

## 예조건화된 오일러 방정식의 수렴특성

이상현\*

# Convergence Characteristics of Preconditioned Euler Equations

Sang-Hyeon Lee\*

### ABSTRACT

The convergence characteristics of preconditioned Euler equations were studied. A perturbation analysis was conducted to understand the behavior of the preconditioned Euler equations. Various speed flows in a two-dimensional channel with a 10% circular arc in the middle of the channel were calculated. Roe's FDS scheme was used for spatial discretization and the LU-SGS scheme was used for time integration. It is shown that the convergence characteristics of pressure and velocity were maintained regardless of the Mach numbers but that the convergence characteristics of temperature were strongly related to the Mach number and became worse as the Mach number decreased. The perturbation analysis well explained the trend of the convergence characteristics and showed that the convergence characteristics are strongly related with the behavior of the preconditioning matrix.

### 초 록

예조건화된 오일러 방정식의 수렴특성에 대한 연구를 수행하였다. 지배방정식의 거동을 이해하기 위하여 섭동 해석을 수행하였다. 중앙부에 10% 원호를 가진 2차원 관을 통과하는 다양한 마하수의 비점성 유동장에 대해 수치 계산을 수행하였다. 공간차분은 Roe의 FDS를 사용하고 시간적분은 LU-SGS 기법을 사용하였다. 압력 및 속도의 수렴특성은 마하수와 상관없이 일정하게 유지되었으나, 온도의 수렴성은 마하수가 작아질수록 악화되는 것으로 나타났다. 섭동 해석을 통해 이러한 지배방정식의 수렴특성을 설명할 수 있었으며, 수렴특성이 예조건화 행렬의 거동 특성에 의해 결정된다는 사실을 알 수 있었다.

Key Words: Preconditioning(예조건화), Convergence Characteristics (수렴 특성), Euler Equations (오일러 방정식), Perturbation Analysis (섭동 해석), Roe's FDS, LU-SGS

### 1. 서 론

† 2003년 12월 22일 접수 ~ 2004년 3월 13일 심사완료

\* 정희원, 울산대학교 수송시스템공학부  
연락처, E-mail: lsh@mail.ulsan.ac.kr

최근 예조건화 방법 (Preconditioning method)을 이용하여 저속유동을 효과적으로 해

석하기 위한 연구가 활발히 이루어지고 있다. 보통, 저속유동의 해를 구하기 위해서는 비압축성 방정식의 해를 구하지만, 연소현상이나 급격한 열전달 현상을 해석하기 위해서는 압축성 방정식의 해를 구해야 하기 때문에, 저속 압축성 유동의 해를 효과적으로 구하는 알고리즘이 요구되는 것이다. 저속 유동장을 해석하는 경우에 압축성 알고리즘은 상당히 불안정한 양상을 보이며 해의 수렴성이 악화되어 적절하지 못한 해를 도출하기도 한다. 이러한 현상은 최대 고유치와 최소고유치의 비인 특성 조건수 (Characteristic Condition Number) 크기가 지나치게 커지기 때문에 발생하는 문제이다. 또한 유동장 내에 마하수의 범위가 극저속부터 초음속까지 존재하는 문제가 많이 존재하는데, 이러한 경우에 넓은 마하수 범위에서 작동하는 수치 알고리즘이 필요하다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 저속 유동장에서의 고유치의 크기 정도를 인위적으로 조절하여 저속 유동장에서의 수렴성을 증대시키는 것이 예조조건화 방법이다[1,7].

본 연구의 선행 연구[8,9]에서, 저속유동장의 압력 및 속도장의 수렴성이 마하수에 상관없이 일정하지만, 온도장의 수렴성은 마하수에 따라서 악화됨을 보인다. 그리고 이러한 에너지 방정식의 수렴성 악화는 유효숫자의 손실에 따른 것이라는 해석이 제시된 바 있다.

본 연구에서는 에너지 방정식의 수렴성이 마하수가 작아짐에 따라 악화되는 현상을 엄밀하게 규명하기 위해서 방정식의 거동을 해석하였으며, 이 해석을 바탕으로 계산결과를 재분석하였다.

사용된 지배방정식은 2차원 오일러 방정식이며, 10% 곡면을 가진 2차원 관유동에 대하여 수치 계산을 수행하였다. 공간차분은 Roe의 FDS를 사용하였고, 시간적분은 LU-SGS 기법을 변형하여 사용하였다. 수치 검증과 비교를 위해 10%의 원호가 있는 전후 대칭형의 2차원 관유동의 해를 구하였다.

## 2. 본 론

### 2.1 지배방정식

벡터 형태로 표현된 2차원 Euler 방정식은 다음과 같다.

$$\Gamma \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

방정식에 포함된 각 벡터 기호는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{J} [\rho, \rho u, \rho v, \rho e] ^T, \\ P &= \frac{1}{J} [p, u, v, T] ^T, \\ E &= \frac{1}{J} [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho h_o u] ^T, \\ F &= \frac{1}{J} [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho h_o v] ^T \end{aligned} \quad (2)$$

그리고 예조조건화 행렬은 다음과 같다.

$$\Gamma \equiv \frac{\partial Q}{\partial P} = \begin{bmatrix} 1/\beta & 0 & 0 & 0 \\ u/\beta & \rho & 0 & 0 \\ v/\beta & 0 & \rho & 0 \\ h_o/\beta - 1 & \rho u & \rho v & \rho c_p \end{bmatrix} \quad (3)$$

예조조건화 행렬에 포함된 예조건수 ( $\beta$ )는 다음과 같은 방법으로 정의된다.

$$\beta = M_r^2 c^2 \quad (4)$$

$$M_r^2 = \min(1, M^2) \quad (5)$$

예조조건화된 지배방정식에서 고유치는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \lambda_x &= u, \frac{1}{2} \{ u(1 + M_r^2) \pm \sqrt{u^2(1 - M_r^2)^2 + 4\beta} \}, \\ \lambda_y &= v, \frac{1}{2} \{ v(1 + M_r^2) \pm \sqrt{v^2(1 - M_r^2)^2 + 4\beta} \} \end{aligned} \quad (6)$$

지배방정식과 더불어, 압력, 밀도, 온도의 관계를 구하기 위하여 이상기체 상태방정식을 사용하였다.

$$p = \rho RT \tag{7}$$

$$\hat{p}\gamma_\infty p_\infty = \hat{\rho}RT\rho_\infty R_\infty\gamma_\infty T_\infty \tag{10}$$

2.2 무차원화

예조건화 행렬을 대각화하기 위해서는 행렬의 각 성분이 해에 미치는 영향을 살펴보아야 하는데, 각 성분의 크기 비교를 위해 무차원화가 필요하다. 지배방정식은  $L_\infty$ (특성길이),  $c_\infty$ (음속),  $\rho_\infty$ (밀도),  $\gamma p_\infty$ (압력),  $\gamma T_\infty$ (온도)를 기준으로 무차원화하였다. 이때,  $\infty$ 는 무한 원방의 고정된 값을 의미한다.

$$\hat{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \hat{p}_i = \frac{p_i}{\gamma_\infty p_\infty}, T = \frac{T}{\gamma_\infty T_\infty}, R = \frac{R}{R_\infty},$$

$$\hat{c}_p = \frac{c_p}{R_\infty}, \hat{u} = \frac{u}{c_\infty}, \hat{v} = \frac{v}{c_\infty}, h = \frac{h}{c_\infty^2} \tag{8}$$

이를 이용하여 지배방정식 (1)을 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 1/\beta c_\infty^2 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{u}/\beta c_\infty & \hat{\rho}\rho_\infty & 0 & 0 \\ \hat{v}/\beta c_\infty & 0 & \hat{\rho}\rho_\infty & 0 \\ \hat{h}_o/\beta - 1 & \hat{\rho}\hat{u}\rho_\infty c_\infty & \hat{\rho}\hat{v}\rho_\infty c_\infty & \hat{\rho}\hat{c}_p\rho_\infty R_\infty \end{bmatrix}$$

$$\frac{c_\infty}{L_\infty} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \hat{p}\gamma_\infty p_\infty \\ \hat{u}c_\infty \\ \hat{v}c_\infty \\ T\gamma_\infty T_\infty \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{L_\infty} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \hat{\rho}\hat{u}\rho_\infty c_\infty \\ \hat{\rho}\hat{u}^2\rho_\infty c_\infty^2 + \hat{p}\gamma_\infty p_\infty \\ \hat{\rho}\hat{u}\hat{v}\rho_\infty c_\infty^2 \\ \hat{\rho}\hat{h}_o\hat{u}\rho_\infty c_\infty^3 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{L_\infty} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} \hat{\rho}\hat{v}\rho_\infty c_\infty \\ \hat{\rho}\hat{u}\hat{v}\rho_\infty c_\infty^2 \\ \hat{\rho}\hat{v}^2\rho_\infty c_\infty^2 + \hat{p}\gamma_\infty p_\infty \\ \hat{\rho}\hat{h}_o\hat{v}\rho_\infty c_\infty^3 \end{bmatrix} = 0 \tag{9}$$

그리고 상태방정식 (7)는 다음과 같이 표현된다.

이때,  $\gamma_\infty p_\infty = c_\infty^2 \rho_\infty$ ,  $\gamma_\infty T_\infty = c_\infty^2 / R_\infty$  이므로 지배방정식과 상태방정식은 다음과 같이 간단히 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1/\beta & 0 & 0 & 0 \\ \hat{u}/\beta & \hat{\rho} & 0 & 0 \\ \hat{v}/\beta & 0 & \hat{\rho} & 0 \\ \hat{h}_o/\beta - 1 & \hat{\rho}\hat{u} & \hat{\rho}\hat{v} & \hat{\rho}\hat{c}_p \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \hat{p} \\ \hat{u} \\ \hat{v} \\ T \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \hat{\rho}\hat{u} \\ \hat{\rho}\hat{u}^2 + \hat{p} \\ \hat{\rho}\hat{u}\hat{v} \\ \hat{\rho}\hat{h}_o\hat{u} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} \hat{\rho}\hat{v} \\ \hat{\rho}\hat{u}\hat{v} \\ \hat{\rho}\hat{v}^2 + \hat{p} \\ \hat{\rho}\hat{h}_o\hat{v} \end{bmatrix} = 0 \tag{11}$$

$$\hat{p} = \hat{\rho}RT \tag{12}$$

식 (11) 및 (12)은  $\hat{\cdot}$  기호만 생략하면 본래의 식 (1) 및 (7)과 정확히 같은 식이 된다. 이 이후에는 표기의 편의를 위하여  $\hat{\cdot}$  기호를 생략하고자 한다.

지속 유동장에서 무차원화된 지배방정식의 각 변수들의 크기를 살펴보면 다음과 같다.

$$\rho \sim O(1), p \sim O(1), T \sim O(1), R \sim O(1),$$

$$c_p \sim O(1), u \sim O(M), v \sim O(M), h \sim O(1),$$

$$u^2 + w^2 \sim O(M^2), \beta \sim O(M^2) \tag{13}$$

2.3 섭동 해석(Perturbation analysis)

지속 유동장에서 방정식의 거동을 살펴보기 위하여 유동의 미소 변화에 따른 해의 변화를 살펴보기로 하자. 우선 속도의 변화가  $O(M)$ 라고 가정하자.

$$du, dv \sim O(M) \tag{14}$$

단열유동인 경우에 정체엔탈피가 일정하므로

$$c_p dT + udu + vdv = 0 \tag{15}$$

따라서 온도의 변화는  $M^2$ 에 비례할 것이다.

$$\delta T \sim O(M^2) \quad (16)$$

이상적인 단열(등엔트로피) 유동을 고려하면 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} \quad (17)$$

따라서 압력 및 밀도의 변량도  $M^2$ 에 비례하는 값을 가지게 된다.

$$\delta p \sim O(M^2), \quad \delta \rho \sim O(M^2) \quad (18)$$

이러한 사실을 바탕으로 대류 벡터의 변량은 살펴보자.

$$\begin{aligned} \delta E &= \begin{bmatrix} \delta(\rho u) \\ \delta(\rho u^2 + p) \\ \delta(\rho uv) \\ \delta(\rho h_o u) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \rho \delta u + u \delta \rho \\ 2\rho u \delta u + u^2 \delta \rho + \delta p \\ \rho u \delta v + \rho v \delta u + uv \delta \rho \\ h_o u \delta \rho + \rho h_o \delta u + \rho u \delta h_o \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

따라서 변량의 크기는 다음과 같다.

$$\delta E \sim \begin{bmatrix} O(M) + O(M^3) \\ O(M^2) + O(M^4) \\ O(M^2) + O(M^4) \\ O(M) + O(M^3) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} O(M) \\ O(M^2) \\ O(M^2) \\ O(M) \end{bmatrix} \quad (20)$$

마찬가지로 y 방향의 대류 벡터의 변량도 다음과 같이 표현될 것이다.

$$\delta F \sim \begin{bmatrix} O(M) \\ O(M^2) \\ O(M^2) \\ O(M) \end{bmatrix} \quad (21)$$

이제, 외재적으로 표현된 차분화 방정식을 거동

을 살펴보자. 각 항들의 크기 관점으로 방정식을 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} O(M^{-2}) & 0 & 0 & 0 \\ O(M^{-1}) & O(1) & 0 & 0 \\ O(M^{-1}) & 0 & O(1) & 0 \\ O(M^{-2}) & O(M) & O(M) & O(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta T \end{bmatrix} \sim \frac{\Delta t}{\Delta l} \begin{bmatrix} O(M) \\ O(M^2) \\ O(M^2) \\ O(M) \end{bmatrix} \quad (22)$$

이때,  $\Delta l$ 은 격자 하나의 길이에 해당되는 기호로  $\Delta x$  또는  $\Delta y$ 를 대표하는 기호이다.  $\Delta l / \Delta t$  CFL수에 따라 결정되는데, CFL=1인 경우에  $O(M)$ 의 크기를 가진다. 따라서 식 (22)는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} O(M^{-2}) & 0 & 0 & 0 \\ O(M^{-1}) & O(1) & 0 & 0 \\ O(M^{-1}) & 0 & O(1) & 0 \\ O(M^{-2}) & O(M) & O(M) & O(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta T \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} O(1) \\ O(M) \\ O(M) \\ O(1) \end{bmatrix} \quad (23)$$

이 방정식의 해를 구해보면, 압력항의 변화 ( $\Delta p_i$ )의 크기는  $M^2$ 에 비례하는 값을 가지게 된다.

$$\Delta p \sim O(M^2) \quad (24)$$

속도변화 ( $\Delta u, \Delta v$ )의 크기는 마하수에 비례하는 값을 가지게 된다.

$$\Delta u \sim O(M), \quad \Delta v \sim O(M) \quad (25)$$

온도변화 ( $\Delta T$ )의 크기는 마하수에 관계없이 결정된다.

$$\Delta T \sim O(1) \quad (26)$$

이 결과를 식 (19)-(21)과 비교해보면, 속도 및 압력은 예측된 결과와 일치함을 알 수 있다. 하

지만 온도는 저속 유동장에서 예측된 결과보다 훨씬 큰 변화를 예측하는 거동을 보인다는 사실을 짐작할 수 있다. 이는 저속 유동장에서 에너지 방정식의 수렴성이 악화될 것이라는 점을 시사하는 것이다.

#### 2.4 지배방정식의 차분화

예조건화된 지배방정식은 일반좌표계로 변환하여 차분화 하였다. 변환된 방정식의 형태는 다음과 같다.

$$\Gamma \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0 \quad (27)$$

$$E = \frac{1}{J} [\rho U, \rho Uu + \xi_x p, \rho Uv + \xi_y p, \rho h_o U]^T,$$

$$F = \frac{1}{J} [\rho V, \rho Vu + \eta_x p, \rho Vv + \eta_y p, \rho h_o V]^T \quad (28)$$

여기서  $U, V$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$U = \xi_x u + \xi_y v, \quad V = \eta_x u + \eta_y v \quad (29)$$

$\xi$ -방향의 플럭스 자코비언 행렬(Flux Jacobian Matrix)은 다음과 같이 정의된다[2].

$$A \equiv \frac{\partial E}{\partial P} = \begin{bmatrix} \frac{\rho U}{p} & \rho \xi_x \\ \frac{\rho Uu}{p} + \xi_x & \rho U + \rho u \xi_x \\ \frac{\rho Uv}{p} + \xi_y & \rho v \xi_x \\ \frac{\rho U h_o}{p} & \rho U + \rho h_o \xi_x \\ \rho \xi_y & -\frac{\rho U}{T} \\ \rho u \xi_y & -\frac{\rho Uu}{T} \\ \rho U + \rho v \xi_y & -\frac{\rho Uv}{T} \\ \rho U + \rho h_o \xi_y & \rho c_p U - \frac{\rho U h_o}{T} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$\eta$ -방향의 대류 벡터의 해벡터에 대한 자코비언 행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$B \equiv \frac{\partial F}{\partial P} \quad (31)$$

행렬의 형태는 식(30)에서  $\xi$ 와  $U$  대신에  $\eta$ 와  $V$ 로 대치하면 된다.

변환된 지배방정식은 유한체적법으로 차분화 하였는데, 풍상차분법(Upwind Discretization)을 적용하기 위한 플럭스 분할(Flux Splitting) 방법으로는 Roe의 FDS[10] 방법을 사용하였으며, 음속을 수정하는 것 외에 다른 수정은 가하지 않았다. 격자 셀 표면에서의 대류벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$E_{i+1/2} = \frac{1}{2} [E_L + E_R - |A| \Delta Q] \quad (32)$$

$E_L, E_R$ 은 각각 셀 표면 좌측과 우측에서 근사한 대류벡터를 의미한다. 셀 표면의 변수들은 공간적으로는 3차 정확도로 내삽하였고, 고차정확도 때문에 발생하는 진동을 제어하기 위해 Koren 제한자를 사용하였다. 이때, 완충 항 ( $|A| \Delta Q$ )은 다음과 같이 표현된다.

$$|A| \Delta Q = \begin{bmatrix} \alpha_s \\ \alpha_s u + \alpha_\rho \Delta u + \alpha_d \xi_x \\ \alpha_s v + \alpha_\rho \Delta v + \alpha_d \xi_y \\ \alpha_s + \alpha_\rho \Delta h_o + \alpha_d \mathcal{U} \end{bmatrix} \quad (33)$$

이때, 식 내의 각 기호는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= |\lambda_1| \left( \Delta \rho - \frac{\Delta p}{c^2} \right), \\ \alpha_2 &= |\lambda_2| \left( \frac{\Delta p + \rho \tilde{c} \Delta \mathcal{U}}{2c^2} \right), \\ \alpha_3 &= |\lambda_3| \left( \frac{\Delta p - \rho \tilde{c} \Delta \mathcal{U}}{2c^2} \right), \\ \alpha_s &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \alpha_\rho = |\lambda_1| \rho, \\ \alpha_d &= \tilde{c} (\alpha_2 - \alpha_3) M_r, \\ \xi_x &= \frac{\xi_x}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}}, \quad \xi_y = \frac{\xi_y}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}}, \\ \mathcal{U} &= \frac{U}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}}, \quad \lambda_k = \frac{\lambda_k}{\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}}, \end{aligned}$$

$$\Delta \phi = \phi_R - \phi_L, \quad \phi = \rho, p, u, v, h, \mathcal{U} \quad (34)$$

이때,  $\tilde{c}$ 는 가상음속으로 본 연구의 선행연구에서 제안한 수정함수를 사용하였는데, 이는 음속을 마하수의 함수로 조절한 것이다.

$$\tilde{c} = cf(M_r) \quad (35)$$

수정함수는 선행연구 [8]의 수정함수를 약간 수정하여 사용하였는데, 마하수가 0.5이하일 때, 가상마하수가 0.5가 되도록 결정하였다. 이는 Lee[11]에 언급된 바와 같이, 압축성 유동에서 마하수가 0.5일 때 특성 조건수(Characteristic Condition Number)가 최소 값을 가지기 때문이다. 수정함수는 다음과 같다.

$$f(M_r) = M_r^\theta, \quad \theta = \begin{cases} 1 - \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} M}, & M \leq \frac{1}{2} \\ 0, & M > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (36)$$

시간적분을 위해서는 LU-SGS (Lower Upper Symmetric Gauss Seidel)[3,12] 기법을 약간 변형하여 사용하였다. 이 과정에서 풍상 차분화된 플럭스 자코비언은 다음과 같은 근사 자코비언을 사용하였다.

$$A^\pm = \frac{1}{2}(A \pm \lambda_{\max} \Gamma) \quad (37)$$

그러면 풍상차분법으로 표현된 지배방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$LD^{-1}U\Delta Q = RHS \quad (38)$$

각각의 기호는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D &= \frac{\Gamma}{\Delta t} + \lambda_D \Gamma = \left( \frac{1}{\Delta t} + \lambda_D \right) \Gamma \\ L &= D - (A_{i-1}^+ + B_{j-1}^+) \\ U &= D + (A_{i+1}^- + B_{j+1}^-) \\ RHS &= -(\delta_\xi E + \delta_\eta F)^{(n)} \end{aligned} \quad (39)$$

이때, 최대 고유치의 합( $\lambda_D$ )은 다음과 같이 정의된다.

$$\lambda_D = \lambda_{\max, \xi} + \lambda_{\max, \eta} \quad (40)$$

이때, 행렬  $D$ 가 대각행렬이 아니지만 대각의 아래쪽 부분만 행렬의 원소가 존재하기 때문에 쉽게 해를 구할 수 있다.

시간 간격은 국소 시간 간격을 사용하였으며 CFL 관계식을 이용하여 시간 간격을 결정하였다. LU-SGS 방법에서는 큰 CFL을 사용하는 것이 가능하므로 CFL=10<sup>3</sup>을 사용하였다.

## 2.5 유동 조건 및 경계 조건

공기는 이상기체로 취급하였고, 정체온도 및 압력은 300K, 1기압으로 각각 설정하였는데, 입구 조건은 마하수에 따라 등엔트로피 과정으로 구하였다.

경계조건은 아음속 관유동이므로, 입구 압력은 영역내부의 압력으로 외삽하였고, 나머지 변수들은 고정하였다.

$$p_i = p_{i+1} \quad (41)$$

출구에서의 압력은 1기압으로 고정하고, 출구 속도 및 밀도는 외삽하였다.

$$p_e = p_\infty,$$

$$\phi_e = \phi_{e-1}, \quad \phi = T, \rho, u, v \quad (42)$$

온도는 상태방정식을 이용하여 결정하였다. 벽면 경계조건은 단열조건을 사용하였고, 벽면에서의 속도는 벽면에 평행하도록 결정하였다.

## 2.6 계산 격자계

본 연구에서는 아래쪽 벽면에 10%의 원호가 있는 2차원 관유동의 해를 구하였다. 계산격자의 수는 65×30 (=1950)인데, 변화가 큰 원호의 시작점과 끝점으로 밀집시켰다. Fig. 1에 사용된 계산 격자가 나타나 있다.

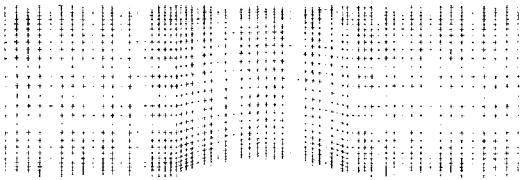


Fig. 1 Grid system; the number of grid points is 1950 (=65x30[y])

### 3. 결과 및 분석

#### 3.1 수치 코드의 검증

수치코드의 검증은 선행연구[8,9]에서 보인 바 있으므로 간단히 언급하고자 한다. 자세한 내용은 선행연구를 참조하기 바란다.

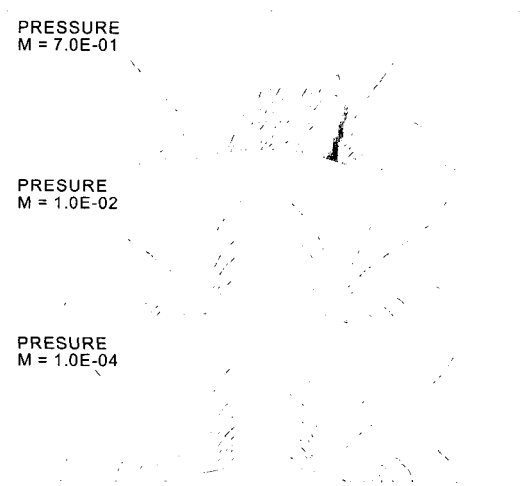


Fig. 2 Pressure contours in various Mach number flows.

Figure 2는 마하수의 변화에 따른 저속유동장의 등압선을 나타내고 있다. 마하수가 0.7인 경우 원호 후미에서 충격파가 형성되는 것을 관찰할 수 있다. 마하수가  $10^{-2}$  이하인 경우, 전체적으로 등압선의 분포가 대칭성을 유지하는 것을 볼 수 있다. 등온선과 등속선에서 후방 벽면 근처에서 대칭성이 약간 깨어지는 것을 볼 수 있는데, 입구조건과 출구조건에 비대칭성 때문에 발생하는 것으로 판단된다. 이러한 결과는

이전에 발표된 연구 결과들[4-5]와 상당히 잘 일치하는 것으로 판단된다.

#### 4.2 수렴 특성

수렴 특성을 조사하기 위해서 마하수의 변화에 따른 압력·속도·온도의 평균 잔여항의 크기가 줄어드는 경향을 표시하였다. 평균 잔여항(Averaged Residual)은 다음과 같이 결정하였다.

$$Res(p) = \sum_{i,j} \frac{|Ap|}{N_G}$$

$$Res(u, v) = \sum_{i,j} \frac{|Au| + |Av|}{N_G}$$

$$Res(T) = \sum_{i,j} \frac{|AT|}{N_G} \quad (43)$$

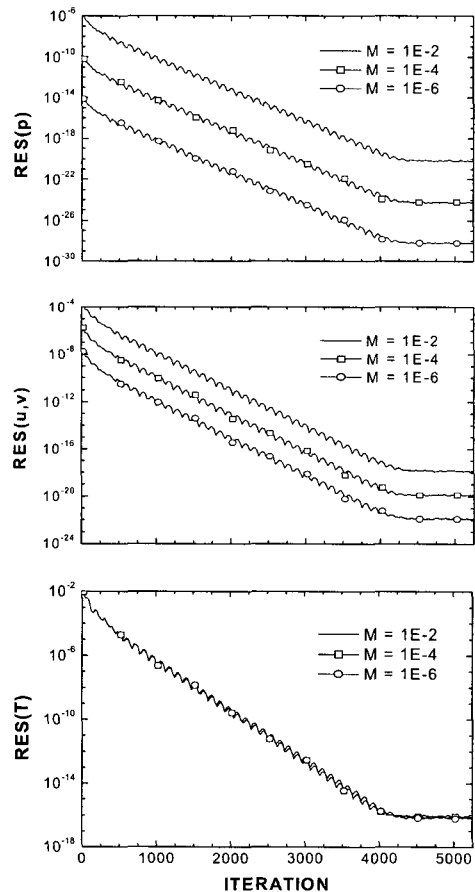


Fig. 3 Convergence histories of pressure, velocity and temperature

Figure 3은 평균 잔여항이 반복회수가 증가함에 따라 감소하는 경향을 나타내고 있다. 마하수의 변화에 따른 압력 및 속도의 수렴특성의 변화를 살펴보자. 마하수가 작아지면 잔여항의 크기가 작게 나타나는데, 마하수에 상관없이 수렴속도(잔여항의 감소 기울기)가 동일함을 알 수 있다. 그리고 같은 반복회수일 때 인접한 두 수렴 곡선이 압력에 대해서는  $10^{-4}$ 의 크기 차이를 보이고, 속도에 대해서는  $10^{-2}$ 의 크기 차이를 보인다는 사실을 확인할 수 있다. 하지만, 온도의 수렴특성을 살펴보면 마하수의 변화에 상관없이 잔여항의 감소 정도가 일정함을 볼 수 있다.

이러한 결과는 앞서 살펴본 해석의 결과를 이용하여 설명될 수 있다. 수렴특성에 대한 해석 결과에서 보인 바와 같이, 압력의 경우  $\Delta p \sim O(M^2)$  이므로, 인접하는 두 경우의 마하수의 비가  $10^{-2}$ 인 경우 잔여항의 비는  $10^{-4}$ 이 되고, 속도의 경우  $\Delta(u, v) \sim O(M)$  이므로, 인접하는 두 경우의 마하수의 비가  $10^{-2}$ 인 경우, 잔여항의 비는  $10^{-2}$ 이 되는 것이다. 그리고 온도의 경우  $\Delta T \sim O(1)$  이므로, 마하수에 상관없이 동일한 수렴 정도를 가지게 되는 것이다.

따라서 수렴정도를 보다 명확히 규정하기 위해서는 잔여항을 재규준화 (Re-normalization) 하는 것이 필요함을 짐작할 수 있다. 재규준화는 식 (14), (16), (17)을 이용하여, 압력 및 온도의 잔여항에 대해서는  $M^2$ , 속도의 잔여항에 대해서는  $M$ 으로 나누어 재규준화 하면 동일한 수렴 조건을 구할 수 있기 때문이다.

$$\begin{aligned}
 Res(p) &= \sum_{i,j} \frac{|\Delta p|}{M_\infty^2 N_G} \\
 Res(u, v) &= \sum_{i,j} \frac{|\Delta u| + |\Delta v|}{M_\infty N_G} \\
 Res(T) &= \sum_{i,j} \frac{|\Delta T|}{M_\infty^2 N_G} \quad (44)
 \end{aligned}$$

Figure 4는 마하수로 재규준화된 잔여항의 크기 변화를 보여주고 있다. 압력 및 속도의 재규

준화된 잔여항은 마하수에 상관없이 정확히 동일한 감소를 보이는 것을 알 수 있다. 하지만, 온도의 재규준화된 잔여항은 마하수에 따라 정확히  $10^{-2}$  만큼씩 차이를 보이며 달라지는 것을 볼 수 있다. 이때, 그래프 속에 표시된 점선은 충분한 수렴에 대해 기준선으로 잔여항이 이 기준선 이하로 줄어드는 경우에 충분히 수렴된 해를 구할 수 있음을 알려주는 것이다.

이를 확인하기 위해서는 여러 마하수에 대해서 반복횟수에 따른 해의 변화를 살펴볼 필요성이 제기된다.

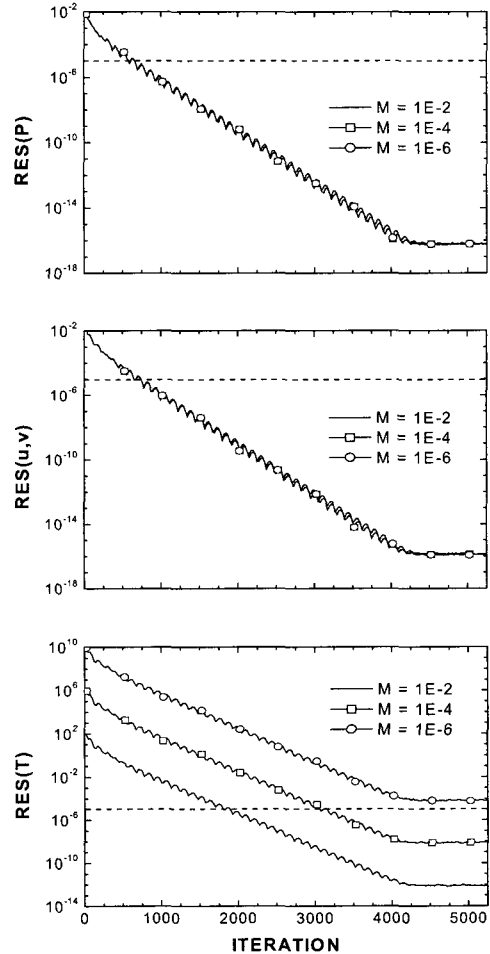


Fig. 4 Convergence histories of pressure, velocity and temperature in enormalized form



Figure 5는 마하수의 변화에 따른 등압선의 분포와 등속선의 분포를 비교하고 있는데, 압력은 반복회수가 600 정도일 때 마하수에 상관없이 수렴된 결과를 보이고, 속도는 반복회수가 800 정도일 때 마하수에 상관없이 수렴된 결과를 보인다.

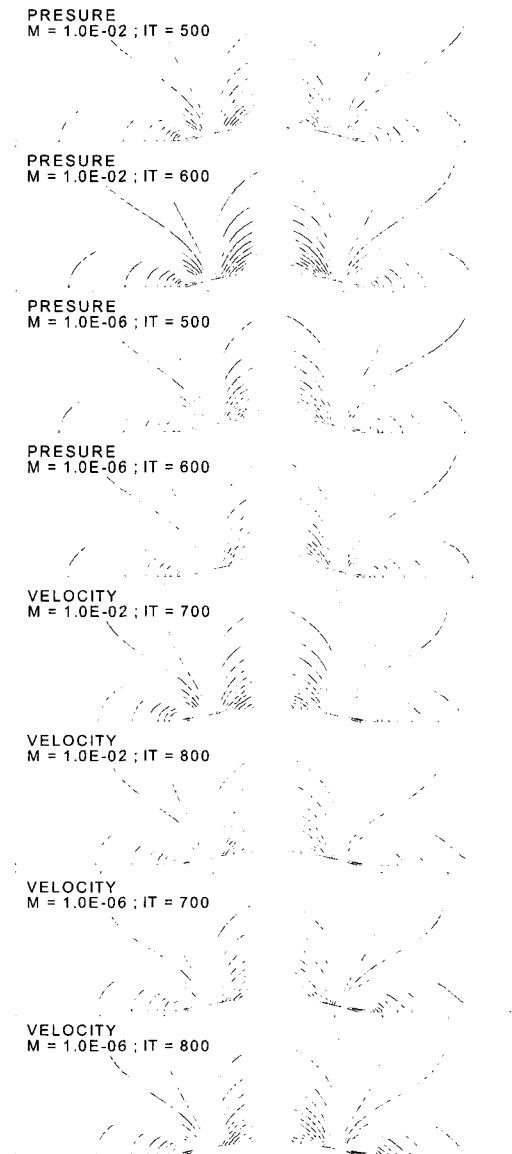


Fig. 5 Minimum iterations to obtain converged contours of pressure and velocity at various Mach numbers

그리고 수렴에 필요한 최소 반복횟수는 재규준화된 잔여항이 Fig. 4에 나타난 점선을 통과하는 반복회수에 해당함을 알 수 있다.

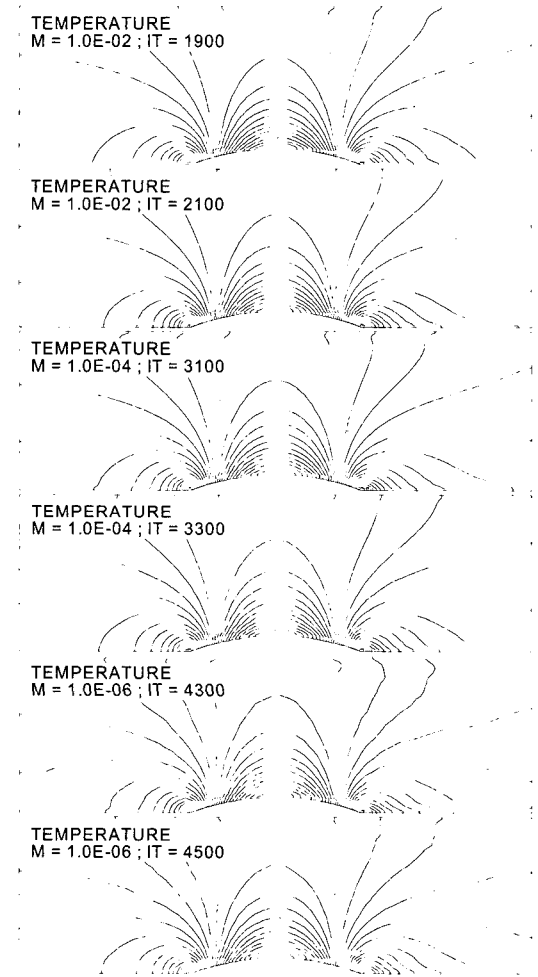


Fig. 6 Minimum iterations to obtain converged contours of temperature at various Mach numbers

하지만, 온도에 대해서는 압력 및 속도의 경우와 다른 경향을 보인다. Fig. 6은 마하수의 변화에 따른 온도 분포를 비교하고 있다.  $M_{\infty} = 10^{-2}$ 인 경우에는 반복회수가 2100 정도에서 수렴된 결과를 얻을 수 있었고,  $M_{\infty} = 10^{-4}$ 인 경우 3300 정도에서 수렴된 결과를 얻을 수 있었으

며,  $M_\infty = 10^{-6}$ 인 경우에는 4500 정도에서 수렴된 결과를 얻을 수 있는 것으로 나타났다. 온도 수렴성은 입구마하수의 비가  $10^{-2}$  정도가 감소함에 따라서 반복회수는 약 1200 정도가 더 필요한 것으로 나타났다.

이때, 한 가지 주목할 사실은  $M_\infty = 10^{-6}$ 인 경우 충분히 수렴된 결과를 얻을 수 없다는 것이다. 이는 선행연구 [8,9] 및 Sesterhenn [13]이 언급하였듯이 유효숫자의 손실 때문인 것으로 판단된다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 예조건화된 오일러 방정식의 수렴특성을 연구하였다. 수렴특성을 설명하기 위하여 섭동 해석(Perturbation analysis)을 수행하였으며 다음과 같은 결론에 도달하였다.

예조건화된 오일러 방정식을 이용하여 저속 유동장의 계산할 때, 압력 및 속도의 수렴 특성은 마하수에 상관없이 일정하지만, 마하수의 감소에 따라 온도의 수렴특성은 악화된다. 이러한 현상은 예조건화 방정식의 거동에 의한 것으로 섭동 해석으로 설명될 수 있음을 보였다.

그리고 잔여항의 크기를 재규준화하여 표현하면, 압력, 속도, 온도의 동일한 조건으로 해의 수렴성을 나타낼 수 있음을 보였다.

#### 후 기

본 연구는 한국학술진흥재단의 신진교수연구(과제번호: KRF-2002-003-D00049) 지원으로 수행되었습니다. 또한 이 연구의 주요 계산은 한국과학기술정보연구원(KISTI)이 무상으로 제공한 슈퍼 컴퓨팅 자원을 이용하여 수행되었습니다.

#### 참 고 문 헌

1. Shuen, J. S., Chen, K. H., and Choi, Y., "A Coupled Implicit Method for Chemical Non-Equilibrium Flows at All Speeds," *Journal of Computational Physics* 106, 1993, pp.306-318
2. Chen, K. H., and Shuen, J. S., "Three Dimensional Coupled Implicit Methods for Spray Combustion Flows at All Speeds," *AIAA* 1994, pp.94-3047
3. Dailey, L. D., and Pletcher, R. H., "Evaluation of Multigrid Acceleration for Preconditioned Time-Accurate Navier-Stokes Algorithms," *AIAA* 1995, pp.95-1668
4. Edwards, J. R., and Roy, C. J., "Preconditioned Multigrid Methods for Two Dimensional Combustion Calculations at All Speeds," *AIAA Journal*, Vol. 36, No. 2, February, 1998, pp.185-192
5. Edwards, J. R., and Liou M. S., "Low Diffusion Flux Splitting Methods for Flows at All Speeds," *AIAA Journal*, Vol. 36. No. 9, 1998, pp.1610-1617
6. Hsieh, J. S-Y., and Yang V., "A Preconditioning Flux-Difference Scheme for Chemically Reacting Flows at All Mach Numbers," *International Journal of CFD*, Vol. 8. 1997, pp.31-49
7. Buelow, P.E, and Schwer, D. A., Feng, J., Merkle, C. L., and Choi, D., "Three Dimensional Coupled Implicit Methods for Spray Combustion Flows at All Speeds," *AIAA* 1994, pp.94-3047
8. 이상현, "저속 압축성 유동장 해석을 위한 예조건화 방법론 연구 I," *항공우주학회지*, 29권, 7호, 2001, pp.87-95
9. 이상현, "저속 압축성 유동장 해석을 위한 예조건화 방법론 연구 II - 온도장 계산 성능 개선," *공우주학회지*, 29권, 8호, 2001, pp.26-36
10. Roe, P. L., "Approximate Riemann

- Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, No. 3, 1981, pp.352-372
11. Lee, D., "Design Criteria for Local Euler Preconditioning," *Journal of Computational Physics*. Vol. 144, 1998, pp.423-459
  12. Yoon, S., and Jameson, A., "Lower-Upper Method for the Euler and Navier-Stokes Equation," *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 9, 1988, pp.1025-1026
  13. Sesterhenn, J., Muller, B., and H. Thomann, "On Cancellation Problem in Calculating Low Mach number Flows," *Journal of Computational Physics*. Vol. 151, 1999, pp.597-615