

초탄성 고무 물성평가를 위한 구형 압입시험의 수치접근법

이진행* · 김동욱** · 이형일†

서강대학교 대학원 기계공학과 · 현대엔지니어링 · 서강대학교 기계공학과
(2003년 12월 17일 접수, 2004년 3월 4일 수정 및 채택)

Numerical Approach Technique of Spherical Indentation for Material Property Evaluation of Hyper-elastic Rubber

Jin Haeng Lee*, Dong Wook Kim**, Hyungyil Lee†

*Department of Mechanical Engineering, Sogang University

**Hyundai Engineering

(Received December 17, 2003, Revised and Accepted March 4, 2004)

요약: 본 연구에서는 먼저 유한요소해석을 통해 주요 물성계수들이 압입시 하중-변위 곡선형상에 미치는 영향을 분석하였다. 또한 유한요소 압입해석을 통해 마찰계수의 영향으로 하중-변위 곡선, 시편하부의 단위부피당 변형에너지 및 변형률 주불변량이 바뀌지 않는 최적 압입깊이와 시편하부지점을 선정하였다. 이러한 관찰을 통해 하나의 요소에서 얻어지는 단위부피당 변형 에너지와 변형률 주불변량을 하중-변위 데이터와 모사 시킬 수 있는 무차원 함수를 얻을 수 있었으며, 이 과정에서 예측된 물성계수를 바탕으로 공칭응력-공칭변형률 곡선을 얻을 수 있었다.

ABSTRACT : In this work, effects of hyper-elastic rubber material properties on the indentation load-deflection curve and subindenter deformation are first examined via finite element (FE) analyses. An optimal data acquisition spot is selected, which features maximum strain energy density and negligible frictional effect. We then contrive two normalized functions, which map an indentation load vs. deflection curve into a strain energy density vs. first invariant curve. From the strain energy density vs. first invariant curve, we can extract the rubber material properties. This new spherical indentation approach produces the rubber material properties in a manner more effective than the common uniaxial tensile/compression tests. The indentation approach successfully measures the rubber material properties and the corresponding nominal stress-strain curve.

Keywords : Hyper-elastic Rubber, Spherical Indenter, Material Property, Strain Energy Density, Invariant of Principal Stretches

I. 서론

압입시험법은 인장시험법 등이 적용되기 어려운 부위의 물성측정에 사용된다. 즉 국부영역에서 재료성질이 연속적으로 변하는 부위, 균열성장 제어가 어려운 취성재료 또는 현재 사용부와 같이 기

존 시험법이 적용되기 어려운 부위의 물성측정에 압입시험기를 사용할 수 있다. 압입시험법은 재료 물성치들을 측정함에 있어 그 조작법의 간단함과 더불어 비파괴적이라는 특징을 갖는다. 이와 같은 이유로, 압입시험법은 금속재료를 포함한 다양한 재료에 상당히 유용하게 적용될 수 있으나, 압입시험 데이터 분석의 어려움으로 인해 실제 실효성에 서는 아직 크게 못 미치고 있다. 이에 최근 몇몇

†대표저자(e-mail : hylee@sogang.ac.kr)

연구를 통하여 정교한 유한요소해석을 이용한 압입시험법이 개발되었으며,^{1,4} 또한 이를 이용한 금속 및 박막에 대한 다양한 물성치를 얻는 연구가 지속되고 있다.

이와 같은 압입시험법은 다양한 재료에 대해 확장 적용이 가능하며, 산업 전반에 걸쳐 광범위하게 쓰이는 고무의 물성평가에 이용될 수 있다. 고무 재료는 금속재료와는 달리, 큰 탄성변형, 회복, 완충 등과 같은 독특한 성질을 갖는다. 특히 고무 부품 제작과정 중 발생하는 화학적 변화, 사용중 기계적 성질 변화는 물론이고 사용방법에 따라 서로 다른 기계재료보다 빠른 시효현상, 특히 경화 현상을 보인다. 이러한 성질은 고무제품이 진동이나 충격을 차단하지 못하거나, 고무 실링에서의 누설과 같은 기능저하로 이어져 종국적으로 제품의 전체 성능에 영향을 끼친다.⁵ 그러나 고무재료의 중요성에 비해 그에 관한 연구들은 부품설계적 측면에서의 만족성이나 실용성과는 상당한 거리가 있다. 이로 인해 정확한 기계적 성질이나 내구수명 등을 부품 설계단계에서 평가할 수 없어, 고무부품의 성능 및 내구수명은 표준시편보다는 부품 자체를 이용한 시험으로 평가하곤 한다. 이러한 경험적 설계방법에서 벗어나기 위해서는 보다 체계적이고 신뢰성 있는 고무 재료거동에 측정방법이 요구된다.⁶ 이러한 요구에 대한 부응으로 고무의 기계적 거동을 보다 정확히 기술하고자 하는 연구들이 일부 수행되고 있으나⁷ 보편성 및 정밀성 등에서 크게 미흡한 실정이다.

이에 별도의 표준시편을 제작하지 않고서도 초탄성고무의 구성방정식인 변형에너지 함수의 계수들을 측정할 수 있는 압입시험법을 적용하기 위하여, 유한요소해에 기초한 고무 물성평가 압입이론을 개발하고자 한다. 이를 위해 먼저 상대적으로 변형률의 구배가 적으면서 동시에 마찰계수의 영향도 적은 지점을 압입관측지점으로 선정하여 이를 기준으로 정교한 압입이론식을 도출하였으며, 이로부터 고무재료 물성평가 프로그램을 개발하였다. 이를 통해 고무부품 물성평가의 정확성과 환경 및 변형이력 평가, 그에 따른 내구평가의 신뢰성 향상에 크게 기여할 수 있다.

II. 초탄성 고무모델의 구성방정식의 선정

고무 변형은 비선형, 비압축성 (또는 약간의 압축성), 대변형의 특성이 있고, 그 변형양상도 고무의 화학적 구성 성분에 따라 큰 차이를 보인다. 이같이 다양한 고무거동을 특성화하기 위해 여러 형태의 변형에너지 함수가 보고되었다. 이에 따르면 변형에너지는 크게 아래와 같이 주불변량 (principal invariant) 또는 주연신율 (principal stretch)에 대한 함수형태로 표현된다.

$$W = W(I_1, I_2, I_3) = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (1)$$

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (2)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \quad (3)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (4)$$

여기서 W 는 단위부피당 변형에너지 (strain energy density)이며, I_1, I_2, I_3 는 식 (2)-(4)에서 나타난 바와 같이 주연신율 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 에 대한 불변량들이다. 위 식 (1)에는 등방성 재료라는 가정이 포함되어 있다. 고무재료를 비압축성으로 고려하면 $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ 이므로 $I_3 = 1$, $I_2 = 1/\lambda_1^2 + 1/\lambda_2^2 + 1/\lambda_3^2$ 이다. 현재 유한요소 프로그램에 폭넓게 사용되고 있는 변형에너지 함수로 Rivlin⁸이 제안한 식 (5)와 같은 형태의 수식이 쓰이고 있다. 대부분의 고무 재료는 비압축성이므로 $I_3 = 1$ 인 조건을 사용하면 식 (5)는 식 (6)과 같은 형태로 줄일 수 있다.

$$W = \sum_{ijk=0}^{\infty} A_{ijk} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j (I_3 - 3)^k \quad (5)$$

$$W = \sum_{ij=0}^{\infty} A_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (6)$$

식 (6)의 멱급수 형태에서 각 항의 선택에 따라 아래 같은 대표적 변형에너지 함수형태들로 표현된다.

Neo-Hookean-모델

$$W = A_{10}(I_1 - 3) \quad (7)$$

Mooney-Rivlin-모델

$$W = A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(I_2 - 3) \quad (8)$$

여기서 A_{10}, A_{01} 는 재료상수로, 인장실험에서의 응력-변형률 관계를 곡선회귀하여 얻을 수 있다. 두 개의 계수를 가진 MR-모델은 수학적 간편성과 그 계수값들의 물리적 의미로 인해 널리 활용된다. 그러나 MR-모델은 연신율이 큰 구간에서는 다양한 종류의 고무에 대한 응력-변형률 관계를 정확하게 표현할 수 없다. 일반적으로 MR-모델은 2보다 작은 연신율까지만 실험데이터를 잘 설명하고, 그 이상의 연신율 구간에서는 적용이 곤란한 단점이 있다.

한편 큰 변형률 구간의 고무물성을 정의하기 위하여 다음과 같은 Ogden-모델⁹이 널리 사용된다.

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad (9)$$

연신율 2이하에서 아주 정확한 MR-모델과 연신율 2이상에서 정확한 Ogden-모델은 각각의 장단점으로 인해 실험 및 해석시 선택적으로 사용된다. 즉 사용목적에 따라 구성방정식은 달라질 수 있다. 이러한 이유로 위의 MR-모델과 Ogden-모델 외에도 아래식 (10)-(11)과 같은 모델들이 연구목적에 맞게 개발되었다.

Yeoh-모델

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_1 - 3)^2 + C_3(I_1 - 3)^3 \quad (10)$$

Arruda-모델

$$W = \mu \left[\frac{1}{2}(I_1 - 3) + \frac{1}{20\lambda_m^2}(I_1^2 - 9) + \frac{11}{1050\lambda_m^4}(I_1^3 - 27) \right] \quad (11)$$

MR-모델은 계수들의 상대적 단순·간편성으로 많이 이용되나 연신율 2이상의 구간에서는 정확하지 않은 단점이 있다. Ogden-모델은 대변형 구간에서 실험데이터와 매우 정확히 일치하는 장점이 있는 반면, 계수들의 복잡함과 일관성 결여로 인해 실제 물성계수들의 측정시 많은 어려움이 있어 현실성이 떨어진다. 두 모델들의 장점을 살릴 수 있는 또 다른 모델로 식 (10)의 Yeoh-모델¹⁰이 있다. Figure 1은 각 구성방정식 모델에 따른 응력-변형률 곡선을 보여주는데, Yeoh-모델은 변형률 2.8까지의 대변형 구간을 정확히 기술하고 있다. 식 (10)과 같이 단지 3개의 물성계수들과 주불변량 I_1

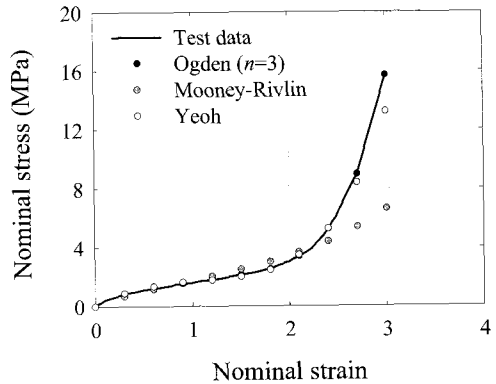


Figure 1. Stress vs. strain curves from various constitutive models

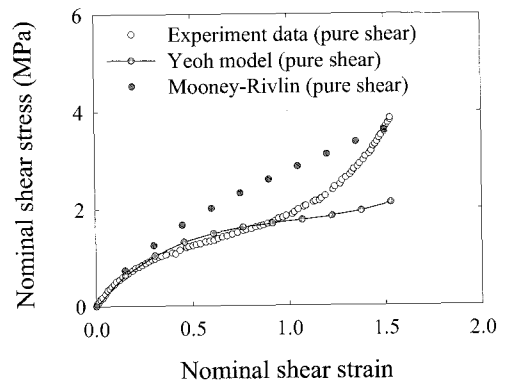


Figure 2. Comparison of shear stress vs. shear strain curves from two constitutive models with the experimental one

으로 정의되는 간편성에 비추어 보면 Yeoh-모델이 Ogden-모델보다 훨씬 실용적임을 확인할 수 있다. 무엇보다도 Yeoh-모델의 장점은 인장과 전단시험에서 서로 다른 물성계수가 얻어지는 MR-모델이나 Ogden-모델과는 달리 두 시험에서 동일한 물성계수를 얻을 수 있다는 점이다.¹¹ Figure 2는 인장시험에서 구한 각 모델의 물성계수를 이용해 전단시험시의 응력-변형률 곡선을 예측해 실제 전단 데이터와 비교한 결과이다.

Figure 2에서 MR-모델은 실제 전단시험 데이터와 많은 차이를 보이고 있는 반면 Yeoh-모델은 연신율 2까지 정확한 값을 예측해 준다. 따라서 본 연구에서는 이와 같이 간편·정확성을 겸비한 실용적 Yeoh-모델을 물성평가용 모델로 채택하였다.

Ⅲ. 압입시험 유한요소 모델링 및 해석

1. 압입시험 유한요소모델

구형압입자를 이용한 재료의 압입시험은 Figure 3(a)와 같이 간단화된 그림으로 표현될 수 있다. 여기서 하중과 형상이 모두 축대칭임을 고려

하여 Figure 3(b)와 같은 축대칭 유한요소모델을 형성하였다. 유한요소해석시 고무소재의 비압축성을 고려해 4절점 축대칭 혼합요소 CAX4H (요소형태 ABAQUS Library, 2002)¹²를 사용한다. 이 때 CAX8H 요소보다 보간함수가 한 차수 낮은 것을 보완하며 미세변형까지 충분히 감지할 수 있도록 압입하부 표면에 압입자 직경의 0.18% 크기의 미세요소를 배치하였다. 요소 크기가 바뀌는 경계지점에서는 대개 MPC (Multi-Point Constraints, ABAQUS Library, 2002)¹²가 간편하게 사용되나, 이 경우 MPC가 사용되는 절점상의 응력과 변형률이 불균일한 단점이 발견된다. 이에 따라 압입접촉부 근처의 요소크기 천이영역에는 사다리형 요소를 사용하였으며, 접촉부에서 충분히 떨어진 위치에서만 MPC 모델링을 하였다. 또한 압입자는 모재에 비해 영률이 상대적으로 매우 크므로 변형이 없는 강체표면 (Rigid Surface, ABAQUS Library, 2002)¹²을 사용하였다. 이러한 모재와 압입자의 최종 유한요소모델은 각각 약 6200개와 800개의 사각형 4절점 축대칭 혼합요소들로 구성된다 (Figure 4). 압입자와 모재의 접촉면에는 압입자와 모재 모두 접촉

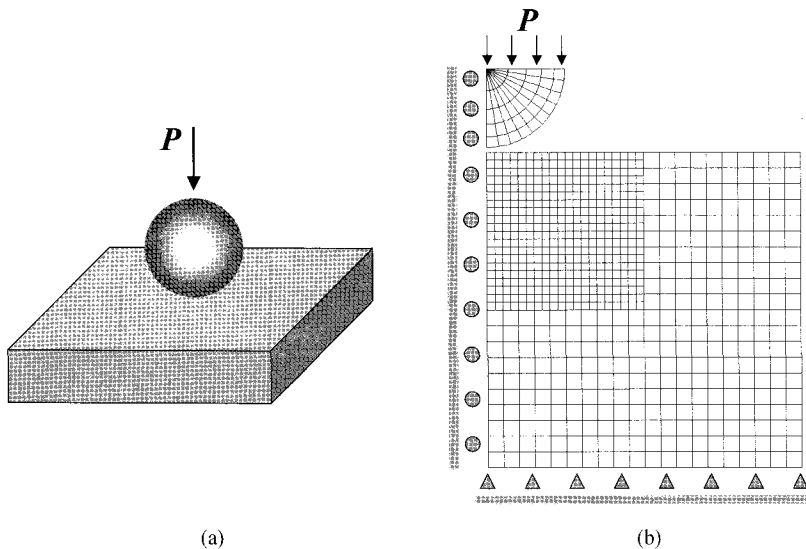


Figure 3. (a) Schematic of indentation test model using spherical indenter
(b) FE mesh for investigating typical effects of friction coefficient and material properties

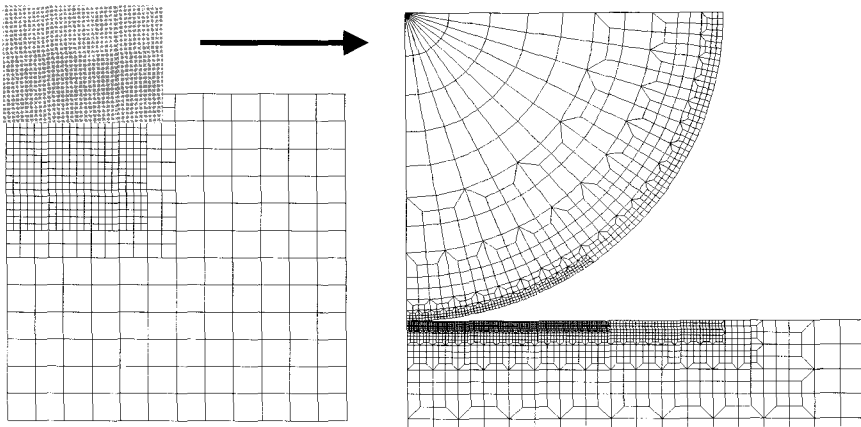


Figure 4. Refined FE mesh for indentation analyses

Table 1. Material properties used for FE analyses

모재 물성	사용 변수범위
마찰계수 (μ)	0.075, 0.1, 0.2
C_1	0.5 ~ 1.2 N/mm ²
C_2	-0.1 ~ -0.01N/mm ²
C_3	0.001 ~ 0.01N/mm ²

요소면 (Contact Surface, ABAQUS Library, 2002)¹²을 배치한다. 압입자와 모재의 대칭축상 절점들은 대칭축에 수직방향 변위성분을 구속하여 축대칭 조건을 만족시키고, 모재 밑면은 완전 구속시킨 후, 압입자를 하강시킨다. 압입자는 직경 1mm의 강체로 모델링하여 압입자변형은 고려치 않는 해석을 실시하였다. 주요 물성변수들이 압입시 하중-변위 곡선 형상에 미치는 영향을 분석하기 위해 Table 1과 같이 마찰계수를 포함한 Yooh-모델의 재료상수로 4가지 변수들을 설정하였다. 설정된 값들은 그 범위에 있어 천연 가황고무의 특성을 포괄적으로 포함하고 있음을 주목할 필요가 있다.

2. 압입변형형상 및 하중-변위 곡선 특성

축대칭 조건을 적용한 유한요소해석에서 모재 변형형상을 살펴보면 Figure 5와 같다. 그림에서 하중시 모재 변형과 Mises 등가응력 분포를 볼 수 있으며, 주요 변형특성으로 압입자 주변 모재의

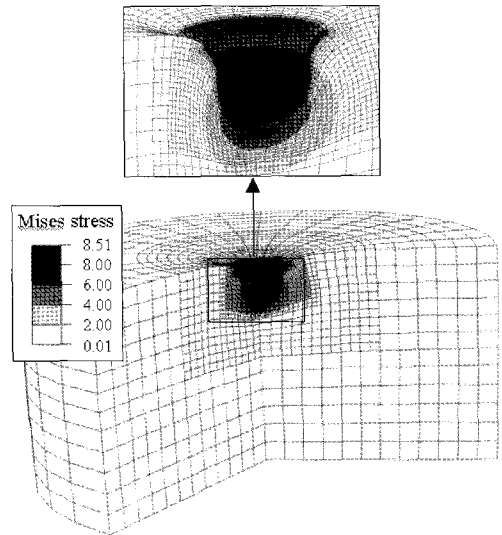


Figure 5. Refined FE mesh for indentation analyses

sink-in을 볼 수 있다. 또한 원통형 모재의 일정 중심하부에 응력이 집중되는 것을 보여주는데, 이는 Hertz의 탄성해와 일치하는 특성이다.

압입시험의 전산모사를 통하여 마찰계수, C_1 , C_2 , C_3 등 주요변수들의 하중-변위 곡선에 대한 영향을 살펴보았다 (Figures 6-7). Figure 6는 마찰계수 변화에 따른 압입하중-변위곡선이다. 일반 고무 재료와 강구 압입자와의 마찰계수는 오일윤활일 경우 0.09-0.13으로 평가된다.¹³ Figure 6와 같이 최대

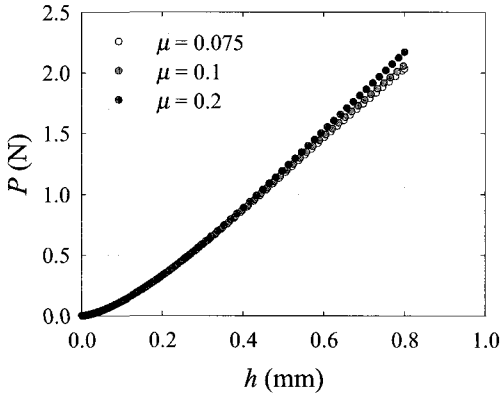


Figure 6. Force vs. indentation depth curves for various frictional coefficients

$h/D = 0.8$ 까지 압입할 경우 마찰계수에 따른 하중-변위 곡선이 $h/D = 0.4$ 이후로 명확한 차이를 보인다. 이는 같은 재료라 할지라도 압입깊이가 $h/D = 0.4$ 이상일 경우 마찰계수에 따라 다른 하중-변위 곡선을 얻게됨을 의미한다. 따라서 마찰계수의 영향을 받지 않는 최대 압입깊이로 $h/D = 0.4$ 를 선정하였다. Figure 7은 재료상수 변화에 따른 하중-변위 곡선을 보여준다. 그림에서 C_1, C_2 가 증가할수록 동일 압입깊이에서의 하중은 증가하나 C_3 변화에 따라서는 하중-변위 곡선이 크게 바뀌지 않음을 알 수 있다.

IV. 압입변형특성

1. Yeoh-모델에서의 변형에너지변화

Figure 6에서 마찰계수가 하중-변위곡선에 영향을 주지 않는 최대 압입깊이가 $h/D = 0.4$ 임을 알 수 있었다. 그러나 마찰계수가 하중-변위 곡선에는 영향을 주지 않더라도 시편하부의 변형상태에는 영향을 줄 수 있다. 이에 Yeoh-모델에서 마찰계수 변화에 따른 압입하부 변형에너지를 살펴보았다. Figures 8-9은 실제 마찰계수의 상하한값을 선정해 압입모사 후, 후처리과정 (*.fil file, ABAQUS Library, 2002)¹²을 거쳐 마찰계수, 압입깊이, 시편하부 깊이별 (단위부피당) 변형에너지 변화를 살펴 보았다. 여기서 r 은 시편중양에서부터 반경방향

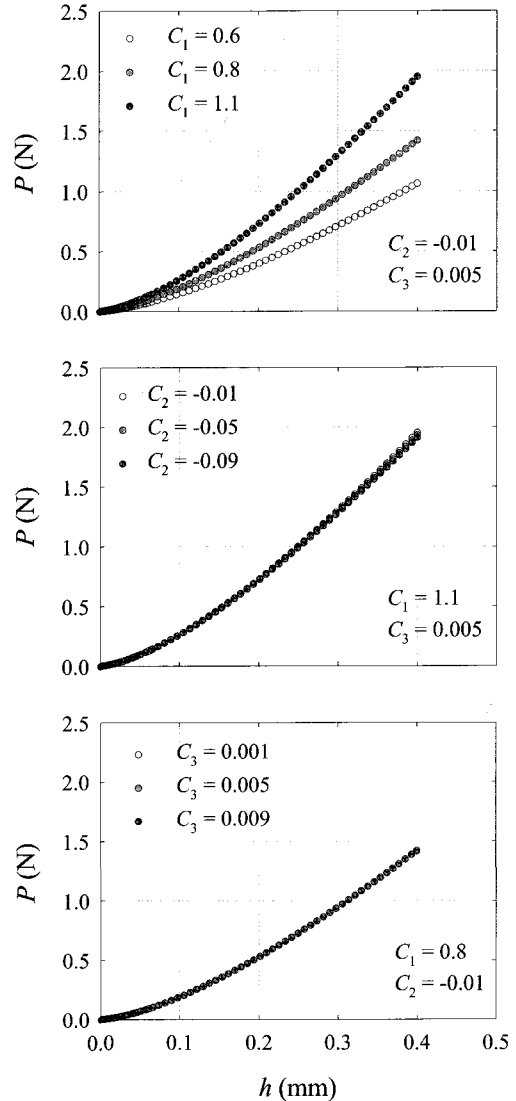


Figure 7. Force vs. indentation depth curves for various values of material properties

으로의 직선거리를 나타내며, l 은 재료표면으로부터 표면하부의 관측깊이를 나타낸다. 재료상수 C_1, C_2, C_3 가 결정되면 식 (9)로 주어진 Yeoh-모델에서의 변형에너지와 변형률불변량은 항상 *self-adjust* 관계를 유지하므로 변형률불변량의 변화 그림들은 생략하였다. Figures 8-9은 압입자 직경의 10, 20, 30, 40% 압입시 시편중심 하부 6.5, 15, 25, 35, 45, 50% 지점별 변형률에너지변화에 대한 유한요소해

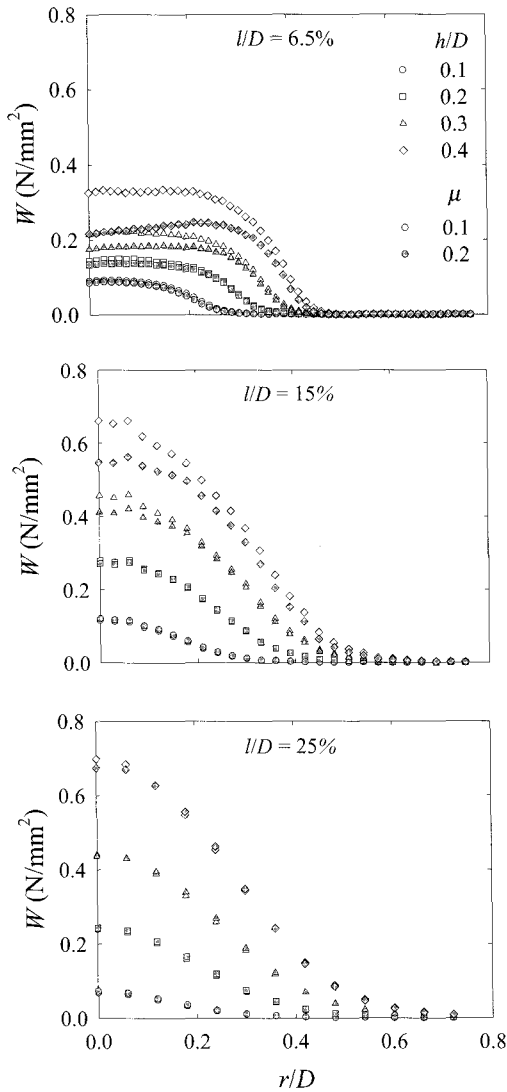


Figure 8. Distribution of strain energy per unit volume at the depth of $l/D = 0.065$, $l/D = 0.15$, $l/D = 0.25$, from the contact surface

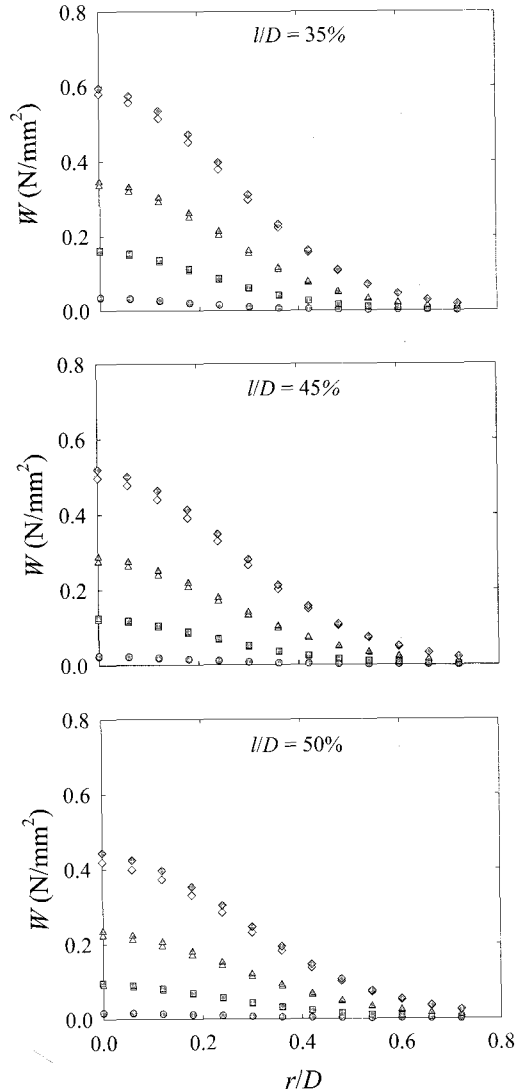


Figure 9. Distribution of strain energy per unit volume at the depth of $l/D = 0.35$, $l/D = 0.45$, $l/D = 0.5$, from the contact surface

이다. 시편중심 하부 6.5, 15% 지점에서의 변형 에너지는 마찰계수 변화에 민감함을 보여주는 반면 25, 35, 45, 50% 지점에서는 마찰계수의 영향이 현저히 줄어들어 있는 것을 볼 수 있다. 오일윤활시 고무재료와 강구 압입자와의 마찰계수 범위가 0.09-0.13인 점을 감안한다면 압입하부 25%지점 이상에서의 마찰 영향은 무시할 수 있다. 이에

본 연구에서는 마찰계수의 영향을 받지 않고 최대변형에너지를 얻을 수 있는 압입하부 25% 지점을 최적 관측지점으로 선정하였다.

2. 새 압입이론의 전개

앞 절에서 선정된 시편중심하부 ($l/D = 25\%$)의 변형률에너지의 곡선형태를 근거로 고무 물성

평가 압입이론을 전개하였다. 압입자 직경의 40% 압입으로부터 C_1 , C_2 , C_3 변화에 따른 응력-변형률 곡선의 변화추이를 Figure 10을 통하여 살펴보았다. 여기서 공칭변형률 (nominal strain) 1 이하일 경우 C_1 과 C_2 는 응력-변형률곡선에 영향을 주지만 C_3 는 공칭변형률 1보다 큰 구간에서만 영향이 있음을 볼 수 있다. 실제 상용고무 부품의 해석시

공칭변형률의 범위가 1이상인 경우는 거의 없으므로 본 연구에서는 우선적으로 C_3 를 대표값 (0.005)으로 설정한 후 압입이론을 전개하였다. 응력-변형률 관계로 직접 표현되는 금속재료의 구성방정식과는 달리 Yeoh-모델의 고무 구성방정식은 식 (9)같이 단위부피당 변형에너지 W , 연신률 불변량 I_1 , 물성계수 C_1 , C_2 , C_3 로 표현된다. 이들 물성계수들을 알면 바로 해당 고무재료를 이해하는 것이 되므로 이들 계수들을 구하는 것이 본 연구의 핵심이다. 실제 압입시험에서 얻을 수 있는 데이터는 40% 압입시의 하중 (P)과 압입깊이 (h)이므로 이를 고려한 압입이론 전개가 필요하다. 이를 위해 $P-h$ 곡선을 변형률에너지 (W)와 변형률불변량 (I_1) 평면상의 대응곡선으로 사상시키는 무차원함수를

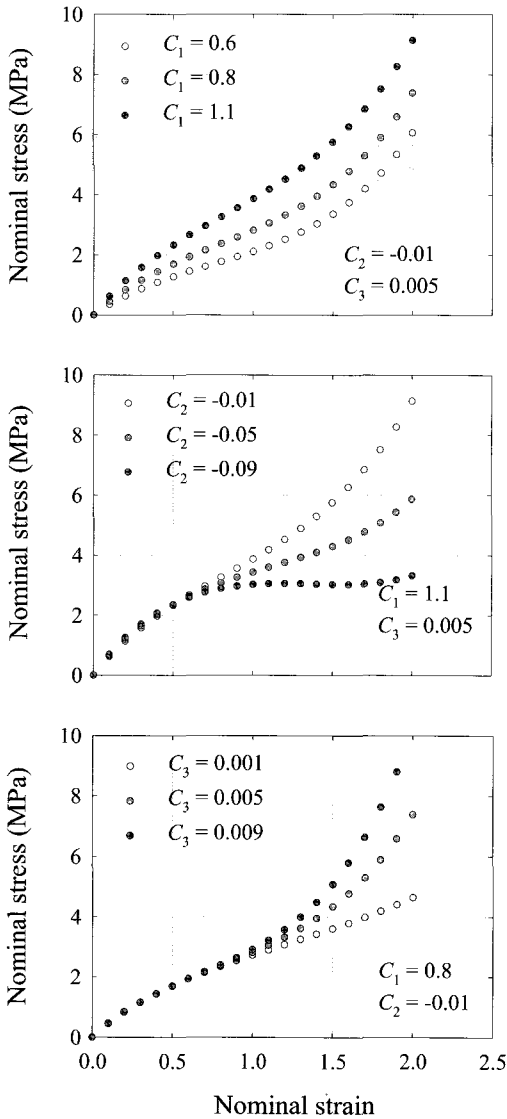


Figure 10. The stress-strain curves for various values of material coefficients

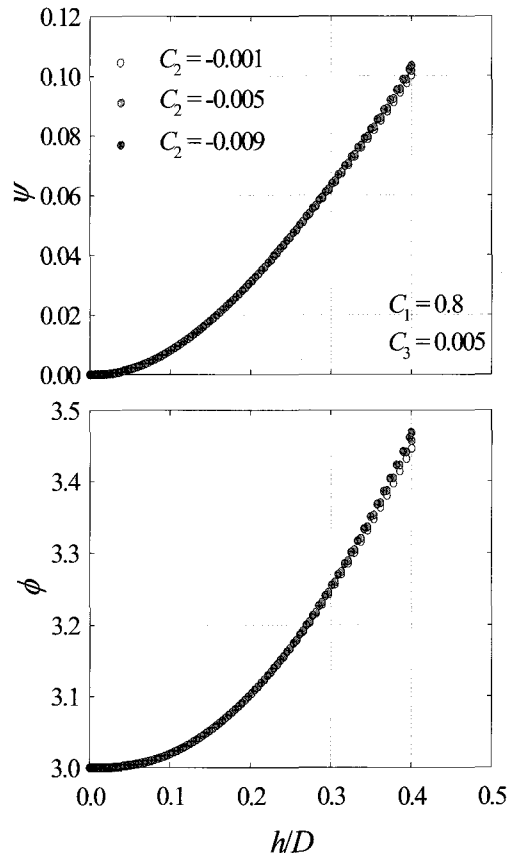


Figure 11. Constraint factor ϕ , ϕ vs. indentation depth for various values of material property C_2

도입하였다. 이 함수들은 아래 식 (12)-(13)과 같으며 ψ , ϕ 의 대표적인 예를 Figure 11에 나타내었다.

$$\psi \equiv WhD/P \tag{12}$$

$$\phi \equiv I_1 \tag{13}$$

Table 1에서 제시한 상용 천연 가황고무가 가지는 일반적인 C_1 , C_2 의 범위에 대한 유한요소 해석을 실시하면 시편 중심 하부 25% 지점 요소에서 압입깊이에 따른 W 와 I_1 값을 구할 수 있다. 또한 위 식 (12)-(13)을 사용하면 ψ 와 ϕ 값을 압입깊이에 대한 함수로 얻을 수 있으며, 이를 다항식 형태로 표현할 수 있다. 이와 같은 과정을 광범위한 고무물성치에 대해 수행하면, 이 다항식의 계수들을 고무물성치의 함수로 나타낼 수 있다. 아래식 (14)- (15)는 이와 같은 과정을 거쳐 얻은 압입깊이 및 고무물성치에 대한 통합함수들이다.¹⁴

$$\psi = \sum_{i=0}^3 f_i^\psi(C_1, C_2) \left(\frac{h}{D}\right)^i \tag{14}$$

$$f_i^\psi(C_1, C_2) = \sum_{j=0}^2 \left(\sum_{k=0}^3 \alpha_{ijk} C_1^k \right) C_2^j$$

$$\phi = \sum_{i=0}^3 f_i^\phi(C_1, C_2) \left(\frac{h}{D}\right)^i \tag{15}$$

$$f_i^\phi(C_1, C_2) = \sum_{j=0}^2 \left(\sum_{k=0}^3 \beta_{ijk} C_1^k \right) C_2^j$$

식 (12)-(13)으로 표현되는 무차원함수들은 차원 해석을 통하여 얻어지는 함수들 중 식 (14)-(15)의 회귀에 용이한 함수를 채택한 것이다. Figures 12-13은 압입시험 모사에서 얻은 $P-h$ 곡선으로부터 식 (12-15)를 이용하여 구한 $W-h$, I_1-h 와 실제 유한요소해로 구한 $W-h$, I_1-h 를 비교한 그림이다.

3. 추가 압입에 의한 C_3 계산

압입깊이 $h/D = 0.4$ 에서 우선적으로 C_1 , C_2 를 구한 후, 추가적으로 $h/D = 0.8$ 까지 압입하여 이때의 P 로써 C_3 를 구하고자 한다. Figure 14은 $h/D = 0.8$ 까지 압입시 주어진 C_1, C_2 에서 압입

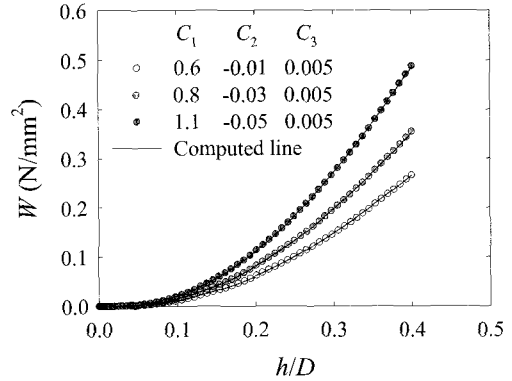


Figure 12. Comparison of computed strain energy (mapped by ψ) vs indentation depth to those given for various values of material properties

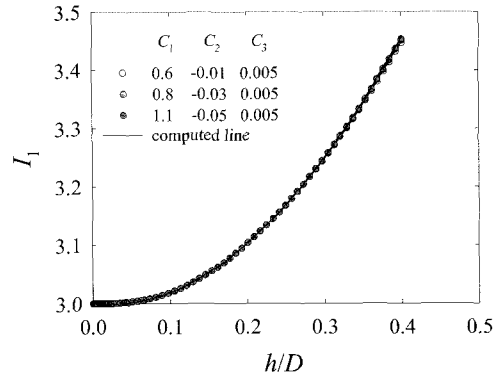


Figure 13. Comparison of computed strain invariant (mapped by ϕ) vs. indentation depth to those given for various values of material properties

하중에 따른 C_3 의 변화 경향을 보여준다. 여기서 $P-C_3$ 상관관계를 아래식 (16)과 같은 하중에 대한 다항식 형태로 표현할 수 있다.

$$C_3 = f^C(P) = \sum_{i=0}^2 \gamma_i(C_1, C_2) \left(\frac{P}{D^2}\right)^i \tag{16}$$

여기서 압입하중 (P)을 압입자 직경 (D)의 제곱으로 나누어준 이유는 동일 압입깊이비 (h/D)로 압입할 경우 압입자 직경과 관계없이 동일한 $P/D^2-h/D$ 곡선을 얻을 수 있기 때문이다. Figure 14로부터 식 (16)의 $\gamma_i(C_1, C_2)$ 를 다음과 같이 C_1, C_2 로 표현

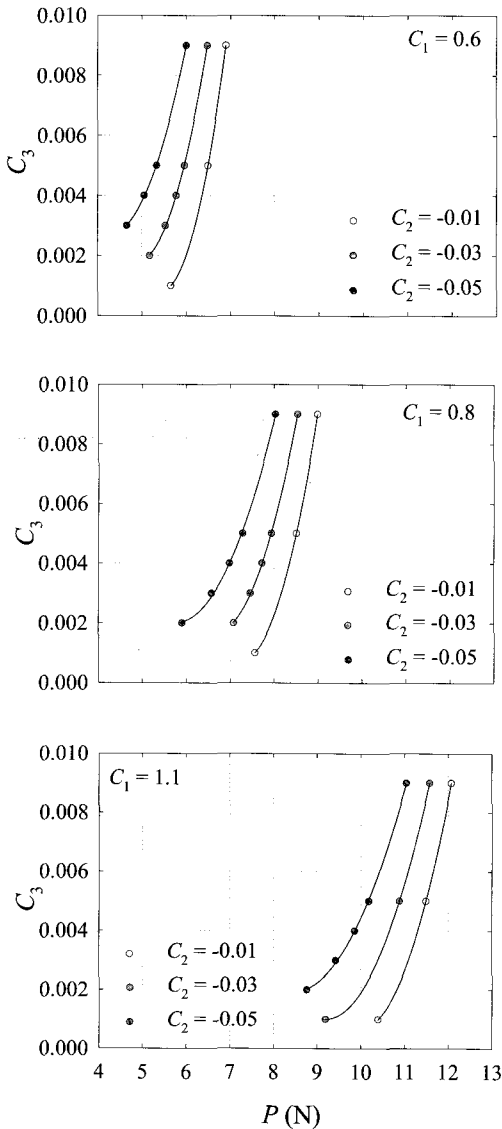


Figure 14. Variation of C_3 with P for various values of C_2 for given $C_1 = 0.6, 0.8, 1.1$

되는 식 (17)로 나타낼 수 있다.

$$\gamma_i(C_1, C_2) = \sum_{j=0}^2 \xi_{ij}(C_1) C_2^j \quad (17)$$

$$\xi_{ij}(C_1) = \sum_{k=0}^2 \eta_{ijk} C_1^k$$

따라서 C_3 에 대한 통합함수는 식 (18)과 같이 표현된다.¹⁴

$$C_3 = f^C(P) = \sum_{i=0}^2 \left[\sum_{j=0}^2 \left(\sum_{k=0}^2 \eta_{ijk} C_1^k \right) C_2^j \right] \left(\frac{P}{D^2} \right)^i \quad (18)$$

식 (16)-(18)에서 각 변수들은 이들 곡선의 형태에 근거하여 모두 2차 다항식을 사용하여 회귀하였다.

4. Mooney-Rivlin-모델로의 변환

새 압입이론을 바탕으로 구한 Yeoh-모델 재료상수를 Mooney-Rivlin-모델의 재료상수로 변환하기 위해 앞서 Mooney-Rivlin-모델의 특성을 살펴볼 필요가 있다. Mooney-Rivlin-모델은 연신률 2이하의 범위에서 비교적 실제 데이터와 일치하는 특성이 있다. 그러나 계수 선정시 주의점이 있다. Figure 15은 Mooney-Rivlin-모델의 계수선정시 응력-변형률 데이터 구간에 따른 계수값을 보여준다. 실제 열화시킨 고무시편의 인장시험을 통해 얻은 공칭변형률 2.5까지의 응력-변형률 데이터를 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 구간으로 나누어 각각에 대한 계수를 구하였다. 선정구간에 따라 재료상수의 변화가 있음을 알 수 있다. 연신율 2까지의 정확성을 가지는 Mooney-Rivlin-모델의 특징을 고려해, 본 연구에서는 연신율 2까지의 응력-변형률 데이터로부터 물성계수를 구하고자 한다. Mooney-Rivlin-모델의 인장시험 시 응력-변형률 관계는 식 (19)로 표현된다.

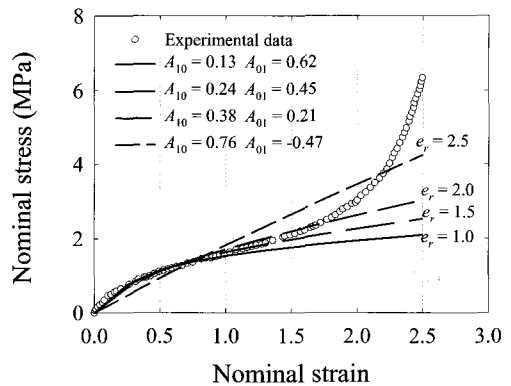


Figure 15. Effect of input-strain-data range on MR-model

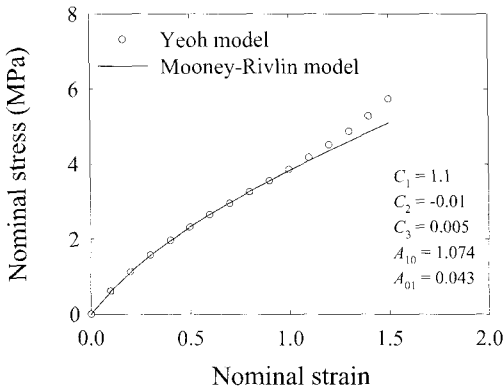


Figure 16. Comparison of Yeoh and Mooney-Rivlin models

$$\sigma = 2 \left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right) \left(A_{10} + \frac{1}{\lambda_1} A_{01} \right) \quad (19)$$

압입시험으로부터 얻은 Yeoh-모델의 재료상수로부터 공칭응력-공칭변형을 데이터를 만들고 이를 다시 Mooney-Rivlin-모델의 재료상수로 변환하였다. Figure 16은 이 과정에서 구한 각 모델간의 응력-변형을 곡선을 나타낸다. 연신을 2이하에서 일치하는 값을 얻을 수 있었다.

5. 새 압입이론에 준한 물성치 계산

이상의 사항들을 종합하여 압입시험에 의한 고무 물성치 산정프로그램을 작성하였으며 전체 흐름도는 Figure 17과 같다. 물성치 예측과정은 다음과 같다.

- i) 고무재료를 $h/D = 0.4$ 까지 압입하여 하중-변위 곡선을 구한다.
- ii) 초기 재료물성치 C_1, C_2 를 가정한다.
- iii) 가정한 재료물성치를 식 (14)-(15)에 대입하여 $\psi-h, \phi-h$ 곡선을 구한다. 식 (12)-(13)을 이용하여 $W-h, I_1-h$ 관계를 구하며 이로부터 $W-I_1$ 관계를 얻는다.
- iv) $W-I_1$ 곡선을 Yeoh-모델을 기준으로 회귀하여 새로운 재료물성치 C_1, C_2 를 구한다.
- v) 계산된 C_1, C_2 를 새로운 고무물성치로 사용하여 iii) - iv) 과정을 반복수행한다. 새롭게 계산된

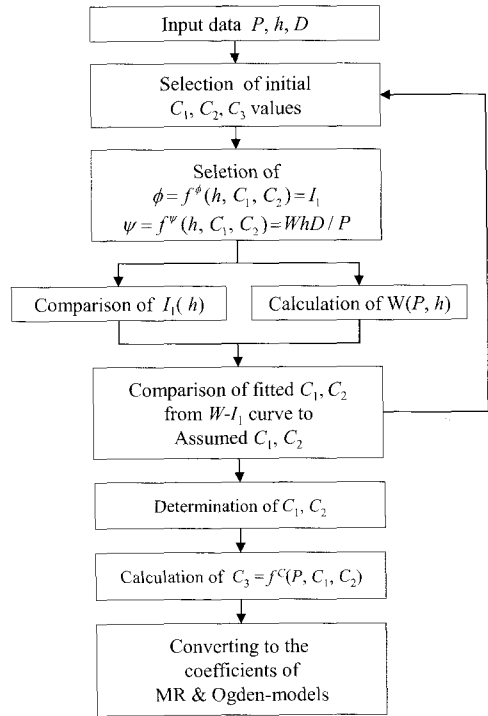


Figure 17. Flow chart for determination of rubber material properties

C_1, C_2 값과 이전 계산된 값과의 차이가 지정된 오차 이내에 들어오면 이 값들을 최종 C_1, C_2 값으로 선정한다.

- vi) C_1, C_2 와 추가 압입 ($h/D = 0.8$)을 통해 구한 최대 하중을 이용하여 C_3 를 예측한다.

이상의 사항을 바탕으로 물성치산정 프로그램을 통해 구한 응력-변형을 곡선과 실제 주어진 응력-변형을 곡선을 비교해 보았다. 먼저 유한요소 해석을 이용한 압입시험 모사로부터 얻어지는 하중-변위 곡선을 실험 데이터로 가정하여, 이 곡선을 물성치 예측 프로그램에 대입함으로써 재료의 응력-변형을 곡선을 예측할 수 있다. 이를 실제 유한요소해석에 사용된 고무 물성치와 비교하여 나타낸 것이 Figure 18이다. 그림으로부터 실제 응력-변형을 곡선과 계산된 응력-변형을 곡선이 매우 잘 일치함을 볼 수 있다.

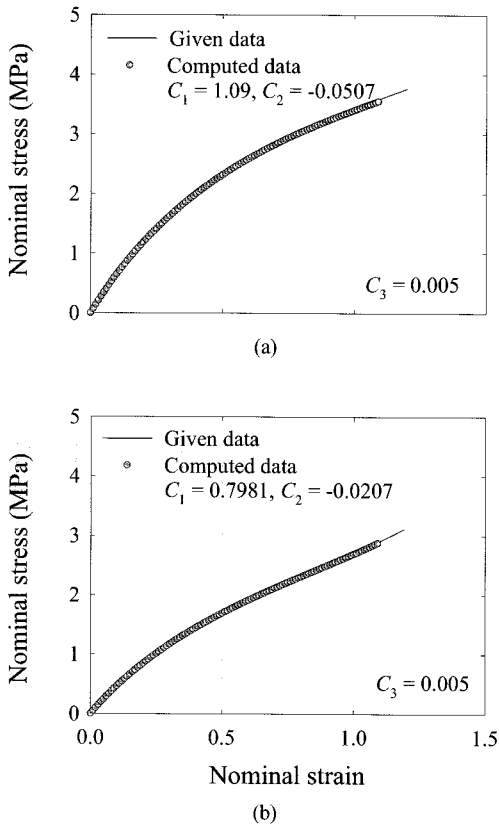


Figure 18. Comparison of computed stress-strain curves to those given for [(a) $C_1 = 1.1$, $C_2 = -0.05$ (b) $C_1 = 0.8$, $C_2 = -0.02$]

V. 결 론

본 연구에서는 먼저 구형 압입시험의 유한요소 해석을 통해 고무 물성치와 마찰계수가 압입하중-깊이곡선에 미치는 영향을 분석하였다. 시편 압입 시험에서 얻은 압입하중-깊이를 응력-변형을 곡선으로 변환하기 위해 재료상수를 변수로 사용하는 무차원함수들을 도입하였으며, 이를 바탕으로 고무 물성치를 산정해 주는 압입식들을 유도하였다. 이상 수행된 연구는 다음과 같이 요약될 수 있다.

1. 본 연구에 사용된 Yeoh-모델은 3개의 재료상수만으로 연신율 2이상의 응력-변형을 곡선을 얻을 수 있으며, 인장시험에서 얻은 재료상수를

이용해 전단시험시의 응력-변형을 곡선을 정확히 예측해 주는 장점을 갖는다.

2. 마찰계수는 최대 압입깊이에 따라 하중-변위 곡선에 영향을 주며, 또한 압입하부 변형에는 접촉면으로부터의 깊이에 따라 중요한 영향을 준다.

3. 유한요소해에 준해 마찰계수의 하중-깊이 곡선에 대한 영향이 거의 없는 최적 압입깊이로 $h/D = 0.4$ 를 택했다.

4. 마찰계수, 압입관측지점의 변화에 따른 변형을 에너지 밀도 변화와 변형을 불변량을 살펴봄으로써, 마찰계수의 영향이 없으며 최대 변형을 에너지를 얻을 수 있는 최적관측지점으로 압입중심 하부 $0.25D$ 지점을 선택하였다.

5. 압입시험의 유한요소해로부터 하중-깊이 곡선을 응력-변형을 곡선으로 사상시켜주는 ϕ , ψ 두 변수를 회귀하였다.

6. 압입중심 하부지점 $0.25D$ 에 대한 압입변수들의 회귀를 통해 고무재료 물성치 산정프로그램을 작성하였다. 유한요소해석을 사용하여 압입자 직경의 40% ($h/D = 0.4$) 압입을 1회 실시하면 평균 3% 정도의 오차범위에서 재료물성치가 구해진다.

7. 이 과정에서 구한 재료상수를 바탕으로 응력-변형을 곡선을 얻을 수 있었으며, 이를 이용해 Mooney-Rivlin-모델의 재료상수로 변환하였다.

이러한 미소압입시험기를 사용하면 현재의 표준시편보다 제작이 간편한 미소시편은 물론 현재 사용중인 열화 고무부품에서 사용초기와는 크게 다른 현재의 고급 물성치들을 바로 얻을 수 있게 된다. 이를 통해 고무부품 물성평가의 정확성과 환경 및 변형이력 평가, 그에 따른 내구 평가의 신뢰성 향상에 크게 기여할 수 있다.

후 기

본 논문은 한국과학재단 산하 성균관대학교 산업설비 안전성평가 연구센터의 연구비 지원으로 이루어진 것으로서, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고 문헌

1. A. Nayebi, R. E. Abdi, O. Bartier, and G. Mauvoism, "New Procedure to Determine Steel Mechanical Parameters from the Spherical Indentation Technique", *Mechanics of Materials*, **34**, 243 (2002).
2. H. Lee and H. H. Lee, "An Indentation Theory Based on FEA Solutions for Property Evaluation", *Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers A*, **25**, 11, 1685 (2001).
3. J. A. Knapp, K. M. Follstaedt, S. M. Myers, J. C. Barbour, and T. A. Friedmann, "Finite Element Modeling of Nano-indentation", *Journal of Applied Physics* **85**, 3, 1460 (1999).
4. J. A. Knapp, D. M. Follstaedt, S. M. Myers, J. C. Barbour, T. A. Friedmann, J. W. Ager III, "Finite Element Modeling of Nano-indentation for Evaluating Mechanical Properties of MEMS Materials" *Surface and Coatings Technology*, 103, 268 (1998).
5. H. J., Kang Mechanical Behavior and Fatigue Prediction of Automobile Rubber components, Department of Mechanical Engineering, Sogang University, Masters Thesis, Chapter 2, 2000.
6. Korea Institute of Machinery and Materials, "Development of Deformation Analyses and Design Technology of Mechanical Components of Hyper-elastic Rubber", The Ministry of Science and Technology, 1999.
7. W. D. Kim, "Application of Finite Element Method to the Design of Rubber components", *KSME Magazine*, **38**, 12, 42 (1998).
8. R. S. Rivlin, 1956. "Large Elastic Deformations in Rheology: Theory and Application", Academic Press, New York. Vol. 1.
9. R. W. Ogden, "Large Deformation Isotropic Elasticity-On the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubber-like Solids", *Proceedings of Royal Society of London*, **A**, 326, 565 (1972).
10. O. H. Yeoh, "Characterization of Elastic Properties of Carbon-black-filled Rubber Vulcanizates", *Rubber Chemistry and Technology*, **63**, 792 (1990).
11. ABAQUS *Theory Manual*, Version 6.3, Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc., Pawtucket, RI., 2002.
12. ABAQUS *User's Manual*, Version 6.3, Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc., Pawtucket, RI., 2002.
13. W. D. Kim, D. J. Kim, C. W. Na, and Y. S. Lee, "A Study on the Frictional Characteristics of Vulcanized Rubber Plates", *Elastomer*, **36**, 2, 121 (2001).
14. D. W. Kim, Software and Hardware Development of Micro-indenter for Material Property Evaluation of Hyper-elastic Rubber, Department of Mechanical Engineering, Sogang University, Masters Thesis, 2002.