자유도의 수이다. 따라서 본 논문에서 제시된 케이싱 오실레이터는 피칭(pitching), 롤링(rolling), 요잉(yawing)의 회전운동과 Z 축 병진운동 4 자유도를 가진다. 이는 케이싱 l_i 가 하판의 중심 {O}에 구속되기 때문에 X, Y 축 병진운동이 물리적으로 불가능함을 의미한다.

3. 역기구학 해석

역기구학 문제는 주어진 상판의 위치와 자세로부터 작동기의 길이를 결정하는 문제이다. 회전행렬을 이용하여 작동기들의 길이를 벡터식으로 표현하면 다음과 같다.⁽⁶⁾

$$l_i = \sqrt{(C + Rb_i - B_i) \cdot (C + Rb_i - B_i)} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (10)$$

$$l_5 = \sqrt{(A - E) \cdot (A - E)} \quad (11)$$

입력인 상판의 위치와 자세에 관한 변수는 4 개인데 반해 출력인 각 작동기의 길이는 5 개이므로

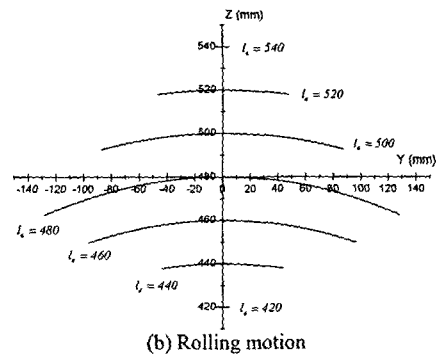
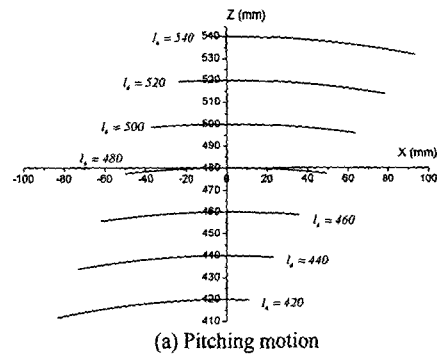


Fig. 3 Positional workspace

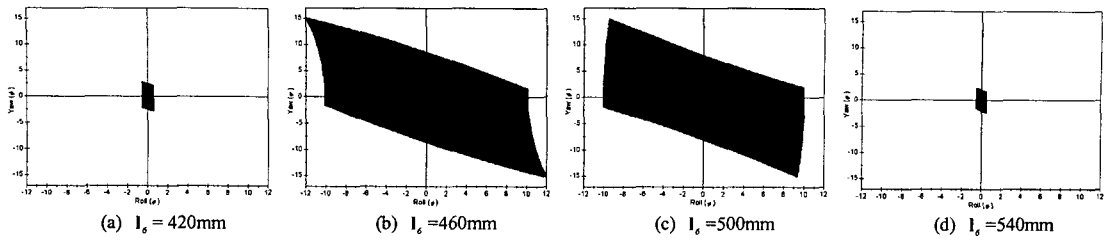


Fig. 4 Orientational workspace at $\theta = 0^\circ$

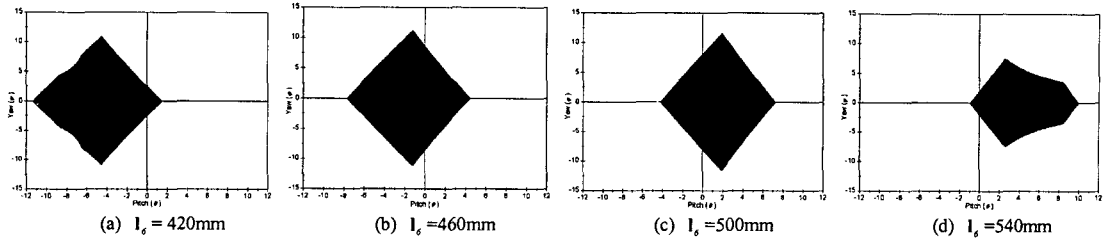


Fig. 5 Orientational workspace at $\varphi = 0^\circ$

식 (10), (11)은 무한히 많은 해를 가진다.

작업전 케이싱 오실레이터는 요구되는 방향으로 케이싱을 압입하기 위하여 $I_1 \sim I_4$ 만의 구동에 의해 자세를 잡는다. 그리고 작업이 시작되면 I_1, I_2 는 각기 반대 방향으로 구동하면서 상판에 요운동을 일으킨다. 이때 기구의 특성상 발생하는 상판의 미소 롤운동은 I_2 와 I_3 의 구동에 의해 보상되고, 피치운동은 I_1 의 구동에 의해 보상되기 때문에 케이싱이 항상 일정한 방향으로 압입될 수 있다. 또한 케이싱이 상판에 항상 수직으로 고정되어 있으므로 x, y 축 병진운동이 회전운동에 구속될 수 있다. 따라서 케이싱 오실레이터의 동작 특성을 고려할 때, 초기 자세를 잡기 위해 필요한 역기구학식이 비록 무한개의 해를 가진다 하더라도 초기 I_1 의 위치를, 피치 운동이 가장 크게 발생할 수 있는 구동범위의 중간위치에 둬으로써 유일한 역기구학 해를 구할 수 있다.

4. 작업공간 해석

작업 공간의 한계는 각 작동기들과 그것들을 연결하는 각 관절들의 작동한계에 의해 결정되며, 이것은 케이싱 오실레이터의 성능과 직결된다. 실험 장치에 사용되어진 장치들의 물리적인 한계 값들과 기준값들이 Table 1에 요약되어 있다.

작업공간은 위치(position) 작업공간과 자세(orientation) 작업공간으로 각각 분리할 수 있으며, 역기구학 해석을 이용하여 분석하였다.

Fig. 3 은 상판이 Z 축으로 병진 운동하였을 때

변하는 케이싱 I_1 의 길이에 따른 케이싱 오실레이터의 위치 작업공간의 크기를 나타낸다. 위치 작업공간이 가장 크게 나타나는 부분은 각 작동기의 위치가 총 작동거리의 중간지점인 중립위치에 위치한 경우이다. 피치운동의 경우, 작업범위는 100mm 정도로 일정하나 작업위치의 변화에 따라 그 구간이 달라진다. 롤운동의 경우, 중립위치에서의 작업범위는 대략 300mm 로 가장 크게 나타나는 반면 작업위치가 중간위치에서 상승하거나 하강하는 경우, 각 링크 및 조인트들이 가지는 기구적인 한계에 의해 작업공간이 좁아지며, 이로 인하여 작업이 더 어려워진다.

Fig. 4 는 피치 운동이 없는 경우, 롤-요 운동에 대한 자세 작업공간을 나타낸다. 중립위치 근처에서 20~25° 의 롤운동과 20° 정도의 요운동이 가능하다. 또한 작업위치 변화에 따라 작업범위가 급격히 감소하며, 이는 케이싱에 가해지는 요동과 회전이 거의 없음을 의미한다. 이는 각 작동기가 작동한계 근처에 위치함에 따라 케이싱 오실레이터의 조작성(manipulability)가 감소하기 때문이다.

Fig. 5 는 롤 운동이 없는 경우, 피치-요 운동에 대한 자세 작업공간을 나타낸다. 작업위치의 변화에 거의 무관하게 최대 10~15° 의 피치 운동과 20~25° 의 요 운동을 할 수 있는 반면 작업구간은 변한다. 또한 모든 작동기가 작동범위 한계에 근접했을 경우 기구의 형상에 의한 영향으로 작업구간의 모양이 달라짐(움푹 들어간 부분)을 보여준다.

Table 1 Design parameter of the Casing Oscillator

actuator	length limit (mm)	
	min.	max.
l_1	673.3	773.3
l_2	417.5	542.5
l_3	417.5	542.5
l_4	673.3	773.3
l_5	487.5	612.2
joint	limit of moving angle	
b_1, b_2, b_3, b_4	$\pm 20^\circ$	
B_1, B_2, B_3	$\pm 20^\circ$	
upper platform	length (mm)	
r	250	
bottom platform	length (mm)	
R	250	
A	250	

따라서 케이싱 오실레이터의 작업공간은 최초 작업위치에 따라 그 크기와 위치가 변함을 알 수 있으며, 작업자는 이와 같은 작업공간을 고려하여 작업을 수행하여야 한다.

5. 자코비안 행렬 유도

케이싱 오실레이터는 l_i 작동에 의하여 1 자유도 여유구동(redundant)을 하는 병렬형 매니플레이터의 구조이다. 여유구동하는 메커니즘의 자코비안 행렬 유도는 난해할 뿐만 아니라 정방행렬이 아니기 때문에 행렬 연산을 어렵게 한다. 따라서 역기구학 해석과 마찬가지로 케이싱 오실레이터의 동작특성과 작업효율을 고려하여 l_i 를 작동범위의 중립 위치에 둬으로써 자코비안 행렬 유도를 쉽게 할 수 있다.

병렬형 매니플레이터의 자코비안 행렬은 작동기의 관절공간 속도와 상판의 작업공간 속도를 관계시키는 선형연산자로서 속도 입출력 특성을 나타내는 기구의 기구학적 영향계수이다.

여유구동을 배제하였으므로 l_i 는 고정되어 있다고 가정하고 $l_1 \sim l_5$ 에 의한 자코비안 행렬을 유도한다. 이러한 가정은 스투워트 플랫폼(stewart platform)과 같이 모든 작동기가 하판상에 고정되어 있는 구조를 가지게 하므로, Plücker 좌표행렬을 사용하여 자코비안 행렬을 쉽게 유도할 수 있다.⁽⁷⁾ 먼저 작동기의 길이를 나타내는 벡터식들을 미분하면

$$\dot{l}_i = \dot{C} + \omega \times b, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (12)$$

이다. $\dot{C} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T \equiv \mathbf{V}_c$ 와 $\omega = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T \equiv \omega_c$ 는 각각 기준좌표계에 대한 이동좌표계의 선속도 벡터와 각속도벡터를 의미한다. 따라서 상판의 출력 속도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_c \\ \omega_c \end{bmatrix} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T \quad (13)$$

식 (10)와 (12)를 dot product 하면

$$l_i \cdot \dot{l}_i = l_i \cdot \mathbf{V}_c + (b_i \times l_i) \cdot \omega_c \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (14)$$

이다. 식 (14)를 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{J}_s \dot{L} = \mathbf{J}_s \dot{U} \quad (15)$$

여기서

$$\mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} \dot{l}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{l}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{l}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{l}_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} l_1^T & (b_1 \times l_1)^T \\ l_2^T & (b_2 \times l_2)^T \\ l_3^T & (b_3 \times l_3)^T \\ l_4^T & (b_4 \times l_4)^T \end{bmatrix}, \quad \dot{L} = \begin{bmatrix} \dot{l}_1 \\ \dot{l}_2 \\ \dot{l}_3 \\ \dot{l}_4 \end{bmatrix}$$

이고 \wedge 은 각 작동기의 길이를 나타내며 스칼라임을 나타낸다. $\mathbf{J}_s \in \mathbf{R}^{4 \times 4}$, $\mathbf{J}_s \in \mathbf{R}^{4 \times 6}$ 은 각각 순자코비안 행렬(forward Jacobian)과 역자코비안 행렬(inverse Jacobian)이다.⁽¹¹⁾ 식 (15)는 얻고자 하는 입력속도에 대해서 이를 만족하는 출력속도가 다수개 존재하며, 행렬 \mathbf{J}_s 의 역행렬 또한 구할 수 없다. 그러나 케이싱은 상판과 항상 수직을 이루며 움직이므로 다음과 같이 2 개의 구속방정식을 유도할 수 있다.

$$\dot{x} = -y \omega_z + z \omega_y, \quad (16)$$

$$\dot{y} = x \omega_z - z \omega_x, \quad (17)$$

식(16), (17)을 식 (14)에 대입하여 정리하면 식 (15)는 다음과 같이 다시 유도된다.

$$\mathbf{J}_s \dot{L} = \mathbf{J}_s \dot{U}, \quad (18)$$

여기서

$$\mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} l_{1x} & -l_{1y}z + (b_1 \times l_1)_x & l_{1y}x + (b_1 \times l_1)_y & -l_{1z}y + l_{1y}x + (b_1 \times l_1)_z \\ l_{2x} & -l_{2y}z + (b_2 \times l_2)_x & l_{2y}x + (b_2 \times l_2)_y & -l_{2z}y + l_{2y}x + (b_2 \times l_2)_z \\ l_{3x} & -l_{3y}z + (b_3 \times l_3)_x & l_{3y}x + (b_3 \times l_3)_y & -l_{3z}y + l_{3y}x + (b_3 \times l_3)_z \\ l_{4x} & -l_{4y}z + (b_4 \times l_4)_x & l_{4y}x + (b_4 \times l_4)_y & -l_{4z}y + l_{4y}x + (b_4 \times l_4)_z \end{bmatrix}$$

$$\dot{U}_s = [\dot{z} \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$$

이고, $J_{i_s} \in R^{3 \times 3}$ 는 정방행렬이다. 아래첨자 x, y, z 는 x, y, z 축과 관련되는 벡터 성분임을 의미한다. 따라서 케이싱 오실레이터의 관절에서 상판으로의 속도 전달 관계는 다음과 같다.

$$\dot{U}_s = (J_{i_s}^{-1} J_s) \dot{L} = J_s \dot{L} \quad (19)$$

여기서 J_s 는 자코비안 행렬을 의미한다.

6. 특이점 해석 1: 수치해석적 방법

Gosselin 과 Angeles 는 특이점을 찾는 수치해석적 방법을 제시한 바 있다. 특이점은 기구의 자유도가 늘어 제어가 불가능한 상태로 자코비안 행렬식이 "0"이 되는 경우 즉, 입력변수(관절속도)와 출력변수(상판의 선/각속도)의 관계가 완전히 정의되지 못하는 경우로 정의할 수 있으며, 케이싱 오실레이터의 특이점은 다음과 같은 경우에서 찾을 수 있다.

$$\det[J_s] = \det[J_{i_s}^{-1} J_s] = \det[J_{i_s}^{-1}] \det[J_s] = 0 \quad (20)$$

$\det[J_s]$ 의 경우, J_s 는 각 작동기의 길이를 대각 성분으로 하는 대각행렬이며 작동기의 길이가 "0"이 되는 경우는 발생할 수 없으므로 $\det[J_s] \neq 0$ 이다. 따라서 $\det[J_{i_s}^{-1}] = 0$ 인 경우를 케이싱 오실레이

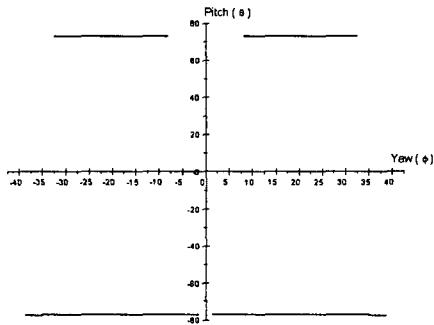


Fig. 6 The singularities of the Casing Oscillator at $\theta = 0^\circ$

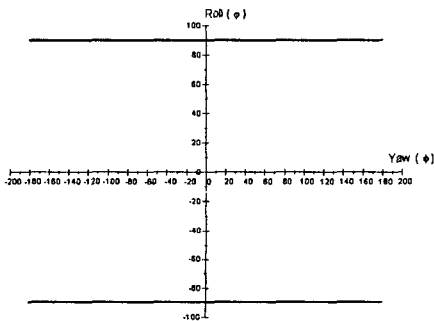


Fig. 7 The singularities of the Casing Oscillator at $\phi = 0^\circ$

터의 특이점으로 고려할 수 있다. 여기서 $\det[J_{i_s}]$ 가 "0"이면 $J_{i_s}^{-1}$ 이 존재하지 않으며, 상판의 속도를 각 작동기의 속도로 변환할 수 없으므로 다음 식을 이용하여 특이점을 찾을 수 있다.

$$\det[J_{i_s}] = 0 \quad (21)$$

Fig. 6, 7 은 각각 위의 식을 이용하여 $\theta = 0^\circ$ 와 $\phi = 0^\circ$ 인 경우에 대해서 특이점 해석을 수행한 결과이다. 자코비안 행렬이 여러 변수로 이루어져 있기 때문에 발생하는 전산 부하를 줄이고 그 결과를 쉽게 가시화하기 위해 두 부분으로 나눠 해석하였다.

케이싱 오실레이터의 특이점은 요 운동에는 큰 영향을 받지 않고 롤과 피치 운동이 각각 $\pm 90^\circ$ 와 $\pm 75^\circ$ 에서 나타난다. 이는 케이싱의 길이가 480mm 인 경우 즉, 작업공간이 가장 크게 나타나는 경우에 대해서 분석한 결과이며, 케이싱의 길이를 작동구간 420mm 에서 520mm 까지 변화시키더라도 특이점 분포가 거의 변화가 없이 일치한다.

수치해석적 방법으로 특이점 해석을 수행한 결과를 통해 특이점들이 이루는 궤적은 케이싱 오실레이터의 작업공간 밖에 존재함을 알 수 있다.

7. 힘 모멘트 평형식 유도

수치해석적 방법을 통해 특이형상에 관한 정보를 얻는다 하더라도 그에 대한 물리적 의미를 찾는 데 한계가 있다. 이 장은 케이싱 오실레이터의 특이형상을 기하학적으로 찾고 그에 대한 물리적 정보를 얻기 위해 상판에 부과되는 힘과 모멘트를 독립적으로 분리하여 정적 평형방정식을 유도한다. 이때 외부의 힘 F_c 와 모멘트 M_c 는 케이싱과 각 작동기에 의해서 지지되어야 한다.

7.1 모멘트 평형방정식

상판에 작용하는 외부의 모든 모멘트를 XYZ 좌표계의 원점 {O}에 대한 평형식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} d_1 \times f_1 \cdot u_1 + d_2 \times f_2 \cdot u_2 + d_3 \times f_3 \cdot u_3 \\ + d_4 \times f_4 \cdot u_4 + M_o = d_c \times F_c + M_c \end{aligned} \quad (22)$$

여기서 $f_i (i=1, 2, 3, 4)$ 는 각 작동기의 힘으로 스칼라 양이며, $u_i (i=1, 2, 3, 4)$ 는 각 작동기의 단위벡터이고, $d_i (i=1, 2, 3, 4)$ 와 d_c 는 {O}에서 각각 볼관절 $b_i (i=1, 2, 3, 4)$ 와 {C}까지의 거리벡터이다. 또한 M_o 는 케이싱이 지지하는 모멘트를, F_c 와 M_c

는 상판에 작용하는 외부 힘과 모멘트를 의미하며, 다음과 같이 나타내어 진다.

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{C} + \mathbf{R} \mathbf{b}_i \equiv [d_{ix} \ d_{iy} \ d_{iz}]^T \quad (i=1,2,3,4) \quad (23)$$

$$\mathbf{u}_i = \frac{l_i}{\hat{l}_i} = \frac{l}{\hat{l}} (\mathbf{d}_i - \mathbf{B}_i) \quad (i=1,2,3,4) \quad (24)$$

$$\mathbf{d}_c = [x_c \ y_c \ z_c]^T \quad (25)$$

$$\mathbf{F}_c = [F_{cx} \ F_{cy} \ F_{cz}]^T \quad (26)$$

$$\mathbf{M}_c = [M_{cx} \ M_{cy} \ M_{cz}]^T \quad (27)$$

케이싱 오실레이터에 장착된 케이싱은 {O}를 중심으로 볼 관절과 같은 3 자유도 운동이 가능하므로 외부 모멘트에 대한 지지력을 갖지 못한다. ($\mathbf{M}_o = 0$) 따라서 외부 힘에 의한 모멘트 $\mathbf{d}_c \times \mathbf{F}_c$ 와 상판에 작용하는 모멘트 \mathbf{M}_c 는 모두 각 작동기들에 의해 지지 되어야 한다. 외부에서 상판에 작용하는 모든 모멘트를 $\mathbf{d}_c \times \mathbf{F}_c + \mathbf{M}_c \equiv \mathbf{M}_\varepsilon$ 라 정의하면 식 (22)는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$f_1 \cdot (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{u}_1) + f_2 \cdot (\mathbf{d}_2 \times \mathbf{u}_2) + f_3 \cdot (\mathbf{d}_3 \times \mathbf{u}_3) + f_4 \cdot (\mathbf{d}_4 \times \mathbf{u}_4) = \mathbf{M}_\varepsilon \quad (28)$$

여기서

$$\mathbf{d}_1 \times \mathbf{u}_1 = [0 \ -Ed_{1x} \ Ed_{1y}]^T / \hat{l}_1$$

$$\mathbf{d}_2 \times \mathbf{u}_2 = [B_2 d_{2x} \ 0 \ -B_2 d_{2y}]^T / \hat{l}_2$$

$$\mathbf{d}_3 \times \mathbf{u}_3 = [B_3 d_{3x} \ 0 \ -B_3 d_{3y}]^T / \hat{l}_3$$

$$\mathbf{d}_4 \times \mathbf{u}_4 = [0 \ -Ed_{4x} \ Ed_{4y}]^T / \hat{l}_4$$

$$\mathbf{M}_\varepsilon \equiv [M_\varepsilon \ M_\varepsilon \ M_\varepsilon]^T$$

각각의 작동기들이 \mathbf{M}_ε 에 대한 지지력을 갖지 못하는 경우를 특이형상이라 할 수 있다. XYZ 좌표계의 각축을 중심으로 한 케이싱의 회전방향을 n_i ($i=1,2,3$) 라 정의하면, 특이형상에 대한 모멘트 평형식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$n_1 \cdot \{f_1 \cdot (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{u}_1) + f_2 \cdot (\mathbf{d}_2 \times \mathbf{u}_2) + f_3 \cdot (\mathbf{d}_3 \times \mathbf{u}_3) + f_4 \cdot (\mathbf{d}_4 \times \mathbf{u}_4)\} = 0 \quad (29)$$

식 (29)는 각 작동기의 힘에 의한 모멘트 합이 케이싱의 회전방향에 대한 성분을 갖지 못한 경우이다. 이를 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{S}_M \cdot \mathbf{f} = 0 \quad (30)$$

여기서

$$\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4]^T$$

$$\mathbf{S}_M = \begin{bmatrix} n_1 \cdot (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{u}_1) & n_1 \cdot (\mathbf{d}_2 \times \mathbf{u}_2) & n_1 \cdot (\mathbf{d}_3 \times \mathbf{u}_3) & n_1 \cdot (\mathbf{d}_4 \times \mathbf{u}_4) \\ n_2 \cdot (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{u}_1) & n_2 \cdot (\mathbf{d}_2 \times \mathbf{u}_2) & n_2 \cdot (\mathbf{d}_3 \times \mathbf{u}_3) & n_2 \cdot (\mathbf{d}_4 \times \mathbf{u}_4) \\ n_3 \cdot (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{u}_1) & n_3 \cdot (\mathbf{d}_2 \times \mathbf{u}_2) & n_3 \cdot (\mathbf{d}_3 \times \mathbf{u}_3) & n_3 \cdot (\mathbf{d}_4 \times \mathbf{u}_4) \end{bmatrix}$$

7.2 힘 평형방정식

상판에 작용하는 외부의 모든 힘을 XYZ 좌표계의 원점 {O}에 대한 평형식으로 나타내면 다음과 같다.

$$f_1 \mathbf{u}_1 + f_2 \mathbf{u}_2 + f_3 \mathbf{u}_3 + f_4 \mathbf{u}_4 + \mathbf{F}_o = \mathbf{F}_c \quad (31)$$

여기서 \mathbf{F}_o 는 케이싱이 지지하는 반력을 의미한다. 상판에 장착된 케이싱은 상판과 항상 수직을 이루기 때문에 상판의 x, y 축 병진운동을 구속한다. 따라서 x, y 방향의 지지력은 존재하나 z 축 방향 즉, 상판에 수직인 방향으로 케이싱이 지지력을 갖지 못한다. 따라서 z 축 병진운동에 대한 지지력은 각 링크에 의해 지지 되어야 하고, 이때의 병진운동 방향을 n_4 라 정의하면 특이형상에 대한 힘 평형식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$n_4 \cdot \{f_1 \mathbf{u}_1 + f_2 \mathbf{u}_2 + f_3 \mathbf{u}_3 + f_4 \mathbf{u}_4\} = 0 \quad (32)$$

위 식은 케이싱의 z 축 병진방향에 대한 성분을 각 작동기의 합력이 갖지 못함을 의미하며, 행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{S}_F \cdot \mathbf{f} = 0 \quad (33)$$

여기서

$$\mathbf{S}_F = [n_4 \cdot \mathbf{u}_1 \ n_4 \cdot \mathbf{u}_2 \ n_4 \cdot \mathbf{u}_3 \ n_4 \cdot \mathbf{u}_4]$$

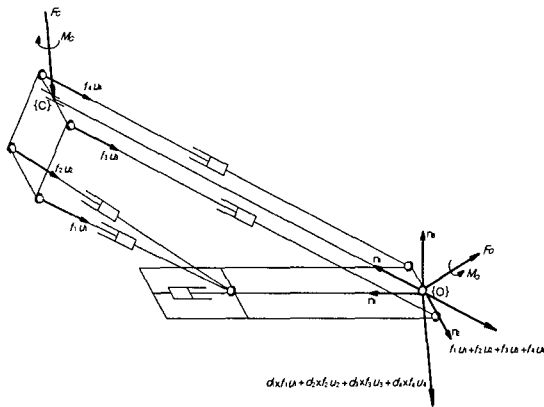
8. 특이점 해석 2: 기하학적 방법

상판에 작용하는 케이싱의 운동방향에 대한 외부 힘과 모멘트는 각 작동기에 의해 지지되어야 하며 그렇지 못할 경우를 케이싱 오실레이터의 특이형상으로 정의할 수 있다.

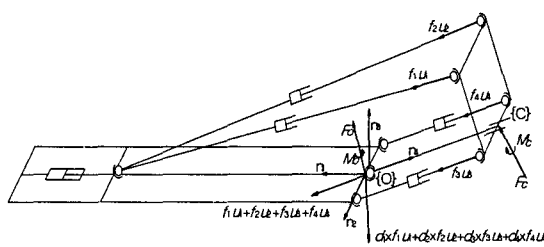
힘 모멘트 평형식 (28), (31)은 작동기의 힘 f_i ($i=1,2,3,4$) 에 대해서 동시에 만족되어야 하므로 행렬로 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} n_4 \cdot \mathbf{F}_c \\ \mathbf{M}_\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_4 \cdot \mathbf{u}_1 & n_4 \cdot \mathbf{u}_2 & n_4 \cdot \mathbf{u}_3 & n_4 \cdot \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{d}_1 \times \mathbf{u}_1 & \mathbf{d}_2 \times \mathbf{u}_2 & \mathbf{d}_3 \times \mathbf{u}_3 & \mathbf{d}_4 \times \mathbf{u}_4 \end{bmatrix} \mathbf{f} \equiv \mathbf{S} \cdot \mathbf{f} \quad (34)$$

여기서 $\mathbf{f} \neq 0$ 이면서 위 식을 만족시킬 조건은



(a) $\theta = 75^\circ, \varphi = 0^\circ$



(b) $\theta = -75^\circ, \varphi = 0^\circ$

Fig. 8 The singular configuration of the Casing Oscillator at $\varphi = 0^\circ$

$$\det[S] = 0 \quad (35)$$

이다. 여기서 s 는 상판에 가해지는 외부 힘, 모멘트와 각 작동기들에 의해 지지되는 힘을 관계시키는 행렬이다. 이 결과는 앞에서 유도한 자코비안 행렬식 $\det[J_w] = 0$ 과 일치한다. 따라서 특이형상은 작업공간에서는 나타나지 않는다.

식 (35)는 특이형상에 대한 평형식 (29), (32)가 하나라도 만족되는 경우를 의미한다. 식 (29)는 각 작동기들에 의한 모멘트 합력이 케이싱의 회전방향에 수직함을 의미하며, 식 (32)는 각 작동기들의 합력이 케이싱의 병진방향에 수직함을 의미한다. 케이싱은 상판에 항상 수직으로 구속되어 있으므로 식 (32)를 만족하는 경우는 일어나지 않는다. 따라서 케이싱 오실레이터의 특이형상은 식 (29)를 만족하는 경우로 한정할 수 있다. Fig. 8 과 Fig. 9는 n_1 과 n_2 가 이루는 평면에 작동기들의 모멘트 합력이 수직인 경우를 고려하여 기하학적 해석을 수행한 결과이다. Fig. 8은 각 작동기들이 상판에 거의 수직으로 위치한 경우에 나타나는 특이형상이며, 케이싱을 중심으로 회전운동이 불가능한

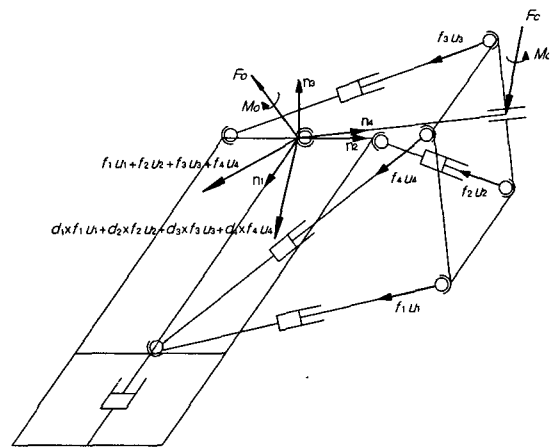


Fig. 9 The singular configuration of the Casing Oscillator at $\theta = 0^\circ (\varphi = \pm 90^\circ)$

경우이다. Fig. 9는 케이싱이 $n_1, -n_1$ 가 이루는 평면에 수직할 때 나타나는 특이형상이다. 이러한 특이형상들은 작업공간에서 멀리 떨어져 있고, 실제 기구에서 발생할 수 없는 공간에 나타난다. 따라서 케이싱 오실레이터는 특이점 문제로부터 구속 받지 않는다.

9. 결론

본 논문은 케이싱 오실레이터의 자코비안 행렬을 유도하고, 수치해석적 방법과 기하학적 방법으로 특이점과 그 형상을 분석했다. 여유구동하는 병렬형 매니플레이터의 구조를 가짐에도 불구하고 기구의 동작특성과 관계되는 구속조건을 이용하여 역기구학의 유일해와 정방행렬의 자코비안 행렬 유도를 용이하게 했다.

특이점은 자코비안 행렬식이 "0"이 되는 점에서 나타나며, 요각 ϕ 의 변화에는 거의 무관하고, 롤각 φ 과 피치각 θ 가 각각 $\pm 90^\circ$ 와 $\pm 75^\circ$ 에 근접했을 때 나타났다. 이들은 모두 케이싱 오실레이터의 작업공간 밖에 존재하며, 실제 기구에서는 발생 불가능한 점들이므로 케이싱 오실레이터는 특이점 문제에 구속을 받지 않는다는 것을 입증했다.

수치해석적 방법인 자코비안 행렬식을 이용하여 특이점을 찾았으나, 자코비안은 여러 관절변수들의 조합으로 이뤄졌기 때문에 특이형상에 대한 물리적 정보를 얻기에는 한계가 있다. 따라서 힘, 모멘트 평형식을 유도하고 기하학적 방법을 이용하여 수치해석적 결과를 입증하였다. 상판에 작용하는 외부 힘 모멘트는 케이싱과 각 작동기들에 의해 지지되어야 하며, 특히 케이싱이 지지력을 갖

지 못하는 z 축 병진 운동 방향과 각축에 대한 모멘트 방향은 각 작동기들에 의해 지지되어야 한다.

특이형상은 케이싱이 지지하지 못하는 성분의 힘과 모멘트를 각 작동기들이 지지하지 못하는 경우에 나타난다. 힘 평형식과 관련된 특이형상은 없으며, 모멘트 평형식과 관련된 특이형상은 각 작동기들이 상판과 수직을 이룰 때와 케이싱이 하판과 거의 평행할 때 즉, 모멘트 방향 벡터의 두 성분이 이루는 평면에 작동기들의 모멘트 합력이 수직을 이룰 때 나타난다. 이는 수치해석적 방법의 결과와 일치했으며 작업공간 내에서는 일어날 수 없는 형상이다. 따라서 케이싱 오실레이터는 병렬기구에 심각한 영향을 주는 특이점 문제로부터 자유로움을 입증했으며, 그에 따른 물리적 의미를 찾았다.

참고문헌

- (1) Rhee E. J., Bae J. M. and Park M. K., 2000, "A Study on the Inverse Kinematic Analysis of a Casing Oscillator," *J. of Kor. Soc. Prec. Eng.*, Vol. 17, No. 12, pp. 47~53.
- (2) Stewart D., 1965, "A Platform with Six Degrees of Freedom," *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol. 180, No. 15, pp. 371~386.
- (3) Long G. L. and Collins C. L., 1992, "A Pantograph Linkage Parallel Platform Master Hand Controller for Force Reflection," *Proc. IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, Vol. 1, pp. 390~395.
- (4) Fichter E. F., 1986, "A Stewart Platform-Based Manipulator: General Theory and Practical Construction," *Int. J. Robot. Res.*, Vol. 5, No. 2, pp. 157~182.
- (5) Gosselin C., 1990, "Determination of the Workspace of 6-dof Parallel Manipulators," *ASME J. Mech. Des.*, Vol. 112, No. 3, pp. 331~336.
- (6) Merlet J. -P., 1994, "Trajectory Verification in the Workspace for Parallel Manipulators," *Int. J. Robot. Res.*, Vol. 13, No. 4, pp. 326~333.
- (7) Gosselin C. and Angeles J., 1990, "Singularity Analysis of Closed-Loop Kinematic Chains," *IEEE Trans. Robot. Automat.*, Vol. 6, No. 3, pp. 281~290.
- (8) Daniali H. R. M., Zsombor-Murray P. J. and Angeles J., 1995, "Singularity Analysis of Planar Parallel Manipulators," *Mech. Mach. Theory*, Vol. 30, No. 5, pp. 665~678.
- (9) Collins C. L. and Long G. L., 1995, "The Singularity Analysis of an In-Parallel Hand Controller for Force-Reflected Teleoperation," *IEEE Trans. Robot. Automat.*, Vol. 11, No. 5, pp. 661~669.
- (10) Romdhane L., Affi Z. and Fayet M., 2002, "Design and Singularity Analysis of a 3-Translational-DOF In-Parallel Manipulator," *ASME J. Mech. Des.*, Vol. 124, pp. 419~426.
- (11) Chablat D. and Ph. Wonger, 1988, "Working Modes and Aspects in Fully Parallel Manipulators," *IEEE Int. Conf. Robot. Automat.*, pp. 1964~1969.