

## 축방향 모드에 대한 자동차 부싱의 점탄성 모델링

이 성 범<sup>†</sup> · 이 수 용<sup>\*</sup>

<sup>†</sup>인제대학교 기계자동차공학부 · <sup>\*</sup>인제대학교 대학원 기계공학과  
(2004년 7월 28일 접수, 2004년 9월 1일 수정 및 채택)

### Viscoelastic Modeling of Automotive Bushing for Axial Mode

Seong Beom Lee<sup>†</sup>, Su Young Lee<sup>\*</sup>

<sup>†</sup>School of Mechanical & Automotive Engineering, Inje University

<sup>\*</sup>Department of Mechanical Engineering, Graduate School, Inje University

(Received July 28, 2004, Revised and Accepted September 1, 2004)

요약 : 자동차 부싱은 차체로 전달되는 하중을 줄여주는 역할을 하는 자동차 현가장치의 주요 부품으로 바깥쪽 슬리브와 안쪽의 축 사이에서 가운데가 비어있는 실린더의 형상을 가진다. 차축에 작용되는 하중과 부싱의 상대 변위는 비선형 점탄성 성질을 나타내며, 부싱에서 힘과 변위의 관계는 다물체 동역학 시뮬레이션에 매우 중요하다. 본 연구는 실험을 바탕으로 하여, 자동차 부싱에 대한 힘과 변위의 비선형 점탄성 관계를 변위에 의존하는 힘 완화함수로 표현하여 이를 유도하는 방법을 개발하였으며, 완성된 비선형 점탄성 부싱 모델은 피핀-라저스 모델로 명명하여 실험값과 비교하여 검증하였다.

**ABSTRACT** : A bushing is a device used in automotive suspension systems to reduce the load transmitted from the wheel to the frame of the vehicle. A bushing is a hollow cylinder, which is bonded to a solid steel shaft at its inner surface and a steel sleeve at its outer surface. The relation between the force applied to the shaft and the relative deformation of a bushing is nonlinear and exhibits features of viscoelasticity. Since a force-displacement relation for bushings is important for multibody dynamics numerical simulations, the relation is expressed in terms of a force relaxation function and a method of determination by experiments on bushings has been developed. For the nonlinear viscoelastic axial response, Pipkin-Rogers model, the direct relation of force and displacement, has been derived from experiment. It is shown that the predictions by the proposed force-displacement relation are in very good agreement with the experimental results.

*Keywords* : Nonlinear viscoelastic material, Automotive bushing, Pipkin-Rogers model

### I. 서론

자동차의 여러 가지 성능 중에서 주행 시 편안함과 조종 시 차량의 신뢰성을 좌우하는 승차감 및 조종안정성은 현가장치에 의하여 확보되는 동적성능이다. 현가장치는 차축과 차체를 연결하여 차체중량을 지지함과 동시에 주행 시 차축이 노면

에서 받는 진동이나 충격을 완화하여 차체에 직접 전달되지 않도록 함으로써 차체의 손상을 방지하며 노면과 휠의 이상적인 접촉을 유지하고 차체의 자세를 최적화시켜준다. 자동차의 부싱은 이러한 현가장치의 주요 부품으로 현가장치에 외력이 가해져 차량의 자세가 변할 때, 차량의 조종안정성 뿐만 아니라 승차감 등 동적 특성에 영향을 미쳐 자동차 현가장치의 성능을 결정짓는 중요한 변수로 작용한다.

<sup>†</sup>대표저자(e-mail : mechslsb@inje.ac.kr)

자동차 현가장치의 동역학적 현상을 정확히 예측하는 데 있어서 간단하면서도 정확한 부싱모델은 매우 중요하다. 일반적으로 부싱은 바깥쪽의 실린더 형 슬리브와 안쪽의 실린더 형 축 사이에서 가운데가 완전히 비어있는 실린더의 형태를 가지며, 미국 미시간 대학교 기계공학과와 자동차 구조내구성 센터(Center for Automotive Structural Durability Simulation)에서 수행한 일차원 반경방향 변위제어 실험(one-dimensional radial displacement control test) 결과, 부싱은 힘과 변위와의 관계로 모델링되며, 비압축성, 비선형성, 점탄성 성질을 가지게 확인되었다.<sup>1</sup>

점탄성에 대한 연구는 Boltzmann(1874)으로부터 시작되었으며,<sup>2</sup> Adkins와 Gent(1954)는 원통형 고무 부싱에 대해 여러 가지 실험을 통하여 힘과 변위와의 관계를 발전시켰다.<sup>3</sup> 하지만 이 연구는 선형 탄성이론을 적용하여 비선형성과 시간에 의존하는 점탄성 성질에 관해서는 설명하기가 어려웠다. Coleman과 Noll(1961)은 등방성 점탄성 고체에 대한 3차원 구성방정식을 완성하였으며,<sup>4</sup> McGuirt와 Lianis(1970)는 styrene-butadiene rubber에 대한 실험을 통하여 비선형 점탄성 구성방정식을 완성하였다.<sup>5</sup> Morman, Kao, Nagtegaal(1981)은 부싱을 비선형 점탄성 고체로서 모델링하였으며, 변형을 해석하기 위하여 유한요소법을 제안하였다.<sup>6</sup> 부싱에 대한 비선형 점탄성 모델링 연구는 Wineman(1995)에 의하여 본격적으로 수행되었으며,<sup>1</sup> Wineman, VanDyke, Shi(1998)에 의하여 기초적인 이론이 정리되었으며,<sup>7</sup> Lee(1997)에 의하여 부싱의 비선형 점탄성 모델링에 대한 연구가 계승되어 왔다.<sup>8</sup> 한편, Lee(2002)의 부싱연구는 기초 데이터를 얻는 과정에 있어서 실험에 의존하지 않고, styrene-butadiene rubber에 대한 Lianis 구성방정식을 이용하였다.<sup>9</sup> 본 연구는 실제 자동차 부싱모델을 이용하여 실험을 수행하여 비선형 점탄성 모델을 완성하였으며, 실험을 통하여 얻어진 데이터를 바탕으로 부싱에 대한 힘 완화함수(displacement-dependent force relaxation function)를 구함으로써, 새로운 비선형 점탄성 부싱 모델을 완성하였고, 이를 Pipkin-라저스 모델(Pipkin-Rogers model)이라 명명하였다.<sup>10</sup> 완성된 부

싱 모델은 실험 결과와 비교하여 검증되었다.

## II. Pipkin-라저스 모델

본 연구에서는 부싱의 축 방향 모드에 대한 힘과 변위의 관계를 고려하였으며, 폴리머의 비선형 점탄성 모델로 Pipkin과 Rogers에 의하여 제안된 식을 사용하였다. Pipkin과 Rogers(1968)에 의하여 제안된 식을 부분 적분법을 이용하여 정리하면 힘과 변위의 관계는 다음과 같다.<sup>10</sup>

$$F(t) = R(\Delta(0), t) + \int_0^t \frac{\partial R(\Delta(s), t-s)}{\partial \Delta(s)} \frac{d\Delta(s)}{ds} ds \quad (1)$$

$R(\Delta, t)$ 는 시간이 0일 때 변위가  $\Delta$ 의 크기로 점프하여, 시간이 지남에 따라 일정한  $\Delta$ 값을 갖는 스텝 변위(step displacement)가 주어졌을 때 힘  $F(t)$ 가 시간에 따라 감소하는 점탄성 성질을 나타냄으로, 이를 변위에 의존하는 힘 완화함수라 일컫는다. Pipkin-라저스 모델이라 일컫는 식 (1)은 힘과 변위의 직접 관계식으로 계산과 이용에 있어 편리한 장점을 가지고 있다. 일반적인 힘 완화함수는 다음의 Figure 1과 같이 나타내어진다.

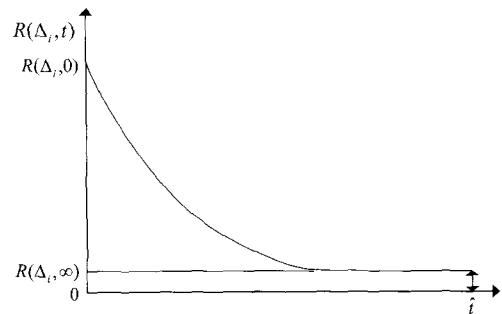


Figure 1. Displacement-dependent force relaxation function for  $\Delta(t) = \Delta_i$

## III. 실험을 통한 비선형 점탄성 모델링

본 연구에서는 부싱을 가운데가 비어있는 실린더로 가정하고, Figure 2에 나타낸 MTS 858 만능

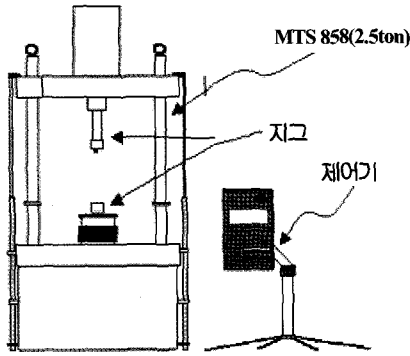


Figure 2. Experimental apparatus

피로 시험기를 이용하여 ramp-to-constant displacement control test를 실시하여 데이터를 획득하였다.

정확한 힘 완화함수를 얻기 위해서는 step displacement control test를 수행하여야 하나, 이는 장비 자체의 초기 관성력 등 여러 가지 실험조건에 의하여 수행이 불가능하다. 따라서 ramp-to-constant displacement control test를 수행하여, 여기에서 얻은 데이터를 수정하여 실험 데이터 (experimental data)로 이용하였다. 즉,  $d=0.2, 0.4, 0.6, 0.8\text{ cm}$ 의 변위를 이용하여 rise time( $T_1^*$ )을 1, 2, 4, 8 sec. 로 증가시키면서 각각의 경우에 대해  $t=70\text{ sec.}$  까지 데이터를 획득하였으며, 주어진 실험의 변위 입력 값은 식 (2)와 같다. 여기에서, rise time( $T_1^*$ )은 변위가 일정한 기울기로 증가하다가 일정한 값으로 바뀌는 시점에서의 시간을 일컫는다.

$$\begin{aligned}
 d(t) &= \frac{d_i}{T_j^*} t, & 0 \leq t \leq T_j^* \\
 &= d_i, & T_j^* \leq t \leq 70 \text{ sec.}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 i &= 1, 2, 3, 4 & j &= 1, 2, 3, 4 \\
 \left\{ \begin{array}{l} d_i = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 \text{ cm} \\ T_j^* = 1, 2, 4, 8 \text{ sec.} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

본 실험에서는 실험 결과 값을 이용하여,  $T_1^*=1\text{ sec.}$  의 변위를 이용하여,  $T_1^*=1\text{ sec.}$  이후의 데이터를 이용하여 실험데이터로 활용하였

다. 즉,  $t > T_1^*=1\text{ sec.}$  일 때의 값만을 고려하여 데이터를 획득하여, 이를 실험 데이터 (experimental data)로 활용하였으며, Figures 3, 4, 5, 6 은 변위가

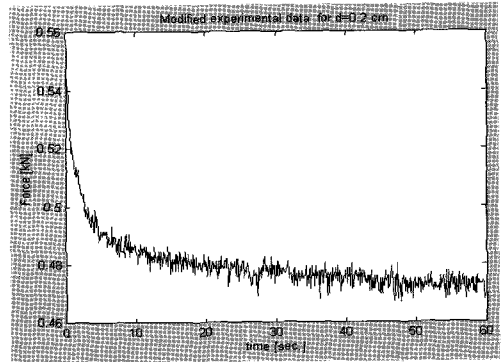


Figure 3. Experimental data for  $d=0.2\text{ cm}$

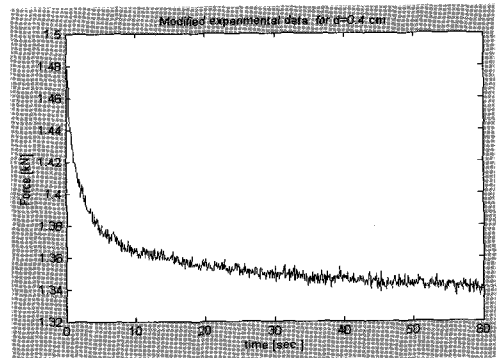


Figure 4. Experimental data for  $d=0.4\text{ cm}$

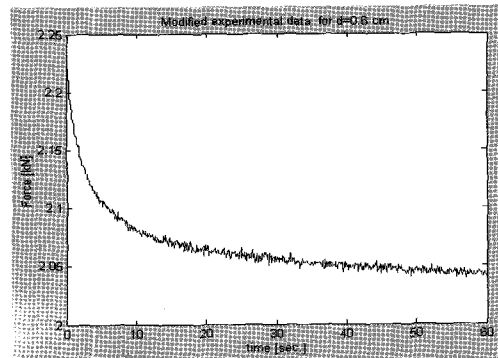


Figure 5. Experimental data for  $d=0.6\text{ cm}$

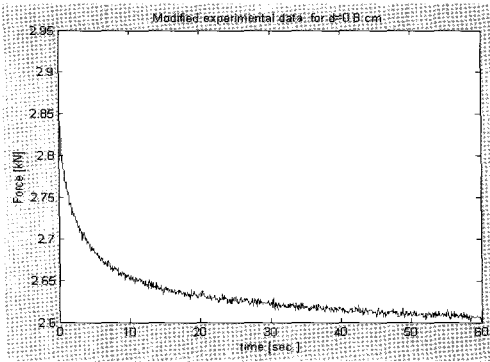


Figure 6. Experimental data for  $d=0.8\text{ cm}$

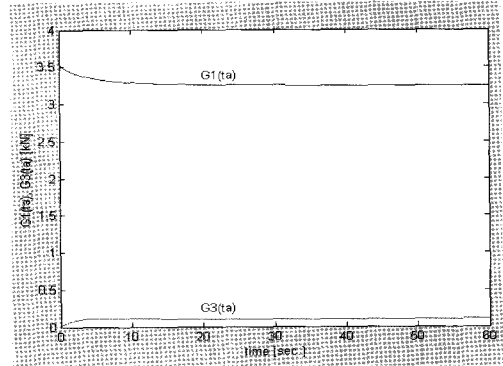


Figure 8. Coefficients:  $G_1(t_a), G_3(t_a)$

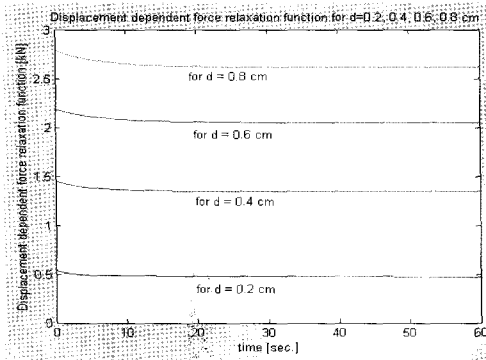


Figure 7. Displacement-dependent force relaxation functions for  $d=0.2, 0.4, 0.6, 0.8\text{ cm}$

$d=0.2, 0.4, 0.6, 0.8\text{ cm}$ 에 대한 실험 데이터를 나타내고 있다.

실험 데이터 값과 Pipkin과 Rogers에 의하여 제안된 힘과 변위와의 관계식을 바탕으로 비선형 최소 자승법(nonlinear least squares method)을 이용하여<sup>11</sup> 각각의 변위 입력 값에 대한 힘 완화함수를 구하였으며, 이를 Figure 7에 나타내었으며, 이를 변위에 의존하는 힘 완화함수 (displacement-dependent force relaxation function)라 일컬으며, 수정된 실험 데이터 (modified experimental data)로 활용하였다.

또한, 힘 완화함수는 변위의 홀수승으로 표현이 가능하므로 아래의 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.<sup>7</sup>

$$R(d, t) = dG_1(t) + d^3 G_3(t) \quad (3)$$

그리고  $0 \leq t_i \leq 60\text{ sec.}$ 에 대하여, 선형 최소 자승법 (linear least square method)을 이용하여 Figure 8에서와 같이  $G_1(t_a)$ 과  $G_3(t_a)$ 를 구하였다.

또한,  $G_1(t_a)$ 과  $G_3(t_a)$ 은 다음과 같이 지수함수의 합으로 표현할 수 있다.

$$G_i(t) = C_A + C_B^{-t/\tau_B} + C_C^{-t/\tau_C} \quad i=1, 3 \quad (4)$$

식(4)에 비선형 최소 자승법 (nonlinear least square method)을 이용하여,<sup>11</sup>  $C_{ij}$ 와  $\tau_{ij}$ 를 구한 후,  $G_1(t_a)$ 과  $G_3(t_a)$ 를 함수로 표현하면, Figures 9, 10과 같다.

따라서 자동차 부싱에 대한 쾰킨-라저스 모델은 다음과 같이 완성되었다.

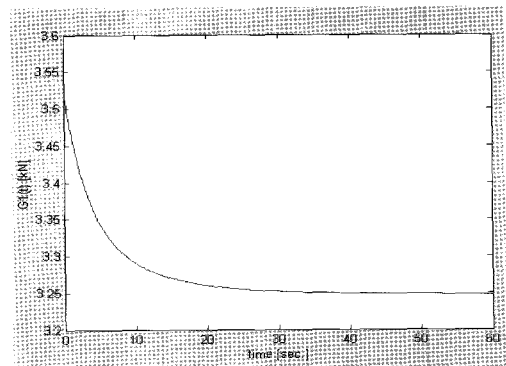


Figure 9. Coefficient:  $G_1(t)$

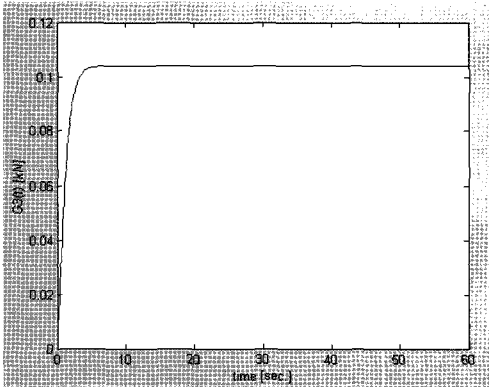


Figure 10. Coefficient:  $G_3(t)$

$$F(t) = R(d(0), t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial R(d(s), t-s)}{\partial d(s)} \frac{d}{ds} (d(s)) \right\} ds \quad (5)$$

where

$$R(d(s), t) = [C_{11} + C_{12} e^{-t/\tau_{12}} + C_{13} e^{-t/\tau_{13}}]d(s) + [C_{31} + C_{32} e^{-t/\tau_{32}} + C_{33} e^{-t/\tau_{33}}][d(s)]^3$$

$$C_{11} = 3.248, C_{12} = 0.115, C_{13} = 0.159,$$

$$\tau_{12} = 8.827 \text{ and } \tau_{13} = 3.009$$

$$C_{31} = 0.104, C_{32} = -1.876, C_{33} = 1.778,$$

$$\tau_{32} = 0.695 \text{ and } \tau_{33} = 0.666$$

#### IV. 비선형 점탄성 모델의 오차 해석

픽킨-라저스 모델의 효용성을 입증하고자 실험을 통해 얻어진 결과와 픽킨-라저스 모델의 결과를  $0 \leq t \leq 60 \text{ sec.}$  동안 각각의 변위 입력 값에 대해 아래의 식 (6)을 이용하여 상대오차( $E$ )를 확인하였다.

$$E = \frac{\| (Pipkin Rogers outputs) - (Experimental results) \|_2}{\| Experimental results \|_2} \times 100(\%) \quad (6)$$

Figures 11, 12는 식 (6)을 이용하여  $d=0.4, 0.6 \text{ cm}$ 의 변위 입력 값에 대한 Figure 7에 나타나 있는

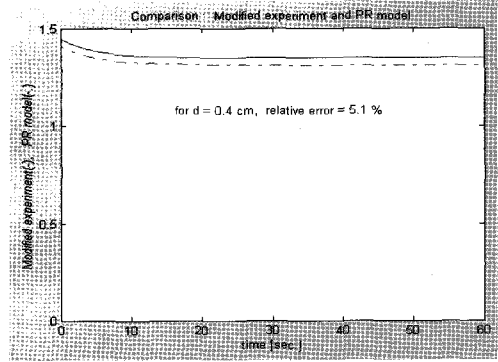


Figure 11. Comparison: Modified experiment and PR model for  $d=0.4 \text{ cm}$

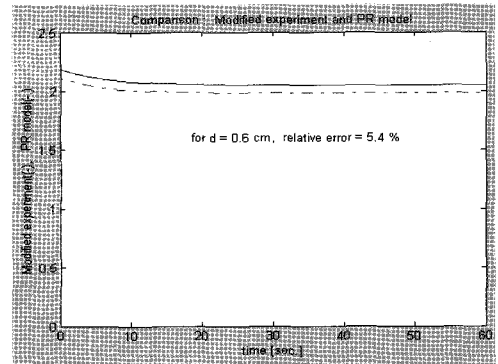


Figure 12. Comparison: Modified experiment and PR model for  $d=0.6 \text{ cm}$

수정된 실험값 (modified experimental results)과 픽킨-라저스 모델의 결과 값을 비교하여 나타낸 그림이다.

Figures 11, 12를 통하여 알 수 있듯이 각각의 변위 입력 값에 대한 실험 결과 값과 픽킨-라저스 모델을 이용한 결과 값의 상대오차는 약 5%로서 비선형 점탄성 모델이 신뢰도를 가지고 있음을 알 수 있다. 또한, Figures 11, 12외에 많은 경우에 대하여 실험을 수행하였으며, 새로운 비선형 점탄성 모델의 결과가 실험 결과에 대하여 상대오차가 20% 이하로서 비교적 잘 일치함을 알 수 있었다.

본 연구는 실험을 수행함에 있어서, 변위의 범위를  $0.2 \sim 0.8 \text{ cm}$ 로 제한하였으며, 이 범위를 벗어난 경우에는 오차의 크기가 커질 것이 명백하다. 따라

서 실제 자동차 부싱에 대한 연구를 수행함에 있어서는 주행 중에 발생하는 변위의 크기를 정확히 예측하여 이에 대한 변위를 결정하고 이에 따라서 부싱의 비선형 점탄성 모델링을 수행하여야 할 것이다. 본 연구는 부싱의 실험적 연구로서, 새로운 비선형 점탄성 모델링을 실험을 통하여 수행하였으며 실험적 어려움으로 인하여 부싱의 축방향 모드에 국한하여 수행되었다.

### V. 결 론

본 연구에서는 자동차 부싱을 기존의 응용역학적 방법에서 한 걸음 더 나아간 힘과 변위와의 직접 관계식을 이용하여 보다 정확한 부싱 모델을 얻고자 하였으며, 연구를 실험에 의존하여 수행함으로써 실제 자동차 부싱모델에 이용할 수 있는 근거를 마련하였다. 또한, 이러한 부싱모델은 자동차 현가장치에 대한 다물체 동역학 모델을 완성하는 데 유용하게 이용되리라 사료된다.

향후의 연구에 있어서는 축 방향 모드뿐만 아니라 반경 방향 모드, 원주 방향 모드 등 다양한 모드에 대하여 실질적이고 광범위한 실험 데이터를 바탕으로 부싱에 대한 연구를 수행하여야 하며, 이는 지속적인 연구를 통하여 수행될 예정이다. 또한, 부싱에 대한 기본적인 모델링과 더불어, 모델에 대한 주파수와 변위의 영향에 대한 연구가 함께 수행되어야 할 것이다.

### 감사의 글

본 논문은 2003년도 인제대학교 학술연구조성비 보조에 의한 것임.

### 참 고 문 헌

1. Ford Durability Center at The University of Michigan Project Review (1995).

2. L. Boltzmann, "Zur Theorie der Elastischen Nachwirkungen", *Sitzungsber. Kai-serlich Akad. Wissen Math. Naturwissen*, **70**, 275 (1874).

3. J. E. Adkins, and A. N. Gent, "Load-deflection relations of rubber bush mountings", *British Journal of Applied Physics*, **5**, 354 (1954).

4. B. D. Coleman and W. Noll, "Foundations of Linear Viscoelasticity", *Reviews of Modern Physics*, **33**, 239 (1961).

5. C. W. McGiurt and G. Lianis, "Constitutive Equations for Viscoelastic Solids under Finite Uniaxial and Biaxial Deformations", *Transactions of the Society of Rheology*, **14:2**, 117 (1970).

6. K. N. Morman, B. G. Kao and J. C. Nagtegaal, "Finite Element Analysis of Viscoelastic Elastomeric Structures Vibrating About Nonlinear Statically Stressed Configurations", *Fourth International Conference on Vehicle Structural Mechanics, Society of Automotive Engineers, Detroit, Michigan*, 83 (1981).

7. A. S. Wineman, T. VanDyke and S. Shi, "A nonlinear viscoelastic model for one dimensional response of elastomeric bushings", *International Journal of Mechanical Sciences*, **40**, 1295 (1998).

8. S. B. Lee, "A Study of A Nonlinear Viscoelastic Model of Elastomeric Bushing Response", Ph. D. Thesis, The University of Michigan, Ann Arbor, 1997.

9. S. B. Lee, "A Study of Lianis Model for Elastomeric Bushing in Axial Mode", *Elastomer*, **37:3**, 151 (2002).

10. A. C. Pipkin and T. G. Rogers, "A Non-Linear Integral Representation for Viscoelastic behavior", *J. of the Mechanics and Physics of Solids*, **16**, 59 (1968).

11. J. E. Dennis, "Nonlinear Least Squares and Equations", *The State of the Art in Numerical Analysis*, Academic Press, New York, 1977.