

## 지반침하가 매설배관의 건전성에 미치는 영향

이익섭<sup>#</sup>, 김동혁<sup>\*</sup>

### Effect of Ground Subsidence on Reliability of Buried Pipelines

Lee Ouk Sub<sup>#</sup> and Kim Dong Hyeok<sup>\*</sup>

#### ABSTRACT

This paper presents the effect of varying boundary conditions such as ground subsidence, internal pressure and temperature variation for buried pipelines on failure prediction by using a failure probability model. The first order Taylor series expansion of the limit state function incorporating with von-Mises failure criteria is used in order to estimate the probability of failure mainly associated with three cases of ground subsidence. Using stresses on the buried pipelines, we estimate the probability of pipelines with von-Mises failure criterion. The effects of varying random variables such as pipe diameter, internal pressure, temperature, settlement width, load for unit length of pipelines, material yield stress and pipe thickness on the failure probability of the buried pipelines are systematically studied by using a failure probability model for the pipeline crossing ground subsidence regions which have different soil properties.

**Key Words :** Failure Probability(파손확률), Buried Pipeline(매설배관), Boundary Condition(경계조건), Ground Subsidence(지반침하), Elastic Foundation(탄성기반), Reliability Estimation(건전성평가)

#### 기호설명

$\sigma_a$	= axial stress of the pipeline
$\sigma_\theta$	= circumferential stress of the pipeline
$\sigma_y$	= yield stress
$\nu$	= Poisson's ratio
$\alpha$	= coefficient of thermal expansion
$\Delta T$	= the change in temperature
P	= internal operation pressure
d	= inner diameter of pipeline
D	= outer diameter of pipeline
t	= thickness of pipeline

E	= Young's modulus
W	= load for unit length of pipeline
w	= vertical displacement
L	= settlement width of ground
PF	= failure probability
$I_p$	= moment of inertia
k	= modulus of subgrade reaction

#### 1. 서 론

지하에 매설되어 있는 가스, 기름 등을 수송하는 배관은 다양한 환경에 노출되어 있는데, 이들

접수일: 2003년 7월 22일; 제재승인일: 2003년 11월 14일  
# 교신저자, 인하대학교 기계공학과

Email : lecos@inha.ac.kr Tel. (032) 860-7315

\* 인하대학교 기계공학과 대학원

배관이 설치된 이후 오래 시간이 지나면 여러 가지 환경적 영향에 의한 손상이 발생하게 된다. 이로 인해 대형 재난이 발생할 경우 막대한 경제적, 사회적 손실은 물론 인적피해도 가져올 수 있으므로 배관의 건전성 확보는 무엇보다 중요하게 인식되고 있다<sup>1</sup>.

특히 배관이 매설되는 지역은 농, 밭, 해안가, 도로, 매립지 등 다양하기 때문에 배관이 놓여지는 지반의 상태가 동일하지 않다. 그러므로 여러 가지 요인에 의해 지반침하 현상이 나타나는데, 일률적인 지반침하에 대해서는 강관의 휘는 성질에 의하여 큰 문제가 발생하지는 않지만, 지반의 불균일성에 의하여 생기는 부등침하는 매설배관 파손의 주요한 원인으로 지적되고 있다<sup>2</sup>.

본 연구에서는 신뢰도 지수를 이용한 확률론적 방법중의 하나인 FORM(first-order reliability method)<sup>3</sup> 와 지반반력기반모델 (subgrade reaction foundation model)<sup>4,5</sup> 을 이용하여 지반침하에 의해 배관에 발생하는 응력을 분석하고, 내압, 온도변화가 배관에 발생할 경우, 지반침하가 매설배관의 파손확률에 미치는 영향을 체계적으로 규명하였다.

## 2. 배관에 작용하는 응력

### 2.1 내압에 의한 응력

내압  $P$  가 작용하는 배관에서 내압에 의한 원주방향응력( $\sigma_{\theta p}$ )은 배관의 지름방향으로 일정하게 발생하고 다음과 같이 나타낼 수 있다<sup>6</sup>.

$$\sigma_{\theta p} = \frac{Pd}{2t} \quad (1)$$

또한 내압  $P$  에 의해서 축방향으로 구속된 배관에 유기되는 축방향 응력( $\sigma_{ap}$ )은 내압에 의한 축방향 응력과 구속에 의한 팽창 혹은 수축 때문에 발생하는 푸아송의 효과를 고려한 응력을 중첩하면 다음과 같다<sup>6</sup>.

$$\sigma_{ap} = (0.5 + v_p) \frac{Pd}{2t} \quad (2)$$

여기서,  $v_p$  는 배관재료의 푸아송의 비이다. 용접이음된 매설배관의 길이가 매우 길면, 배

관의 단면부가 축방향으로 구속되지 않더라도 토질마찰등에 의해서 구속되므로 내압등에 의해서 응력이 발생하게 된다.

### 2.2 토질온도 변화에 의한 응력

축방향으로의 변형률  $\varepsilon_{at} = \alpha \Delta T$  인 사실을 알고 Hooke' law 를 적용하면 구속을 받는 배관의 온도가 변화할 때 발생하는 축방향 응력( $\sigma_{at}$ )은 다음과 같다<sup>7</sup>.

$$\sigma_{at} = E_p \alpha \Delta T \quad (3)$$

여기서,  $E_p$  는 배관의 탄성계수이다.

### 2.3 지반침하에 의한 응력

지반침하에 의해 발생하는 배관의 변형과 응력은 배관을 보조소로 보고 지반반력기반모델을 이용하여 해석적으로 구할 수 있다. Winkler 에 의해 제시된 지반반력기반모델에서는 배관 주위의 지반을 탄성기반(elastic foundation)으로 모델링한다<sup>4,5,8</sup>. 즉 배관과 주위지반의 관계를 스프링의 관계로 설정하여 배관의 변형에 따른 지반 거동을 지반반력으로 모델링하였다.

지반이 받는 압력  $p_g$  는 배관의 수직변위에 비례한다.

$$p_g = kw_p \quad (4)$$

여기서,  $k$  는 지반반력계수이고,  $w_p$  는 배관의 수직 변위이다. 지반반력계수  $k$  는 다음과 같다.

$$k = \frac{0.65}{D} \left( \frac{E_g D^4}{E_p I_p} \right)^{1/12} \left( \frac{E_g}{1 - v_g} \right) \quad (5)$$

여기서,  $E_p$  는 파이프의 탄성계수,  $I_p$  는 파이프의 극관성모멘트,  $E_g$  는 지반의 탄성계수,  $v_g$  는 지반의 푸아송의 비이다.

탄성기반의 단위길이당 강성  $K$ (modulus of subgrade reaction,  $FL^{-2}$ )는  $K = k \times D$  로 나타낼 수 있다.

탄성기반 위에 놓인 배관의 수직 변형에 관한 일반적인 미분방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^4 w_p}{\partial y^4} + 4\eta^4 w_p = 4\eta^4 w_g = 4\eta^4 \frac{W}{K} \quad (6)$$

여기서,  $w_g$ 는 지반의 수직변위이며,  $K$ 는 탄성 기반의 강성이다.  $\eta$ 는 다음과 같이 나타내어지며,  $1/\eta$ 을 토양-배관 강성도(soil-pipe stiffness)로 칭한다.

$$\eta = \sqrt[4]{\frac{K}{4E_p I_p}} \quad (7)$$

본 연구에서는 식(6)을 지반침하가 발생하는 매설배관의 경우에 적용하여 해석하였다.

### 2.3.1 일단이 고정된 관의 침하(Case 1)

Fig. 1 과 같은 일단이 고정된 매설배관의 침하에 대해서 최대 굽힘모멘트와 축방향응력은 다음과 같다<sup>9</sup>.

$$M_{\max} = E_p I_p \frac{2\eta^2 W}{K} \quad \text{at } x=0 \quad (8)$$

$$\sigma_{a\_cs1} = \frac{M_{\max} D}{2I_p} \quad \text{at } x=0 \quad (9)$$

그리고 축방향응력에 의해 매설배관의 푸아송비 만큼 원주방향응력이 작용한다.

$$\sigma_{\theta\_cs1} = V_p \sigma_{a\_cs1} \quad (10)$$

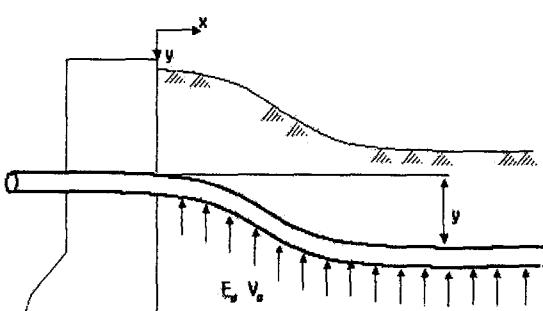


Fig. 1 Schematic diagram of the case 1 ground subsidence

지하에 구조물등의 고정점이 있는 경우의 매설배관의 침하도 일단이 고정된 매설배관의 침하와 동일하게 해석할 수 있다.

### 2.3.2 연약지반( $k \neq 0$ )을 횡단하는 관의 침하(Case 2)

Fig. 2 와 같은 지반반력을 약간 기대할 수 있는 연약지반을 통과하는 매설배관의 응력은 연약지반과 견고지반의 지반반력계수가 다르고, 연약지반의 폭이 변하게 되므로 해석적인 해를 구하기가 어렵다.

그래서 연약지반의 폭을 다양하게 변화시키면서 유한요소 해석을 통해 최대 모멘트  $M_{\max}/W$ 와  $\eta L$  사이의 그래프를 그리고, 이를 이용하여  $M_{\max}$ 를 구하여 식(9), 식(10)을 이용하여 축방향응력( $\sigma_{a\_cs2}$ ), 원주방향응력( $\sigma_{\theta\_cs2}$ )을 구한다. 760mm 배관에 대한 해석결과는 Fig. 3 과 같다<sup>9</sup>.

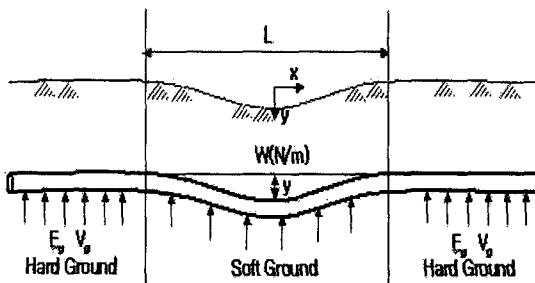


Fig. 2 Schematic diagram of the case 2 ground subsidence

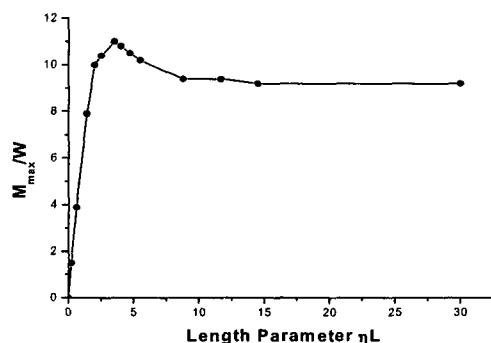


Fig. 3  $M_{\max}/W$  parameter plotted against  $\eta L$

### 2.3.3 연약지반( $k=0$ )을 횡단하는 관의 침하 (Case 3)

Fig. 4 와 같이 지반반력이 없는 연약지반을 통과하는 경우의 매설배관에 작용하는 최대모멘트는 다음과 같다<sup>9</sup>.

$$M_{\max} = \frac{1}{6} W \left( \frac{L}{2} \right)^2 \frac{3 + 3\eta L/2 + \eta^2 (L/2)^2}{\eta L/2(1 + \eta L/2)} \quad \text{at } x=0 \quad (11)$$

이때 식(9), 식(10)을 이용하여 축방향 응력 ( $\sigma_{a\_cs3}$ ), 원주방향응력( $\sigma_{\theta\_cs3}$ )을 구한다.

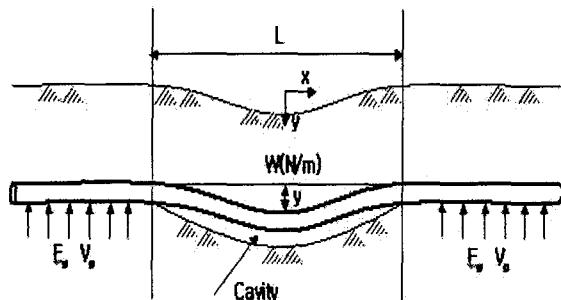


Fig. 4 Schematic diagram of the case 3 ground subsidence

## 3. 파손확률이론

### 3.1 FORM (first-order reliability method)

본 연구에서는 문제를 단순화 시키기 위하여 모든 확률 변수들의 분포가 정규분포라고 가정하고, 확률 변수들의 분포가 평균과 표준편차에 의해서 결정되는 것으로 가정하였다.

FORM(first-order reliability method)은 한계상태방정식(limit state function, LSF)의 Taylor 급수 전개식의 1 차 항만 사용하여 파손확률을 구하는 방법으로 모든 확률 변수들의 평균과 분산 및 분포형태를 이용하여 파손확률에 대한 상대적 지표인 신뢰도지수(reliability index)를 산정하는 방법이다<sup>3</sup>.

파손확률 해석을 수행할 경우에는 먼저 파손 함수에 대한 정의를 내릴 필요가 있다. 이 함수는 파손에 대한 기준으로 표현할 수 있고, 한계상태

방정식(LSF)을 갖는 식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Z = R - L \quad (12)$$

여기서, R은 저항성분의 확률변수이고, L은 하중성분의 확률변수이다. 두 확률변수 R과 L이 각각 서로 독립적인 정규분포 확률변수라면, 한계상태방정식(LSF)에 의한 새로운 확률변수 Z의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_L \quad (13)$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_L^2 \quad (14)$$

여기서,  $\mu_Z, \mu_R, \mu_L$ 는 각각 확률변수 Z, R, L의 평균이고  $\sigma_Z^2, \sigma_R^2, \sigma_L^2$ 은 각각 확률변수 Z, R, L의 분산이다.

위의 확률변수들이 정규분포이므로 파손확률은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$PF = P[Z < 0]$$

$$= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sigma_Z \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z} \right)^2 \right\} dZ \quad (15)$$

여기서, 새로운 확률변수  $U$ 는  $U = (Z - \mu_Z)/\sigma_Z$ 로 정의되고, 식 (15)의 파손 확률은 다음과 같이 수정하여 표현할 수 있다.

$$PF = \int_{-\infty}^{-\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{U^2}{2} \right\} dU \\ = P[Z < 0] = \Phi(-\beta) \quad (16)$$

이때 파손확률 PF 와 표준정규분포함수인  $\Phi$  사이에 식(16)이 성립하도록 하는  $\beta$ 를 신뢰도지수(reliability index)라고 하며 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\mu_R - \mu_L}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_L^2}} \quad (17)$$

### 3.2 파손평가기준

본 연구에서는 경계조건이 매설배관의 파손률에 미치는 영향을 규명하기 위해 아래식과 같은 von-Mises 파손평가기준을 사용하였다<sup>3</sup>.

$$\sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 \rangle \rangle \sigma_y^2 \quad (18)$$

범함수(functional) Z 를 항복응력과 축방향, 원주방향 응력의 함수를 이용하여 다음과 같이 놓으면

$$z = \sigma_y^2 - (\sigma_a^2 - \sigma_a \sigma_\theta + \sigma_\theta^2) \quad (19)$$

파손률  $PF$  와 신뢰도 지수  $\beta$  는 각각 식(16)과 식(17)을 사용하여 결정할 수 있다.

범함수 Z 의 평균 ( $u_z$ )과 표준편차( $\sigma_z$ )는 아래와 같다.

$$u_z = z(D^*, L^*, \dots, v_p^*) + (\bar{D} - D^*) \frac{\partial z}{\partial D} + (\bar{L} - L^*) \frac{\partial z}{\partial L} + \dots + (\bar{v}_p - v_p^*) \frac{\partial z}{\partial v_p} \quad (20)$$

$$\sigma_z^2 = (\sigma_D \frac{\partial z}{\partial D})^2 + (\sigma_L \frac{\partial z}{\partial L})^2 + \dots + (\sigma_{v_p} \frac{\partial z}{\partial v_p})^2 \quad (21)$$

여기서,  $\bar{D}, \bar{L}, \dots, \bar{v}_p$  와  $D^*, L^*, \dots, v_p^*$  은 각각의 평균값과 검사점의 값이고  $\sigma_D, \sigma_L, \dots, \sigma_{v_p}$  는 각각의 표준편차이다.

여기서 유의할 사항은 비록 표준편차가 평균과 동일한 차원으로 표현되지만 평균이 없으면 변수의 분포를 정확하게 표현하지 못한다는 사실이다. 따라서 평균과 표준편차의 비로 표현되는 무차원수인 편차계수(coefficient of variation, C.O.V)를 이용하여 나타낼 수 있고, 편차계수는 다음과 같이 표현된다.

$$C.O.V = \frac{\sigma_z}{\mu_z} \quad (22)$$

### 4. 배관의 사례연구

본 연구에서는 내압, 온도변화가 있는 배관에서 지반침하가 매설배관의 파손률에 어떠한 영향을 미치는지 알아보기 위해 Table 1 에 나타낸 변수와 표시한 값을 사용하였다. 지반반력계수 k의 값은 지반의 탄성계수에 비례하는데, 연약지반의 경우에는  $0.1 \text{kgf/cm}^3$ , 견고한 지반은  $3.0 \text{kgf/cm}^3$ , 보통 지반은  $1.0 \text{kgf/cm}^3$  의 값을 보통 사용하며 본 연구에서도 위와 같은 값을 사용하였다<sup>3,9</sup>.

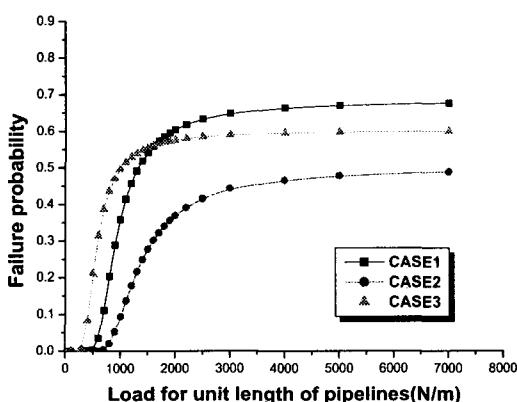
Table 1 Random variables and their parameter used in the example.

Variable	Mean	C.O.V
D(배관의 외경)	760mm	0.04
d(배관의 내경)	740mm	0.06
E <sub>p</sub> (배관의 탄성계수)	201MPa	0.033
$\sigma_y$ (배관의 항복강도)	400MPa	0.05
$v_p$ (풀아송의 비)	0.3	0.1
P(내압)	10MPa	0.12
$\alpha$ (열팽창 계수)	10.5E-6/°C	0.1
$\Delta T$ (온도변화)	15°C	0.15

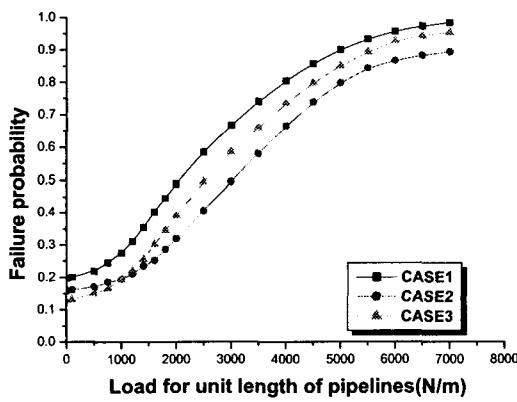
### 5. 결과 및 고찰

Table 1 의 변수값을 이용하여 매설배관에 작용하는 단위 길이당 하중에 따른 파손률을 Fig. 5 에 나타내었다. 매설배관에 작용하는 하중은 배관의 매설깊이에 비례한다. 매설배관에 내압이 작용하는 경우와 작용하지 않는 경우에 대하여 각각 매설깊이에 따라 파손률이 어떻게 변하는지를 Fig. 5 에 나타내었다. Fig. 5 (a)에 나타낸 것과 같이 내압이 작용하지 않는 경우, 일단이 고정된 매설배관(CASE 1)과 지반반력이 없는 연약지반을 통과하는 매설배관(CASE 3)은 약 500N/m 이상의 하중에서는 파손률이 급격히 증가하는 반면 약간

의 지반반력이 존재하는 연약지반을 통과하는 매설배관(CASE 2)은 1000N/m 이상의 하중에서 파손확률이 증가하지만, 다른 두 경우와 비교해 볼 때 천천히 증가한다는 사실이 확인되었다. Fig. 5 (b)에 나타낸 것과 같이 내압이 작용하는 경우의 단위 길이당 작용하는 하중에 대한 파손확률은 3 가지 경우 모두 서서히 증가하지만, 단위 길이당 작용하는 하중이 커지면, 즉 매설깊이가 깊어지면 내압이 작용하지 않을 때 보다 파손확률이 더 크게 나타나는 것을 알 수 있다.



(a)



(b)

Fig. 5 Relationships between failure probability and load for unit length of pipelines (a) without internal pressure, (b) with internal pressure

Fig. 6 은 매설배관에 작용하는 내압의 변화가 지반침하가 일어나는 지반을 통과하는 배관의 매설깊이에 대한 파손확률에 미치는 영향을 나타낸 것이다. Fig. 6에 나타낸 것과 같이 3 가지 경우 모두 매설배관에 작용하는 내압이 커지면 파손확률이 커진다는 것을 알 수 있고, 특히 지반반력을 조금 기대할 수 있는 연약지반을 통과하는 매설배관(CASE 2)의 파손확률이 다른 2 가지 경우가 약 0.13 정도 증가하는 것에 비해 약 0.2 정도 증가함으로써 가장 크게 증가하는 것을 알 수 있다. 단위 길이당 작용하는 하중이 1000N/m 과 4000N/m 사이에서는 3 가지 경우 모두 파손확률의 증가 기울기가 커진다는 것을 알 수 있고, 지반반력이 전혀 없는 지반을 통과하는 매설배관(CASE 3)은 다른 2 가지 경우보다 파손확률의 증가 기울기가 더욱 큰 것을 알 수 있다. 또한 매설배관에 작용하는 내압이 10Mpa 에서는 지반반력을 약간 기대할 수 있는 지반을 통과하는 매설배관(CASE 2)의 파손확률이 지반반력이 전혀 없는 지반을 통과하는 매설배관(CASE 3)의 파손확률보다 높게 나타나는 단위 길이당 하중이 1000N/m 정도였지만 20Mpa에서는 3000N/m 정도로 커지는 것을 알 수 있다.

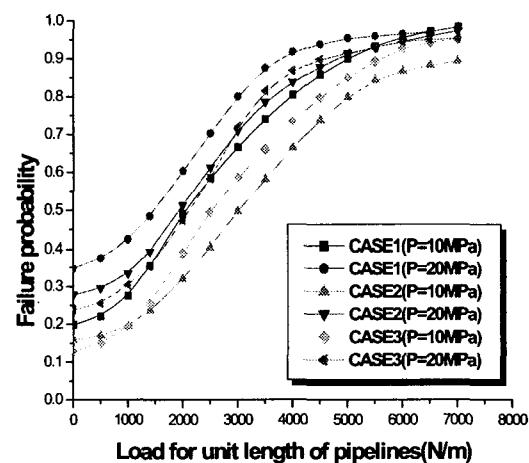


Fig. 6 Relationships between failure probabilities with varying internal pressure

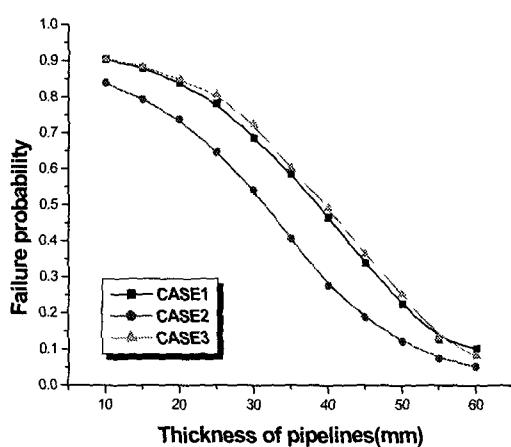


Fig. 7 Relationships between failure probability and thickness of pipelines

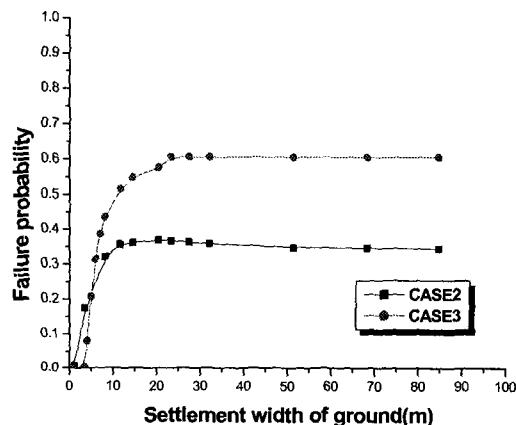
Fig. 7 에는 배관의 두께에 따른 파손률의 변화를 나타내었다. 내압이 작용하는 배관은 3 가지 경우의 지반침하에 대해 매설배관의 두께가 증가하면 파손률이 감소한다는 것을 알 수 있다. 이것은 당연한 결론이다. 그러나 파손률을 줄이기 위해 매설배관의 두께를 늘리고 작용하는 내압을 무조건 줄일 수는 없다. 두께를 늘리면 매설배관의 내경이 작아져 결국은 유량이 작아지므로 배관의 효율이 떨어지기 때문이다. 따라서 여러 가지 경계조건이 매설배관에 미치는 영향을 고려하여 적절한 두께, 내압, 매설깊이를 선택하도록 해야 한다.

Fig. 8 에는 매설배관이 연약지반을 통과하는 경우 지반의 침하폭에 대한 매설배관의 파손률의 변화를 내압의 작용여부에 따라 비교하여 나타내었다. 지반 침하폭이 25m 정도까지는 매설배관의 파손률이 급격히 증가하고, 25m 이상에서는 거의 일정하게 유지되는 것을 알 수 있다.

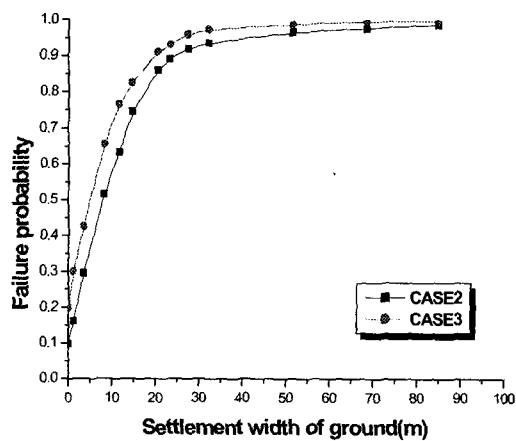
또한 지반반력을 전혀 없는 연약지반을 통과하는 매설배관(CASE 3)의 파손률이 지반반력을 약간 기대할 수 있는 연약지반을 통과하는 매설배관(CASE 2)보다 더 크다는 것을 알 수 있다. 그리고 내압이 작용하는 매설배관의 파손률이 내압이 작용하지 않는 매설배관보다 크게 나타남을 알 수 있고, 내압이 작용하는 경우 지반반력이 전혀

없는 연약지반을 통과하는 매설배관(CASE 3)보다 지반반력을 약간 기대할 수 있는 연약지반을 통과하는 매설배관(CASE 2)의 파손률이 큰 폭으로 증가하는 것을 알 수 있다.

20m 이내의 작은 지반 침하폭에서도 매설배관의 파손률이 급격히 증가하므로 연약지반을 통과하는 매설배관의 설계시 지반 침하폭을 최소로 할 수 있도록 설계해야 한다.



(a)



(b)

Fig. 8 Relationships between failure probability and settlement width of ground (a) without internal pressure, (b) with internal pressure

## 6. 결 론

본 연구에서는 von-Mises 파손평가기준을 이용하여 내압이 작용하는 경우 3 가지 형태의 지반침하가 매설배관의 파손확률에 미치는 영향을 체계적으로 규명하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 지반침하가 발생하는 지반을 통과하는 매설배관의 파손확률은 배관에 작용하는 하중, 즉 매설깊이에 비례한다. 이경우 일단이 고정된 매설배관의 지반침하 형태(CASE 1)가 파손확률이 가장 크게 나타난다.

(2) 매설배관에 내압이 작용하는 경우의 파손확률이 내압이 작용하지 않는 경우에 비해 크게 나타나고, 내압의 크기가 커지면 파손확률도 커진다. 이 경우 지반반력이 전혀 없는 연약지반을 통과하는 매설배관(CASE 3)의 파손확률 증가 기울기가 가장 크게 나타난다.

(3) 매설배관의 두께가 증가할수록 파손확률은 감소한다. 이것이 당연한 결과이지만 파손확률을 줄이기 위해 무조건 내압과 매설깊이를 줄이고, 두께를 크게 하는 것은 매설배관의 효율이 떨어지기 때문에 적절하지 않다. 따라서 여러 가지 경계조건의 영향을 고려해 적절한 내압, 두께, 매설깊이를 선택해야 한다.

(4) 연약지반을 통과하는 매설배관의 파손확률은 지반침하폭이 증가할수록 급격히 증가하고, 내압이 작용하는 경우의 파손확률이 내압이 작용하지 않는 경우에 비해 더 크게 나타난다. 20m 이내의 작은 지반 침하폭에서도 매설배관의 파손확률이 급격히 증가하므로 연약지반을 통과하는 매설배관의 설계시 지반 침하폭을 최소화 할 수 있도록 설계해야 한다.

## 후기

본 연구는 한국과학재단산하 성균관대학교 산업설비안전성연구센터(SAFE)의 연구지원으로 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 진심으로 감사드립니다.

## 참고문헌

1. Ahammed, M., Melchers, R. E., "Reliability Estimation of Pressurized Pipelines Subject to Localised Corrosion Defects," Int. J. Pres. Ves. & Piping, Vol. 69, pp. 267-272, 1996.
2. Attewell, "Ground Movements and Their Effects on Structures," Blackie & son Ltd, 1984.
3. Lee, O. S. Pyun, J. S. "Failure Probability Model of Buried Pipeline," Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol. 18, No. 11, pp.116-123, 2001.
4. Vesic, A.S., Jou. Eng. Mech. Division, ASCE, Vol. 87, EM2, pp.35-53, 1961.
5. Hetenyi, M., "Beams on Elastic Foundation," University of Michigan Press, An Arbor, 1946.
6. Spangler, M. G., Handy, R. L., "Soil Engineering," 4th edition, Harper and Row, New York, 1982.
7. Lee, O. S. Pyun, J. S. Kim, E. S. "Effect of Boundary Conditions on Failure Probability of Buried Steel Pile," Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol. 20, No. 04, pp.204-213, 2003.
8. Winkler, "Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit (on Elasticity and Flexibility)," Prague, 1867.
9. Bang, I. W. Kim, H. S. Yang, Y. C. Kim, W. S. Oh, K. W. "Development of the Computer Program Calculating the Stress Induced by Various Loads for Buried Natural Gas Pipeline," Journal of the Korean Institute of Gas, Vol. 02, No. 02, 1998.