

유한요소의 Normal rotation 연구

The Finite element with Normal Rotational Degree Freedoms

조 순 보*
Cho, Soon-Bo

Abstract

A frame element embedded normal to a shear wall or slab (shell element) is common in the structural systems. In that case there is a need for a membrane or shell element to have a normal rotation degree of freedom at each node in order to have a good result of stresses. Even if Many other people studied this area, All man, Cook and Sabir are representative investigators in this area. In this research paper, Sabir's methods of vertex rotation stiffness matrix in a membrane element are studied. New stiffness of vertex rotation are proposed by taking advantage of beam stiffness theory. Rectangular elements stiffness with rotational degree of freedom are compared in accuracy ratio each other.

Keyword : rotation degree of freedom

1. 서 론

지난 30년간 shell요소의 normal rotation 강성도 행렬식의 일반식 구성에 대한 많은 연구가 있었으나 특별한 형상의 특정 요소인 경우를 제외 하고 큰 성과가 없었다.^{1) 2)}

Allman³⁾이 제안한 형상함수에 의한 면내회전자 유도강성도식이 유력한 연구였으나 이는 사각형 요소에서는 정도(精度)비가 우수하나 다른 삼각형 요소 등에서는 정도(精度)비가 낮아 강성도식 일반식 구성에는 문제가 있었다. 유한요소 실용해석 software인 sap2000, ansys 등에서도 Vertex rotation stiffness의 크기를 실제요소형상에서 계산하기 보다는 절점이 Hinge가 되는 강성도크기나 전체행렬식의 Singularity를 피하는 정도의 최소의 값을 가정하여 구성하고 있다. Sabir³⁾는 강성도요소의 변형율 식에서 유도한 변위식을 이용한 사각형요소의 Vertex강성도행렬식을 구성하였다. 사각형유한요소가 <그림2>처럼 각절점에서 보로 연결되었다고 가정한 보의 강성도식을 구하고 Poisson효과를

대입한후 보정계수 η 를 곱하여 Vertex강성도식을 구성한다. Vertex강성도식의 요소 및 수치예제를 통하여 Sabir의 연구결과와 비교하여 정도(精度)비를 연구한다.

2. Sabir의 Vertex Rotation 강성도⁴⁾

4각형요소의 강성도행렬식의 구성과정에서 Sabir는 Singularity를 피하기 위하여 아래의 변형율식 (1)에서 변위강성식을 유도하였다.

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\quad (1)$$

$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_{xy} = 0$ 인 경우에 (1)식을 적분하여 아래의 식을 얻는다,

$$u = \alpha_1 - \alpha_3 y$$

* 정회원·수원대학교 건축공학과부교수, 공학박사

$$v = a_2 + a_3x \quad (2)$$

4각형요소의 각 절점 당 3개의 변위 u, v, θ 를 가정하여 사각형요소에서 12개의 독립상수가 필요하며 singularity를 피하여 아래의 변형율식을 가정한다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= a_4 + a_5y + a_{11}y^2 + 2a_{12}xy^3 \\ \epsilon_y &= a_6 + a_7x - a_{11}x^2 - 2a_{12}x^3y \\ \epsilon_{xy} &= a_8 + a_9x + a_{10}y + a_5x + a_7y \end{aligned} \quad (3)$$

(3)식은 적합조건식(4)를 만족한다.

$$\textcircled{1} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

(3)식을 적분하여 각절점의 변위식을 아래의 (5)식으로 가정한다.

$$\begin{aligned} u &= a_1 - a_3y + a_4x + a_5xy + a_8y/2 + a_{10}y^2/2 \\ &\quad + a_{11}xy^2 + a_{12}x^2y^3 \\ v &= a_2 + a_3x + a_6y + a_7xy + a_8x/2 + a_9x^2/2 \\ &\quad - a_{11}x^2y - a_{12}x^3y^2 \end{aligned} \quad (5)$$

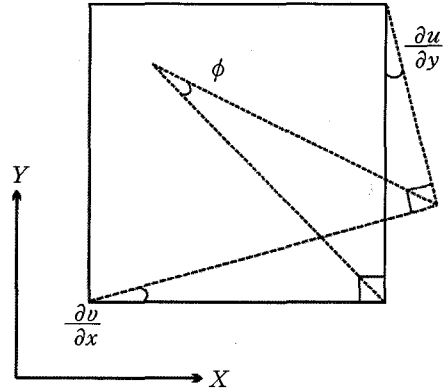
$$u = [X]\{A\}$$

$$[X]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ x & -y \\ 0 & x \\ 0 & xy \\ y & 0 \\ xy & 0 \\ \frac{x}{2} & \frac{y}{2} \\ \frac{x^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{y^2}{2} \\ -x^2y & xy^2 \\ -x^3y^2 & x^2y^3 \end{bmatrix}$$

<그림1>에서처럼 Drilling degree of freedom의 변위각 ϕ 는 (6-1)식에서 구할 수 있다.

$$\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (6-1)$$

$$\phi = a_3 - a_5x/2 + a_7y/2 + a_9x/2 - a_{10}y/2 - 2a_{11}xy - 3a_{12}x^2y^2 \quad (6-2)$$



<그림 1> Drilling degree of freedom의 변위각 ϕ

(5-1)식과 (6)식을 합성하여 (7-1)식을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & xy & 0 & 0 & \frac{y}{2} & 0 & \frac{y^2}{2} & xy^2 & x^2y^3 \\ 0 & 1 & x & 0 & 0 & y & xy & \frac{x}{2} & \frac{x^2}{2} & 0 & -x^2y & -x^3y^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{x}{2} & 0 & \frac{y}{2} & 0 & \frac{x}{2} & -\frac{y}{2} & -2xy & -3x^2y^2 \end{bmatrix} \quad (7-1)$$

$$q = [X]\{a\}$$

(7-1)식에 절점좌표를 대입하여

$$\{q\} = [\bar{X}]\{a\}, \quad \{a\} = [\bar{X}]^{-1}\{q\} \quad (7-2)$$

$$\epsilon = [B]\{a\}$$

(7-2)식을 대입하여

$$\{\epsilon\} = [\bar{B}][\bar{X}]^{-1}\{q\}$$

$$\{\epsilon\} = [B]\{q\}$$

변형율 행렬식 [B]은

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 & a_5y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11}y^2 & 2a_{12}xy^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & a_7x & 0 & 0 & 0 & -a_{11}x^2 & -2a_{12}x^3y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5x & 0 & a_7y & a_8 & a_9x & a_{10}y & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

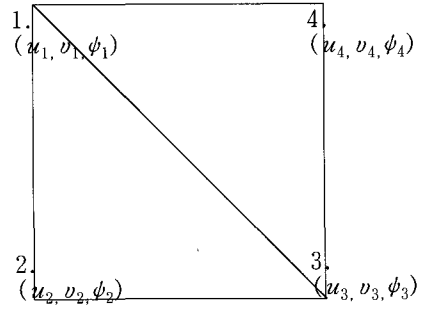
Sabir가 제안한 Vertex강성도행렬식은 아래의 식 (8)에서 구할 수 있다.

$$\bar{K} = t \int \int [B]^T D [B] dx dy \quad (8)$$

$E = 219780 \text{ kg/cm}^2$ 이고 두께가 1 cm , 각변의 길이가 각각 2 cm 인 정사각형요소의 강성도행렬식을 Sabir가 가정한 (8)식을 이용하여 Matlab software를 이용하여 구하면 아래의 <표2>행렬식 $\times 10^5$ 과 같다.

3. 보의 강성도를 이용한 Vertex 강성도식

사각형요소의 각절점이 <그림2>에서처럼 $b*d*L = 1cm*1cm*2cm$ 의 보로 연결되었다고 가정하고 각절점의 면내 회전자유도(drilling degree of freedom)회전변위를 포함한 강성도행렬식을 구성하면 아래의 식과 같다.



<그림 2> 사각형요소내의 보의 연결

<표 2> 보를 이용한 Vertex강성도 행렬식

$\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{L} \cos \gamma^2 + \frac{12EI}{L^3} \sin \gamma^2$	$(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}) \cos \gamma \sin \gamma$	$\frac{6EI}{L^2} - \frac{6EI}{L^2} \sin \gamma$
$(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}) \cos \gamma \sin \gamma$	$\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{L} \cos \gamma^2 + \frac{12EI}{L^3} \sin \gamma^2$	$\frac{6EI}{L^2} + \frac{6EI}{L^2} \cos \gamma$
$\frac{6EI}{L^2} - \frac{6EI}{L^2} \sin \gamma$	$\frac{6EI}{L^2} + \frac{6EI}{L^2} \cos \gamma$	$\frac{8EI}{L} + \frac{4EI}{L}$

Sabir와 같은 예제의 사각형요소의 강성도 행렬식 $\times 10^5$ 을 Matlab software를 이용하여 구성하면 아래의 <표3>과 같다.

Plane stress의 경우 응력도-변형을 행렬식[D]는 (9)식이 된다.

$$\nu \text{를 } 0.3 \text{으로 하는 경우 강성도구성식 } \bar{K} = t \int \int$$

[B]^TD[B]dxdy에서 균질두께의 정사각형 요소의 경우 각행에 $1.3 \times 1.3 \times .35 = 0.5915 \times 1.0989 = 0.65$

<표 2> Sabir의 Vertex강성도 행렬식

(단위 kg-cm)

1.1911	0.3474	-0.4042	-0.7869	-0.0177	0.3650	-0.3120	-0.3474	0.1086	-0.0922	0.0177	-0.1478
0.3474	1.1911	0.4042	0.0177	-0.0922	0.1478	-0.3474	-0.3120	-0.1086	-0.0177	-0.7869	-0.3650
-0.4042	0.4042	0.6619	0.3650	-0.1478	-0.0707	-0.1086	0.1086	-0.3638	0.1478	-0.3650	-0.0707
-0.7869	0.0177	0.3650	1.1911	-0.3474	-0.4042	-0.0922	-0.0177	-0.1478	-0.3120	0.3474	0.1086
-0.0177	-0.0922	-0.1478	-0.3474	1.1911	-0.4042	0.0177	-0.7869	0.3650	0.3474	-0.3120	0.1086
0.3650	0.1478	-0.0707	-0.4042	-0.4042	0.6619	0.1478	0.3650	-0.0707	-0.1086	-0.1086	-0.3638
-0.3120	-0.3474	-0.1086	-0.0922	0.0177	0.1478	1.1911	1.1911	-0.4042	0.0177	0.1478	0.4042
-0.3474	-0.3120	0.1086	-0.0177	-0.7869	0.3650	0.3474	-0.4042	0.6619	-0.3650	-0.3474	0.4042
0.1086	-0.1086	-0.3638	-0.1478	0.3650	-0.0707	0.4042	-0.4042	0.6619	-0.3650	0.1478	-0.0707
-0.0922	-0.0177	0.1478	-0.3120	0.3474	-0.1086	-0.7869	0.0177	-0.3650	1.1911	-0.3474	0.4042
0.0177	-0.7869	-0.3650	0.3474	-0.3120	-0.1086	-0.0177	-0.0922	0.1478	0.3474	1.1911	0.4042
-0.1478	-0.3650	-0.0707	0.1086	0.1086	-0.3638	-0.3650	-0.1478	-0.0707	0.4042	0.4042	0.6619

<표 3> 사각형요소의 보강성도 이용 Vertex강성도 행렬식

(단위 kg-cm)

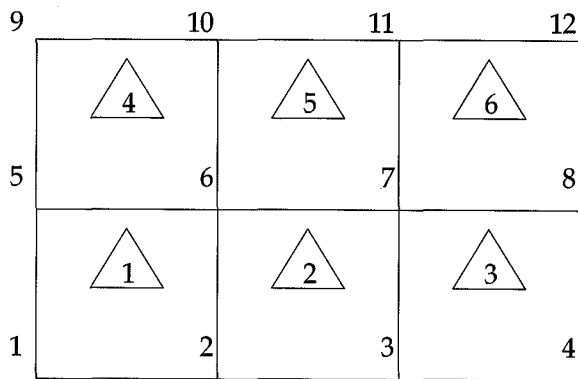
2.0604	-0.4121	0.4690	-0.2747	0	0.2747	-0.6868	0.4121	0.1943	-1.0989	0	0
-0.4121	2.0604	0.4690	0	-1.0989	0	0.6868	-0.6868	0.1943	0	-0.2747	0.2747
0.4690	0.4690	1.0989	-0.2747	0	0.1832	-0.1943	-0.1943	0.1832	0	-0.2747	0.1832
-0.2747	0	-0.2747	2.0604	0.4121	-0.4690	-1.0989	0	0	-0.6868	-0.4121	-0.1943
0	-1.0989	0	0.4121	2.0604	0.4690	0	-0.2747	0.2747	-0.6868	-0.6868	0.1943
0.2747	0	0.1832	-0.4690	0.4690	1.0989	0	-0.2747	0.1832	0.1943	-0.1943	0.1832
-0.6868	0.6868	-0.1943	-1.0989	0	0	2.0604	-0.4121	-0.4690	-0.2747	0	-0.2747
0.4121	-0.6868	-0.1943	0	-0.2747	-0.2747	-0.4121	2.0604	-0.4690	0	-1.0989	0
0.1943	0.1943	0.1832	0	0.2747	0.2832	-0.4690	-0.4690	1.0989	0.2747	0	0.1832
-1.0989	0	0	-0.6868	-0.6868	0.1943	-0.2747	0	0.2747	2.0604	0.4121	0.4690
0	-0.2747	-0.2747	-0.4121	-0.6868	-0.1943	0	-1.0989	0	0.4121	2.0604	-0.4690
0	0.2747	0.1832	-0.1943	0.1943	0.1832	-0.2747	0	0.1832	0.4690	-0.4690	1.0989

가 곱하여 지며 보강성도식을 이용한 경우 Poisson 효과를 고려하기 위하여 X축 및 Y축에 각각 수직 방향 하중이 작용하는 경우 각행에 $\eta \times 0.65$ 를 곱해야 한다. 여기서 η 는 보정계수이다.

4. 수치 예제

<그림3>의 Cantilever보의 탄성계수 $E = 219780 \text{ kg/cm}^2$ 이고 두께는 1cm , 사각형요소의 각변길이는 2cm 이다.

Cantilever보의 처짐의 정도비를 구하기 위하여 Sabir Verex강성도 및 보이용 Verex강성도를 이용한 처짐을 구하여 단위하중법에 의한 정확한 Cantilever보의 처짐값과 비교하여 보면 아래의 <표4>와 같다.



<그림 3> Cantilever보의 처짐

<표 4> Cantilever의 최대처짐비교

(단위 cm)

	Sabir	보강성도 이용	단위 하중법
수직변위 최대값	0.0793	0.0595	0.0614

<표 5> 강성요소의 비교

(단위 (kg-cm))

	Sabir	보강성도 이용
수직변위	119110	206040
회전변위	66190	109890

5. 결론

면요소의 Rotational degree of freedom을 연구한 Sabir의 강성도 크기를 구하여 보고 이 요소 값의 정

도(精度)를 구하기 위하여 사각형요소가 <그림 2>처럼 보로 연결되었다고 보아 Vertex강성도 행렬식을 구하여 아래의 결론을 얻었다.

1. Sabir의 강성도식(표)에서 수직 및 수평변위강성도요소의 값이 1.1911×10^5 이고 회전변위의 값이 0.6619×10^5 이되어 $\frac{1.1911}{0.6619} = 1.799$ 가 되고 보이용 Vertex강성도 행렬식의 경우 수평 및 수직변위 강성도 요소의 크기는 2.0604×10^5 이고 회전변위의 크기는 1.0989×10^5 이 되어 $\frac{206040}{109890} = 1.875$ 가 되어 그 비가 서로 비슷하다. 곧 보정계수의 선택에 따라 보이용 Verex강성도 식의 정도(精度)수렴이 가능하다.
2. 수치예제의 Cantilever보의 처짐비교에서 정확한 처짐크기 0.0614cm 이고 Sabir 강성도에 의한 처짐은 0.0793cm , 보강성도 이용 보정계수사용 Vertex강성도에 의한 처짐값은 0.0595cm 가 되어 정확한 처짐값에 수렴한다.

참 고 문 헌

1. Edward L. Wilson, Three dimensional static and dynamic analysis of structures, computer and structures, Inc. pp9-10,1995
2. Robert D. Cook, Finite Element Modelling for Stress Analysis, Johnwiley & Sons, Inc. p54, 1995
3. D.J Allman, A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis, Journal of computer and structures Vol 19 No 1-2 pp1-8,1984
4. D.J Allman, A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis, International Journal for numerical methods in engineering, VOL.26 pp717-730,1988
5. Lanheng Jin, Analysis and evaluation of a shell finite element with drilling degree of freedom, Master degree thesis of Maryland

- University, pp1-60, 1994
6. William Weaver, Jr, Finite elements for structural analysis, Prentice Hall, Inc., pp78-82, 1929
 7. Zienkiwicz and R.L. Taylor, The finite element, McGraw-Hill Book Company pp 103-134, 1991
 8. Young W. Kwon, The Finite Element Method using matlab, CRC press, 2000, pp 311-361, 365-424
 9. 권 택진, "응용유한요소해석," 회성출판사, 1976
 10. 최 창근, "유한요소법," 태크노프레스, pp384~387, 2002
 11. 김 용수, "Matlab 입문과 활용," 높이깊이, 2000