퍼지 및 지능시스템학회 논문지 2004, Vol. 14, No. 2, pp. 178-183

조건부에 시스템 입력만을 사용하는 계층 퍼지 시스템

Hierarchical Fuzzy System with only system variables for IF-part

주문갑*
Moon G. Joo

*부경대학교 전자컴퓨터정보통신공학부

요 약

본 논문에서는 기존의 계층 퍼지 시스템에서 입력 변수로 사용되던 이전 계층의 출력값을 퍼지 규칙의 전건부에서는 사용하지 않고 후건부에서만 사용하는 계층 퍼지 시스템을 제안하였다. 또한 제안된 계층 퍼지 시스템을 구성할 때에, 싱글톤 퍼지화기와 평균 중심법 비퍼지화기를 사용하는 경우에는 시스템 입력 변수의 멤버쉽 함수가 주어진 컴팩트 도메인 내에서 완전하기만 하다면, 임의의 연속 함수에 대하여 그에 해당하는 제안된 형태의 계층 퍼지 시스템이 존재한다는 것을 수학적으로 증명하였다.

Abstract

This paper presents a class of hierarchical fuzzy systems where previous layer outputs are used not in IF-parts, but only in THEN-parts of the fuzzy rules of the current layer. The existence of the proposed hierarchical fuzzy system which approximates a given real continuous function on a compact set is proven if complete fuzzy sets are used in the IF-parts of the fuzzy rules with singleton fuzzifier and center average defuzzifier.

Key words : 계층 퍼지 시스템, Stone-Weierstrass 정리, 존재 증명

1. 서 론

기존의 퍼지 시스템에 있어서 중요한 고려 사항 중 하나는 사용되는 퍼지 규칙의 개수와 그에 따른 계산량을 줄이는 것이다. 실제로, 퍼지 규칙의 개수는 입력 변수의 개수에 대하여 지수 함수적으로 증가하는데, 예를 들어 m개의 멤버쉽 함수를 가진 n개의 입력 변수를 사용하는 퍼지 시스템의 경우, 전체 퍼지 규칙의 개수는 m^n개가 된다.

이 문제를 해결하기 위한 방법 중 하나로서, Raju [1-2]는 그림 1과 같은 계층 퍼지 시스템을 제안하였는데, 이것은 작은 개수의 입력 변수를 가진 퍼지 로직 유닛 (Fuzzy Logic Unit, 이하 FLU)을 계층적으로 연결하되, 이전 계층의 출력을 시스템에 주어진 시스템 입력 변수와 함께 입력 변수로서 사용하는 것이다. 이렇게 만들어진 계층 퍼지 시스템에서는 퍼지 규칙의 개수가 시스템 입력 변수의 개수에 대하여 선형적으로 증가하게 된다. 아래 예의 경우 퍼지 규칙의 개수는 $(n-1)m^2$개이다.

계층 퍼지 시스템은 계층이 많아질수록 전체 퍼지 규칙의 개수가 줄어들게 되지만, 다음 계층에서 사용될 출력에 대한 물리적인 의미를 부여하기가 점점 어려워진다. 학습을 통하여 퍼지 규칙이 자동으로 생성되는 경우에는 더더욱 중간 계층들의 퍼지 규칙들을 사용자가 알 수 없게 되는 경향이 있다. 이 문제를 해결하기 위하여 Joo [3-4]는 이전 계층의 출력을 현재의 퍼지 규칙의 전건부에서는 사용하지 않고, 후건부에서만 적절히 고려하는 방식의 계층 퍼지 제어기를 제안하였다. 이 방식은 계층 퍼지 제어기에 존재하는 모든 FLU에서, 그 의미가 명확한 시스템 입력 변수만을 입력 변수로 사용하게 되므로, 기존의 계층 퍼지 시스템에 비하여 중간 계층의 FLU들에 대하여도 퍼지 규칙을 이해하기가 용이한 이점을 가진다.

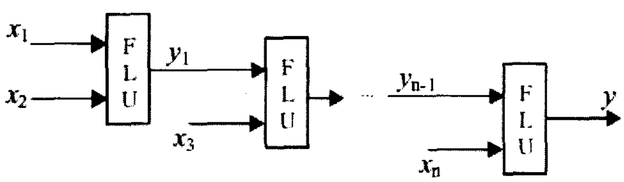

그림 1. 계층 퍼지 시스템.
Fig. 1. Hierarchical fuzzy system.

한편으로는 계층 퍼지 시스템의 수학적인 성질에 대한 연구가 진행되어 왔다. Wang [5-7]은 특수하게 고안된 계층 퍼지 시스템이 컴팩트 도메인 (compact domain) 내에서 주어진 임의의 실연속 함수를 정확하게 근사할 수 있다는 것을 증명하였다. 그 방식에 따르면, k번째 계층에 위치한 FLU의 i번째 퍼지 규칙은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & IF\ x_{N_{k-1}+1}\ is\ A^i_{N_{k-1}+1}\ and \ldots \text{and}\ x_{N_k}\ is\ A^i_{N_k} \\ & \quad \text{and}\ y_{k-1}\ is\ B^i_k \\ & THEN\ y_k\ is\ \sum_{j=0}^{\sigma(k)} q^i_{k_j} (y_{k-1})^j \end{aligned} \tag{1}$$

접수일자 : 2003년 10월 10일
완료일자 : 2004년 4월 7일

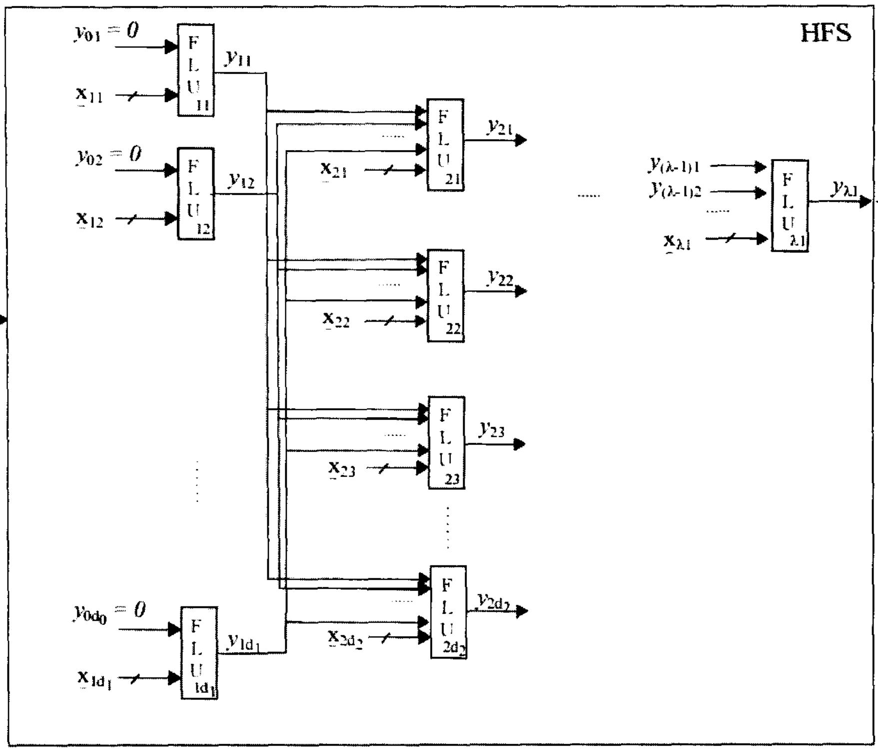

그림 2. 제안된 계층 퍼지 시스템.
Fig. 2. Proposed hierarchical fuzzy system.

여기에서, $N_k = \sum_{l=1}^{k} n_l$이고, n_k는 k번째 계층에서 사용된 입력 변수의 개수, $\sigma(k) = m^{(N_{k-1}-1)} - 1$이고, m은 각각의 입력 변수에 정의된 멤버쉽 함수의 개수, $x_{N_{k-1}+1}, \cdots x_{N_k}$는 입력 변수, y_{k-1}은 $(k-1)$번째 계층의 FLU의 출력, $A^i_{N_{k-1}+1}, \cdots, A^i_{N_k}$와 B^i_k는 퍼지 집합이고, q^i_{kj}들은 실계수를 나타낸다.

Huwendiek [8-10]은 NetFAN (Network of Fuzzy Adaptive Nodes)이라고 명명한 계층 퍼지 시스템을 제안하고, 컴팩트 도메인 상의 임의의 실연속 함수를 정확하게 근사할 수 있는 제안된 계층 퍼지 시스템이 반드시 존재한다는 것을 증명하였다. 여기에서는 사다리꼴의 멤버쉽 함수, 곱추론기 (product inference), 싱글톤 퍼지화기, 평균 중심법 (center average) 비퍼지화기를 사용하였고, 증명은 Stone-Weierstrass 정리를 이용하였다. 그의 방식에 의하면 k번째 계층에 위치한 FLU의 i번째 퍼지 규칙은 다음과 같다.

$$IF\ x_k(1)\ is\ A^i_k(1)\ \text{and}\ x_k(2)\ is\ A^i_k(2)\ and\ \ldots$$
$$\text{and}\ y_{(k-1)1}\ is\ B^i_k(1)\ \text{and}\ y_{(k-1)2}\ is\ B^i_k(2)\ and\ \ldots$$
$$THEN\ y_k\ is\ r^i_k.$$

여기에서 $x_k(\cdot)$와 $y_{(k-1)(\cdot)}$은 Wang의 것과는 달리 여러개의 FLU에서 중복하여 사용될 수 있으며, $A^i_k(\cdot)$와 $B^i_k(\cdot)$는 퍼지 집합이고 r^i_k는 실계수 상수이다.

Joo [4]는 중간 출력을 입력 변수로 사용하지 않는다는 제약을 가한 계층 퍼지 시스템 또한 컴팩트 도메인 상에서 임의로 주어진 실연속 함수를 근사할 수 있는 제안된 계층 퍼지 시스템이 존재한다는 것을 증명하였다. 여기에서는 싱글톤 퍼지화기와 평균 중심법 비퍼지화기를 사용하였고, 입력변수의 멤버쉽 함수의 형태가 완전(complete)하기만 하면 사다리꼴 형태 외에도 다양한 형태의 것을 사용할 수 있었다. 그런데, 제안된 계층 퍼지 시스템은 퍼지 규칙의 후건부가 입력 변수들과 이전 계층의 출력값들을 합한 집합 중에서 2개씩을 각각 서로 곱한 형태를 가지고 있어 기존의 계층 퍼지 시스템에 비하여 후건부가 복잡해지는 단점을 가지고 있다.

본 논문에서는 앞서 설명된 단점을 극복하기 위하여 [4]에서 사용된 것과 같은 구조를 가지되 후건부가 보다 간략해진 계층 퍼지 시스템을 제안한다. 제안된 계층 퍼지 시스템은 후건부에 오직 이전 계층의 출력값들만을 사용하므로 [4]에서 사용된 계층 퍼지 시스템보다 훨씬 간단한 구조를 가지며, 그럼에도 불구하고 여전히 임의의 실연속 함수를 정확하게 근사할 수 있는 계층 퍼지 시스템이 존재함을 증명한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 제안된 계층 퍼지 시스템을 소개하고, 3장에서는 임의로 주어진 연속 함수를 근사하는 계층 퍼지 시스템의 존재에 대한 증명을 보이고, 마지막으로 4장에서 결론을 짓는다.

2. 조건부에 시스템 입력만을 사용하는 계층 퍼지 시스템

$\lambda(\geq 2)$개의 계층을 가진 제안된 계층 퍼지 시스템은 그림 2와 같이 구성된다. 여기에서 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$는 전체 퍼지 시스템에서 사용되는 시스템 입력 변수를 의미하고, $x_{k1}, x_{k2}, \ldots x_{kd_k}$는 $FLU_{k1}, FLU_{k2}, \ldots, FLU_{kd_k}$ 각각에서 사

용되는 입력 변수, $d_1, d_2, \ldots d_\lambda$는 각 계층에서 사용되는 FLU의 개수, $y_{k1}, y_{k2}, \ldots, y_{kd_k}$는 k번째 계층의 FLU들의 출력값, $y_{\lambda 1}$은 전체 계층 퍼지 시스템의 출력을 나타낸다.

본 논문에서 k와 d를 아래첨자로 사용한 변수와 퍼지 집합은 k번째 계층의 d번째 FLU에서 사용된다는 것을 나타낸다. 여기에서 y_0들은 0으로 가정하고, 계층 퍼지 시스템은 피드포워드 (feedforward) 형태라는 것을 전제로 한다.

$n_{kd}(< n)$개의 시스템 변수를 사용한 $k(1 \le k \le \lambda)$번째 계층의 $d(1 \le d \le d_k)$번째 FLU의 $i(1 \le i \le I_{kd})$번째 퍼지 규칙은 다음과 같이 정의된다.

$$IF\ x_{kd}(1)\ is\ A^i_{kd}(1)\ \text{and} \ldots \text{and}\ x_{kd}(n_{kd})\ is\ A^i_{kd}(n_{kd})$$
$$THEN\ y_{kd}\ is$$
$$\sum_{j=1}^{d_{k-1}} p^i_{kd}(j)\, y_{(k-1)j} + r^i_{kd} + \sum_{(u,v)\in C_{d_{k-1},2}} w^i_{kd}(u,v)\, y_{(k-1)u} y_{(k-1)v} \tag{2}$$

여기에서 $\underline{x}_{kd} = (x_{kd}(1), x_{kd}(2), \ldots, x_{kd}(n_{kd}))$로서 $\underline{x}_{kd}$의 모든 원소는 $\underline{x}$에 속한다. $p^i_{kd}(j), w^i_{kd}(u,v), r^i_{kd}$는 후건부에서 사용되는 계수, $A^i_{kd}(1), A^i_{kd}(2), \ldots, A^i_{kd}(n_{kd})$는 입력 퍼지 집합이며, $C_{d_{k-1},2}$는 d_{k-1}개의 $y_{(k-1)j}$ 중에서 2개의 원소를 선택하는 조합을 의미한다.

식 (2)의 퍼지 규칙에서 보여지듯이, 제안된 계층 퍼지 시스템은 퍼지 규칙의 전건부에 이전 계층의 출력인 $y_{(k-1)j}$를 사용하지 않으며, 후건부에서는 시스템 입력 변수들을 사용하지 않는다.

다음과 같이 수식을 정의하자.

$$\alpha_{kd}(u,v) = \frac{\sum_{i=1}^{I_{kd}} \mu^i(\underline{x}_{kd})\, w^i_{kd}(u,v)}{\sum_{i=1}^{I_{kd}} \mu^i(\underline{x}_{kd})},$$
$$\beta_{kd}(j) = \frac{\sum_{i=1}^{I_{kd}} \mu^i(\underline{x}_{kd})\, p^i_{kd}(j)}{\sum_{i=1}^{I_{kd}} \mu^i(\underline{x}_{kd})}, \tag{3}$$
$$\gamma_{kd} = \frac{\sum_{i=1}^{I_{kd}} \mu^i(\underline{x}_{kd})\, r^i_{kd}}{\sum_{i=1}^{I_{kd}} \mu^i(\underline{x}_{kd})},$$

식 (3)에서 $I_{kd} = \Pi_{j=1}^{n_{kd}} m_{kd}(j)$이고, $m_{kd}(j)$는 $x_{kd}(j)$에 정의된 멤버쉽 함수의 개수이다. $\mu^i(\underline{x}_{kd})$는 i번째 퍼지 규칙에 대한 적합도로서 다음과 같이 계산된다.

$product-inference$:
$$\mu^i(\underline{x}_{kd}) = \Pi_{j=1}^{n_{kd}} \mu^i_{A_{kd}(j)}(x_{kd}(j)) \tag{4}$$
$\min-inference$:
$$\mu^i(\underline{x}_{kd}) = min\{\mu^i_{A_{kd}(1)}(x_{kd}(1)), \ldots, \mu^i_{A_{kd}(n_{kd})}(x_{kd}(n_{kd}))\}$$

싱글톤 퍼지화기 (singleton fuzzifier)와, 평균 중심법 비퍼지화기 (center average defuzzifier) 및 (3)식을 이용하면, 각 계층에서의 FLU의 출력값은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
y_{kd} &= \frac{\sum_{i=1}^{I_{kd}} \mu^i(\underline{x}_{kd}) \sum_{j=1}^{d_{k-1}} p^i_{kd}(j)\, y_{(k-1)j}}{\sum_{i=1}^{I_{kd}} \mu^i(\underline{x}_{kd})} + \frac{\sum_{i=1}^{I_{kd}} \mu^i(\underline{x}_{kd}) \sum_{(u,v)} w^i_{kd} y_{(k-1)u} y_{(k-1)v}}{\sum_{i=1}^{I_{kd}} \mu^i(\underline{x}_{kd})} + \frac{\sum_{i=1}^{I_{kd}} \mu^i(\underline{x}_{kd})\, r^i_{kd}}{\sum_{i=1}^{I_{kd}} \mu^i(\underline{x}_{kd})} \\
&= \sum_{j=1}^{d_{k-1}} y_{(k-1)j} \frac{\sum_{i=1}^{I_{kd}} \mu^i(\underline{x}_{kd}) p^i_{kd}(j)}{\sum_{i=1}^{I_{kd}} \mu^i(\underline{x}_{kd})} + \sum_{(u,v)} y_{(k-1)u} y_{(k-1)v} \frac{\sum_{i=1}^{I_{kd}} \mu^i(\underline{x}_{kd}) w^i_{kd}(u,v)}{\sum_{i=1}^{I_{kd}} \mu^i(\underline{x}_{kd})} + \frac{\sum_{i=1}^{I_{kd}} \mu^i(\underline{x}_{kd})\, r^i_{kd}}{\sum_{i=1}^{I_{kd}} \mu^i(\underline{x}_{kd})} \\
&= \sum_{j=1}^{d_{k-1}} y_{(k-1)j} \beta_{kd}(j) + \sum_{(u,v)} y_{(k-1)u} y_{(k-1)v} \alpha_{kd}(u,v) + \gamma_{kd}.
\end{aligned} \tag{5}$$

식 (5)에서 보듯이 y_{kd}는 $y_{(k-1)(\cdot)}$들의 합과 곱으로 이루어지는데, 이것들은 다시 시스템 입력에 의하여 정해지는 $\beta_{kd}(\cdot)$와 $\alpha_{kd}(\cdot,\cdot)$로 곱해진다. γ_{kd}는 $y_{(k-1)(\cdot)}$과는 무관한 항이다.

3. 제안된 HFS의 존재 증명

이제 컴팩트 도메인 상에서 임의로 주어진 실연속 함수에 대하여 그에 해당되는 제안된 HFS가 반드시 존재함을 증명하고자 한다. 본 논문에서의 증명은 삼각형, 사다리꼴, 가우시안 등의 멤버쉽 함수에 대하여 성립되는데, Huwendiek [8, 9, 10]의 증명에서는 삼각형 멤버쉽 함수에 대하여만 증명이 성립하였다. 증명은 Stone-Weierstrass 정리를 사용한다.

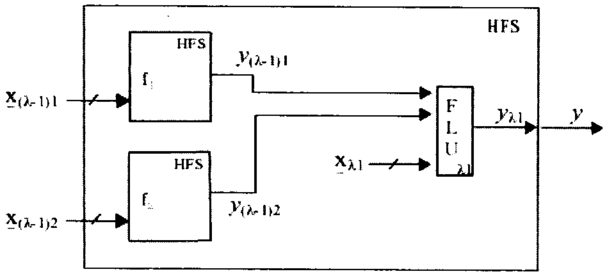

그림 3. 보조정리 1과 2를 위한 계층 퍼지 시스템.
Fig. 3. Hierarchical fuzzy system for Lemma 1 and 3

Stone-Weierstrass 정리 [11] Let $\boldsymbol{Z}$ be a set of real continuous functions on a compact set $\boldsymbol{X}$. If (1) $\boldsymbol{Z}$ is an algebra, that is, set $\boldsymbol{Z}$ is closed under addition, multiplication, and scalar multiplication; (2) $\boldsymbol{Z}$ vanishes at no point of $\boldsymbol{X}$, that is, for each $x \in \boldsymbol{X}$ there is an $f \in \boldsymbol{Z}$ such that $f(x) \neq 0$; (3) $\boldsymbol{Z}$ separates points on $\boldsymbol{X}$, that is, for every $x, x' \in \boldsymbol{X}, x \neq x'$, ther is an $f \in \boldsymbol{Z}$ such that $f(x) \neq f(x')$; then the uniform closure of $\boldsymbol{Z}$ consists of all real continuous functions on X.

본 논문에서 $\boldsymbol{F}$는 제안된 형태의 모든 HFS의 집합을 의미하고, $\boldsymbol{X} \subset R^n$는 시스템 입력 변수들로 구성된 컴팩트 도메인을 의미하고, $\boldsymbol{X_{kd}} \subset R^{n_{kd}}$는 k번째 계층의 d번째 FLU에 해당되는 입력 변수인 $x_{ks} = (x_{kd}(1), x_{kd}(2),), \ldots, x_{kd}(n_{kd}))$로 구성된 컴팩트 도메인을 의미한다. 여기서 모든 x_{kd}의 원소들은 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$의 원소로 이루어진다. 또한 의미있는 HFS를 구현하기 위한 조건으로 $n_{kd} < n$과 $\lambda \geq 2$임을 가정한다.

보조정리 1 $\boldsymbol{F}$ is closed under addition.

증명 : 그림 3에서와 같은 HFS를 고려한다. 여기에서 임의의 HFS f_1, f_2 ($f_1, f_2 \in \boldsymbol{F}$)에 해당되는 시스템 입력 변수의 집합을 각각 $x_{(\lambda-1)1}, x_{(\lambda-1)2}$ 라고 둔다. 이제 전체 HFS가 λ개의 계층을 가진다고 생각하고, λ계층의 HFS에 해당되는 입력 변수인 $x_{\lambda 1}$ $(n_{\lambda 1} < n)$은 $x_{(\lambda-1)1}, x_{(\lambda-1)2}$ 의 원소들 중에서 임의로 선택한다.

여기에서 $FLU_{\lambda 1}$의 i번째 퍼지 규칙은 다음과 같다.

IF $x_{\lambda 1}(1)$ is $A^i_{\lambda 1}(1)$ and $x_{\lambda 1}(2)$ is $A^i_{\lambda 1}(2)$ and ... and $x_{\lambda 1}(n_{\lambda 1})$ is $A^i_{\lambda 1}(n_{\lambda 1})$
$THEN$ $y_{\lambda 1}$ is

$$p^i_{\lambda 1}(1)y_{(\lambda-1)1} + p^i_{\lambda 2}(2)y_{(\lambda-1)2} + w^i_{\lambda 1}(1,2)y_{(\lambda-1)1}y_{(\lambda-1)2} + r^i_{\lambda 1}.$$

여기에서 모든 i $(1 \leq i \leq I_{\lambda 1})$에 대하여 다음과 같이 설정한다.

$$p^i_{\lambda 1}(1) = 1, p^i_{\lambda 1}(2) = 1, w^i_{\lambda 1}(1,2) = 0, r^i_{\lambda 1} = 0$$

그러면 식 (5)로부터 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$y_{\lambda 1} = y_{(\lambda-1)} + y_{(\lambda-2)} = f_1 + f_2$$

즉, 임의의 두 HFS에 대하여 이들의 덧셈에 해당되는 제안된 형태의 HFS가 존재하므로, $\boldsymbol{F}$는 덧셈에 대해 닫혀있다. □

보조정리 2 $\boldsymbol{F}$ is closed under multiplication.

증명 : 보조정리 1에서와 같은 방법으로 모든 i $(1 \leq i \leq I_{\lambda 1})$에 대하여 다음과 같이 설정한다.

$$p^i_{\lambda 1}(1) = 0, p^i_{\lambda 1}(2) = 0, w^i_{\lambda 1}(1,2) = 1, r^i_{\lambda 1} = 0$$

그러면, 식 (5)로부터 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$y_{\lambda 1} = y_{(\lambda-1)}y_{(\lambda-2)} = f_1 f_2$$

즉, 임의의 두 HFS에 대하여 이들의 곱셈에 해당되는 제안된 형태의 HFS가 존재하므로, $\boldsymbol{F}$는 곱셈에 대해 닫혀있다. □

보조정리 3 $\boldsymbol{F}$ is closed under scalar multiplication.

증명 : λ개의 계층을 가진 임의의 HFS를 $f_{\lambda 1}$, 해당되는 시스템 입력을 $x_{\lambda 1}$으로 가정하고, 출력을 $y_{\lambda 1}$으로 표시하자. 식 (3)과 (5)를 사용하면 $y_{\lambda 1}$에 임의의 스칼라 값 c를 곱한 결과는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} c y_{\lambda 1} = & \sum_{j=1}^{d_{\lambda-1}} y_{(\lambda-1)j} \frac{\sum_{i=1}^{I_{\lambda 1}} \mu^i(x_{\lambda 1}) c p^i_{\lambda 1}(j)}{\sum_{i=1}^{I_{\lambda 1}} \mu^i(x_{\lambda 1})} \\ & + \sum_{(u,v)} y_{(\lambda-1)u} y_{(\lambda-1)v} \frac{\sum_{i=1}^{I_{\lambda 1}} \mu^i(x_{\lambda 1}) c w^i_{\lambda 1}(u,v)}{\sum_{i=1}^{I_{\lambda 1}} \mu^i(x_{\lambda 1})} \\ & + \frac{\sum_{i=1}^{I_{\lambda 1}} \mu^i(x_{\lambda 1}) c r^i_{\lambda 1}}{\sum_{i=1}^{I_{\lambda 1}} \mu^i(x_{\lambda 1})} \\ = & \sum_{j=1}^{d_{\lambda-1}} y_{(\lambda-1)j} \frac{\sum_{i=1}^{I_{\lambda 1}} \mu^i(x_{\lambda 1}) \tilde{p}^i_{\lambda 1}(j)}{\sum_{i=1}^{I_{\lambda 1}} \mu^i(x_{\lambda 1})} \\ & + \sum_{(u,v)} y_{(\lambda-1)u} y_{(\lambda-1)v} \frac{\sum_{i=1}^{I_{\lambda 1}} \mu^i(x_{\lambda 1}) \tilde{w}^i_{\lambda 1}(u,v)}{\sum_{i=1}^{I_{\lambda 1}} \mu^i(x_{\lambda 1})} \\ & + \frac{\sum_{i=1}^{I_{\lambda 1}} \mu^i(x_{\lambda 1}) \tilde{r}^i_{\lambda 1}}{\sum_{i=1}^{I_{\lambda 1}} \mu^i(x_{\lambda 1})} \end{aligned}$$

즉, 임의의 HFS에 대하여 스칼라 곱에 해당되는 제안된 형태의 HFS가 존재하므로, $\boldsymbol{F}$는 스칼라 곱셈에 대하여 닫혀있다. □

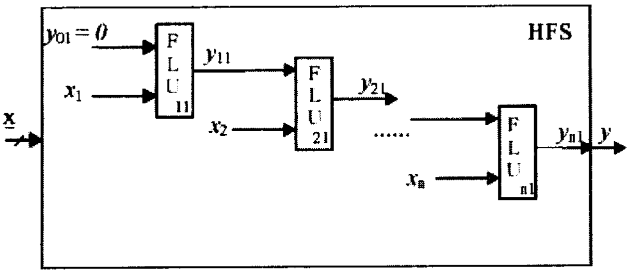

그림 4. 보조정리 4와 5를 위한 계층 퍼지 시스템.
Fig. 4. Hierarchical fuzzy system for lemma 4 and 5.

보조정리 4 For each $\underline{x} \in \boldsymbol{X}$, there is an $f \in \boldsymbol{F}$ such that $f(\underline{x}) \neq 0$, i.e., $\boldsymbol{F}$ vanishes at no point of $\boldsymbol{X}$.

증명 : 모든 $\underline{x} \in \boldsymbol{X}$에 대하여 $f(\underline{x}) \neq 0$인 제안된 형태의 f가 존재함을 보임으로써 보조 정리를 증명한다.

$\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$이라고 두고, 그림 4와 같이 각 계층에 단 하나의 FLU가 있는 HFS를 고려한다.

여기에서 k번째 계층의 FLU의 i번째 퍼지 규칙을 아래와 같이 정의한다.

$$IF\ x_k\ is\ A_k^i\ THEN\ y_{k1}\ is\ y_{(k-1)1} + C, \quad C \neq 0$$

식 (5)으로부터 $y_{k1} = y_{(k-1)1} + C$ 임을 알 수 있고, 결과적으로 다음 식이 성립하여 보조 정리가 증명된다.

$$f(x) = y_{n1} = nC \neq 0 \text{ for } all\ \underline{x} \in X. \qquad \square$$

보조정리 5 For every $\underline{x}, \underline{x}' \in \boldsymbol{X}$, $\underline{x} \neq \underline{x}'$, there is an $f \in \boldsymbol{F}$ such that $f(\underline{x}) \neq f(\underline{x}')$, i.e., $\boldsymbol{F}$ separates points on $\boldsymbol{X}$.

증명 : 모든 $\underline{x}, \underline{x}'(\underline{x} \neq \underline{x}')$에 대하여 $f(\underline{x}) \neq f(\underline{x}')$인 f를 하나 보임으로써 보조 정리를 증명한다.

$\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$이라고 두고, 그림 3과 같이 각 계층에 단 하나의 FLU가 있는 HFS를 선정한다. 여기에서 k번째 계층의 FLU의 퍼지 규칙을 아래와 같이 정의한다.

$$IF\ x_k\ is\ A_k^1\ THEN\ y_{k1}\ is\ y_{(k-1)1} + r_k^1$$
$$IF\ x_k\ is\ A_k^2\ THEN\ y_{k1}\ is\ y_{(k-1)1} + r_k^2$$

여기에서 r_k^1, r_k^2는 다음을 만족하도록 정한다.

$$\begin{aligned} &10^{k-1} \leq r_k^1 < 10^k, \\ &10^{k-1} \leq r_k^2 < 10^k, \\ &r_k^1 \neq r_k^2. \end{aligned} \tag{6}$$

식 (5)와 (3)으로부터 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) &= y_{(n-1)1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + \gamma_n(x_n) \\ &= y_{(n-2)1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}) + \gamma_{n-1}(x_{n-1}) + \gamma_n(x_n) \\ &= \ldots \\ &= \gamma_1(x_1) + \gamma_2(x_2) + \ldots + \gamma_n(x_n). \end{aligned}$$

여기에서 $\gamma_k(x_k) = \dfrac{\mu_{A_k^1}(x_k)r_k^1 + \mu_{A_k^2}(x_k)r_k^2}{\mu_{A_k^1}(x_k) + \mu_{A_k^2}(x_k)}$로 주어지고, $k(1 \leq k \leq n)$에 대하여 다음을 만족한다.

$$10^{k-1} \leq min(r_k^1, r_k^2) \leq \gamma_k(x_k) \leq max(r_k^1, r_k^2) < 10^k.$$

가정에서 $\underline{x} \neq \underline{x}'$이므로 적어도 하나의 $s\ (s \in \{1, \ldots, n\})$에 대하여 $x_s \neq x_s'$가 성립되는데, 그 s번째 계층에서 사용되는 퍼지 집합 A_s^1, A_s^2를 다음 조건을 만족하도록 설정한다.

$$\begin{aligned} &\mu_{A_s^1}(x_s) = 1, \quad 0 \leq \mu_{A_s^1}(x_s') < 1, \\ &\mu_{A_s^2}(x_s') = 1, \quad 0 \leq \mu_{A_s^2}(x_s) < 1. \end{aligned} \tag{7}$$

이제 $\underline{x} \neq \underline{x}'$임에도 불구하고 $f(\underline{x}) = f(\underline{x}')$이라고 가정하자. 식 (6)으로부터 $10^{k-1} \leq \gamma_k < 10^k$이므로, 이 가정은 모든 $k(k \in \{1, 2, \ldots, n\})$에 대하여 $\gamma_k(x_k) = \gamma_k(x_k')$임을 의미한다. 그러므로 $k = s$인 경우에도 다음과 같이 되어야 한다.

$$\gamma_s(x_s) = \frac{r_s^1 + \mu_{A_s^2}(x_s)r_s^2}{1 + \mu_{A_s^2}(x_s)} = \frac{\mu_{A_s^1}(x_s')r_s^1 + r_s^2}{\mu_{A_s^1}(x_s') + 1} = \gamma_s(x_s')$$
$$\leftrightarrow r_s^1(1 - \mu_{A_s^1}(x_s')\mu_{A_s^2}(x_s)) = r_s^2(1 - \mu_{A_s^1}(x_s')\mu_{A_s^2}(x_s))$$
$$\leftrightarrow \mu_{A_s^1}(x_s')\mu_{A_s^2}(x_s) = 1 \quad \because r_s^1, r_s^2 > 0,\ r_s^1 \neq r_s^2$$

그러나 이것은 식 (7)에 의해 모순이 되고, 결론적으로 $\underline{x} \neq \underline{x}'$이면 $f(\underline{x}) \neq f(\underline{x}')$이어야 함이 증명된다. $\square$

정의 퍼지 집합의 완전성(completeness) : 임의의 x $(\in X \subset R)$에 대하여 $\mu_{A^j}(x) > 0$인 A^j가 존재하면 퍼지 집합 $A^1, A^2, \ldots, A^N$은 완전하다.

제안된 HFS의 존재 증명 정리 식 (3)과 같은 퍼지 규칙을 가진 제안된 계층 퍼지 시스템의 집합을 $\boldsymbol{F}$라고 둔다. 이때, 컴팩트 도메인 $\boldsymbol{X}$ 상에서 주어진 임의의 실연속 함수 $g(\underline{x})$와 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 다음과 같은 $f\ (f \in \boldsymbol{F})$가 반드시 존재한다.

$$sup_{\underline{x} \in X}|f(\underline{x}) - g(\underline{x})| < \epsilon$$

즉, 실연속 함수 g를 임의의 정확도로 근사할 수 있는 계층 퍼지 시스템 f가 반드시 존재한다.

증명 : 퍼지 규칙의 전건부에 사용되는 퍼지 집합이 완전하다는 가정하에 식 (3)과 (5)로부터 $\boldsymbol{F}$는 실연속 함수로 이루어진 집합임을 알 수 있다. 보조정리 1, 2, 3에 의하여 Stone-Weierstrass 정리의 첫번째 조건($\boldsymbol{F}$ is an algebra)이 만족되고, 보조정리 4에 의하여 두 번째 조건($\boldsymbol{F}$ vanishes at no point of $\boldsymbol{X}$)이 만족되며, 보조정리 5에 의하여 세 번째 조건($\boldsymbol{F}$ separates points on $\boldsymbol{X}$)이 만족됨을 확인하였다. 그러므로, Stone-Weierstrass 정리에 의하여 $\boldsymbol{F}$는 모든 실연속 함수를 정확하게 근사할 수 있는 실연속 함수의 집합임이 증명된다. $\square$

여기에서, 위 정리는 임의의 실연속 함수를 정확하게 근사할 수 있는 제안된 형태의 계층 퍼지 시스템이 반드시 존재

한다는 것만을 보장한다. 해당되는 계층 퍼지 시스템은 대상 시스템에 대한 부분적인 지식[1, 2, 3, 4]을 사용하거나, 유전자 알고리즘[10, 11, 12, 13]을 이용하여 찾아내는 방법 등이 연구되어있다.

4. 결 론

제안된 계층 퍼지 시스템은 존재하는 모든 퍼지 로직 유닛의 퍼지 규칙에서, 그 의미가 명확한 시스템 입력만을 입력 변수로 사용하여, 기존의 계층 퍼지 시스템에 비하여 퍼지 규칙을 이해하기가 용이한 이점을 가진다. 구체적으로는 이전 계층의 출력값을 퍼지 규칙의 전건부에서는 사용하지 않음으로써 물리적 의미가 모호한 중간 출력의 사용을 억제하되, 후건부에서 이전 출력을 적절히 참조하여 사용한 형태로 구성되었다.

본 논문에서는 싱글톤 퍼지화기와 센터-평균 비퍼지화기를 사용하는 경우, 시스템 변수의 멤버쉽 함수가 주어진 컴팩트 도메인 내에서 완전하기만 하다면, 임의의 연속 함수가 주어지더라도 그에 해당하는 제안된 형태의 계층 퍼지 시스템이 존재한다는 것을 수학적으로 증명하였다.

참고문헌

[1] G. V. S. Raju, J. Zhou, and R. A. Kisner, "Hierarchical fuzzy control," *Int. J. Control, vol.* 54, pp. 1201-1216, 1991.

[2] G. V. S. Raju and Jun Zhou, "Adaptive Hierarchical Fuzzy Controller," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. 23, pp. 973-980, 1993.

[3] Moon G. Joo and Jin S. Lee, "Hierarchical fuzzy logic scheme with constraints on the fuzzy rule," *Int. J. Intelligent Automation and Soft Computing*, vol. 7, no. 4, pp. 259-271, 2001.

[4] Moon G. Joo and Jin S. Lee, "Universal approximation by hierarchical fuzzy system with constraints on the fuzzy rule," *Fuzzy Sets* and *Systems*, vol. 130, no. 2, pp. 175-188, 2002.

[5] Li-Xin Wang, "Universal approximation by hierarchical fuzzy systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 93, pp. 223-230, 1998.

[6] Li-Xin Wang, "Analysis and design of hierarchical fuzzy systems," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 7, pp. 617-624, 1999.

[7] Chen Wei and Li-Xin Wang, "A note on universal approximation by hierarchical fuzzy systems," *Information Sciences*, vol. 123, pp. 241-248, 2000.

[8] O. Huwendiek and W. Brockmann, "Function approximation with decomposed fuzzy systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 101, pp. 273-286, 1999.

[9] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, New York, 1976.

[10] Koji Shimojima, Toshio Fukuda, and Yasuhisa Hasegawa, "Self-tuning fuzzy modeling with adaptive membership function, rules, and hierarchical structure based on genetic algorithm," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 71, pp. 295-309, 1995.

[11] Toshio Fukuda, Yasuhisa Hasegawa, and Koji Shimojima, "Structure organization of hierarchical fuzzy model using by genetic algorithm," *IEEE Int. Conf. Fuzzy Syst.*, vol. 1, pp. 295-300, 1995.

[12] Takeshi Furuhashi, Seiichi Matsushita, Hiroaki Tsutsui, and Yoshiki Uchikawa, "Knowledge extraction from hierarchical fuzzy model obtained by fuzzy neural networks and genetic algorithm," *Proc. Int. Conf. Neural Networks*, vol. 4, pp. 2374-2379, 1997.

[13] Kanta Tachibana and Takeshi Furuhashi, "Uneven allocation of membership functions for hierarchical fuzzy modeling using genetic algorithm," Proc. *IEEE Int. Conf. Evolutionary Computation*, pp. 746-751, 1998.

저 자 소 개

주 문 갑 (Joo Moon-Gab)

1992년 : 포항공대 전자전기공학과 (공학사)

1994년 : 포항공대 정보통신학과 (공학석사)

2001년 : 포항공대 전자컴퓨터공학부 (공학박사)

2003년 9월-현재 : 부경대학교 전자컴퓨터정보통신공학과 전임강사.

관심분야 : 지능 제어, 공장 자동화 등

E-mail : gabi@pknu.ac.kr