

## 조합하중을 받는 단층 래티스 돔과 아치의 안정경계에 관한 연구

### A Study on the Stability Boundaries for Single Layer Latticed Domes and Arch under Combined Loads

한 상 을\*      이 상 주\*\*      이 갑 수\*\*\*  
Han, Sang - Eul      Lee, Sang - Ju      Lee, Kap - Su

#### 요 약

본 논문은 조합하중을 받는 공간구조물의 안정경계를 파악하는 것이다. 구조물에 작용하는 독립된 여러 가지 하중벡터는 기본이 되는 하중 모드와 하중매개 변수를 이용하여 나타내고, 독립된 하중 매개변수에는 비례관계를 설정함으로써 하나의 하중 변수에 의해 하중을 부여한다. 구조물의 좌굴하중 즉 임계점은 평형조건이 불안정이 되는 극한점과 분기점으로 분류되고, 가장 낮은 하중이 좌굴하중으로 정의된다. 본 논문에서는 기하학적 비선형 문제를 해석하기 위한 수치해석법으로는 호장법과 뉴턴-랩슨법을 이용하였으며, 본 해석을 통하여 안정경계를 파악함은 물론 좌굴모드 및 좌굴하중을 명확히 규명하였다.

#### Abstract

The lowest load when the equilibrium condition becomes to be unstable is defined as the buckling load. The primary objective of this paper is to be analyse stability boundaries for star dome under combined loads and is to investigate the iteration diagram under the independent loading parameter. In numerical procedure of the geometrically nonlinear problems, Arc Length Method and Newton-Raphson iteration method is used to find accurate critical point(bifurcation point and limit point). In this paper independent loading vector is combined as proportional value and star dome was used as numerical analysis model to find stability boundary among load parameters and many other models as multi-star dome and arch were studied. Through this study we can find the type of buckling mode and the value of buckling load.

**키워드:** 안정경계, 단층 래티스 돔, 분기, 극한좌굴, 포장법

**keywords:** Stability boundary, Single layer latticed dome, Bifurcation, Limit buckling, Arc length method

#### 1. 서 론

구조물의 안정해석에서 하중의 분포와 크기를 나타내는 단일 하중 매개변수(single loading parameter)는 매우 다양하며, 평형이 안정을 잃을 때의 하중 매개변수의 최소값이 좌굴하중으로써 정의된다. 그러나 많은 실질적인 문제에서 단일 매개변수로 외력이 표현되는 경우는 매우 드물고, 구조물은

하중의 다양한 조합에 의하여 거동한다. 외력을 표현하기 위해선 다양한 독립적인 매개변수가 필요하며, 좌굴하중을 매개변수에 투영할 때 임계해의 위치를 안정경계라 한다.

하중이 평형경로를 따라가는 동안 불안정현상이 어느 특이점에서 발생하게 되고, 하중공간에서 이 임계조합의 위치는 안정경계를 형성하며, 안정과 불안정으로 분리된다. 조합하중을 받는 구조물이 안정을 잃을 때 각기 다른 하중벡터 사이의 관계는 안정경계로 나타낼 수 있다. 스냅스루(snap through)나 분기좌굴과 같은 불안정 문제는 하중의 형태, 크기, 방향, 위치, 초기 구조물의 기하학적 불안정성, 재료 상수, 경계조건과 같은 외적요소에 따

\* 정희원, 인하대학교 건축학부, 교수, 공학박사  
Tel : 032-860-7592, E-mail : hsang@inha.ac.kr  
\*\* 정희원, 인하대학교 건축학부, 연구원, 공학박사  
E-mail : kyotolsj@empal.com  
\*\*\* 정희원, (주)전우구조, 공학석사  
E-mail : kapsu0707@hanmail.net

라 달라진다. 이 모든 요소를 분리하여 고려한다면 정확하게 구조물의 거동특성을 규명할 수 있다. 본 논문에서는 안정경계를 결정할 때 비례하중을 통해 조합하중을 구성하여 전체 하중구성을 하나의 하중 매개변수로 축소하여 비례계수의 변화에 따른 임계점의 위치를 추적하였다. 안정경계에 관한 해석알고리즘으로 정확한 임계점(분기점, 극한점)을 찾는 데 유리하고, 임계점 이후에도 다양한 형태의 평형 경로 추적이 가능한 호장법(Arc Length Method)을 이용하였다.

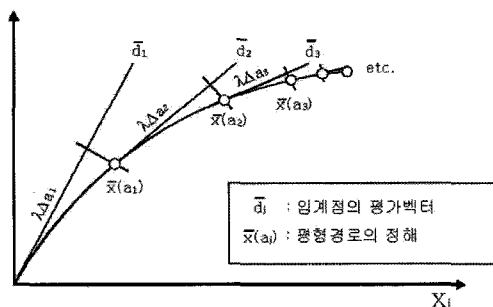
## 2. 좌굴 판정기준

안정경계 해석의 목적은 하중매개변수에 따른 임계점의 위치를 알아내는 것이다. 조합하중을 받는 구조물은 극한점과 분기점의 두 가지 임계점이 발생하며, 이 점들의 판정기준은 좌굴하중이 기본 평형곡선 위에 있는 처음의 임계점일 때에만 적용될 수 있다. 임계점의 형태를 확인하기 위해 본 논문에서는 다음과 같은 판정기준을 적용한다.

### 2.1 극한점(Limit Point)의 판정기준

일반적으로 비선형 좌굴해석을 위한 수치해석에 있어서 구조물의 강성행렬의 행렬값이 영(零)이 되는 점을 극한 좌굴점으로 간주한다.

그림 1에서 호장법에 의한 평형경로의 추적으로부터 k스텝까지의 기본경로의 호장을  $a_k$ 로 하고  $a_k$ 점의 접선강성행렬의 최소고유치  $\omega = \omega(a_k)$ 를 구하며,  $a_k = a^*$ (분기점근방)의 경우  $\omega(a^*) = 0$ 이면 좌굴이 발생한 것으로 판정한다. 그러나 실제



〈그림 1〉 호장법에 의한 평형경로

적으로 수치계산상 정확하게  $\omega(a^*) = 0$ 가 되지 않기 때문에  $a_k$ 가  $a^*$ 의 근방에 있다고 가정하여  $a^*$ 를 중심으로 테일러급수를 전개하면 다음 식과 같다.

$$\omega(a^*) = \omega(a_k) + da_k \cdot \dot{\omega}(a_k) = 0 \quad (1)$$

식 (1)로부터 증분호장은 다음 식으로 정의된다.

$$da_k = -\omega(a_k) / \dot{\omega}(a_k) \approx -\omega(a_k) \cdot da_{k-1} / \{\omega(a_k) - \omega(a_{k-1})\} \quad (2)$$

$a_k \rightarrow a^*$ 에 접근함에 따라  $da_k \rightarrow 0$ 이 되므로 다음 식으로부터 좌굴점을 판정한다.

$$da_k < \gamma \cdot da_1 \quad (\gamma : 임의의 상수) \quad (3)$$

본 논문에서는  $\gamma$ 를 0.05로 설정하였으며,  $\omega(a_k) \approx \omega(a_{k-1})$ 의 경우에는  $da_k \rightarrow \infty$ 가 되기 때문에 증분매개변수의 제한치를 설정하였다.

### 2.2 분기점(Bifurcation Point)의 판정기준

기본 경로를 추적해 나가는 과정에서 하나 이상의 임계점이 발생하는 경우에는 극한점 이전의 특이현상을 판단할 수 있는 판정기준이 필요하게 된다.

다음 식은 비선형 방정식을 나타낸다.

$$[K] \{d\} - \Lambda \{q_e\} = \{0\} \quad (4)$$

여기에서,  $\{d\}$ 는 증분변위,  $\Lambda$ 는 하중 매개변수이며  $\{q_e\}$ 는 입력데이터에서 주어진 하중모드이다. 위 식의 양변에 임계점에서의 고유벡터  $\{\Phi_1\}$ 을 곱하고,  $\{\Phi_1\}^T [K] = \{0\}$ 이라는 것을 고려하면 식 (4)는 다음과 같이 된다.

$$\Lambda \{\Phi_1\}^T \{q_e\} = \{0\} \quad (5)$$

식 (5)에서 다음의 두 경우를 예측 가능하다.

$$\{\Phi_1\}^T \{a_\theta\} \neq \{0\}, \quad \Lambda = 0 \quad (6)$$

$$\{\Phi_1\}^T \{a_\theta\} = \{0\} \quad (7)$$

위의 두 식은 각각 극한점과 분기점이 일어남을 의미하며, 호장법에서 또 다른 분기 판정식은 다음과 같다.

$$|K_{n+1}| = 0 \quad (8)$$

$$|K_n| = 0 \quad (9)$$

위의 식에서  $K_{n+1}$ 은 호장강성을 의미하며,  $K_n$ 은 일반강성을 의미한다.

### 3. 조합하중(Combined loads)

안정경계 해석을 위해서는 다양한 하중벡터의 조합 과정이 필요하다. 본 논문에서는 여러 개의 하중벡터를 상호간의 비례적인 임의 값에 의해 조합하며, 비례하중을 통한 조합하중은 식 (10)에 의해 나타낸다.

$$\{P_2\} = \Lambda_1\{P_{21}\} + \Lambda_2\{P_{22}\} + \Lambda_3\{P_{23}\} + \Lambda_4\{P_{24}\} + \dots \quad (10)$$

예를 들면, 위의 식에서 4개항만을 고려하고, 하중 매개변수 중에  $\Lambda_1$ 과  $\Lambda_4$ 가 0이라면 식 (11)과 같이 두 개의 하중 매개변수에 의해 전체하중이 구성된다. 그리고 비례하중을 사용하면 식 (12)와 같이 하나의 매개변수만을 갖게 된다.

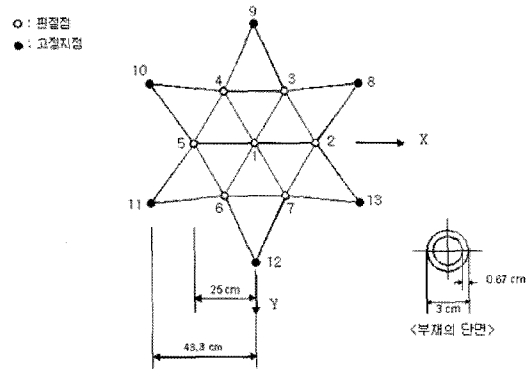
$$\{P_2\} = \Lambda_2\{P_{22}\} + \Lambda_3\{P_{23}\} \quad (11)$$

$$\{P_2\} = \Lambda_2(\{P_{22}\} + m\{P_{23}\}) \quad (12)$$

### 4. 수치해석결과

#### 4.1 스타 돔(Star Dome)

그림 2는 본 논문에서 수치해석 모델로 이용한



〈그림 2〉 스타 돔의 해석모델

스타 돔(Star Dome)이다. 이 모델은 비선형 수치해석법에 관한 논문에서 자주 다루어지는 모델로서 스냅스루 좌굴, 분기좌굴이 명확한 모양으로 나타나며 좌굴형식의 분류에 적당한 해석모델이다.

다음은 조합하중을 받는 스타 돔의 안정경계 해석을 수행하기 위해 식 (13)과 같은 하중조합을 고려하였다.

$$\{P_{21}\} = 10^{-4}EA \cdot \{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T; \quad (13-a)$$

$$\{P_{22}\} = 10^{-4}EA \cdot \{0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T; \quad (13-b)$$

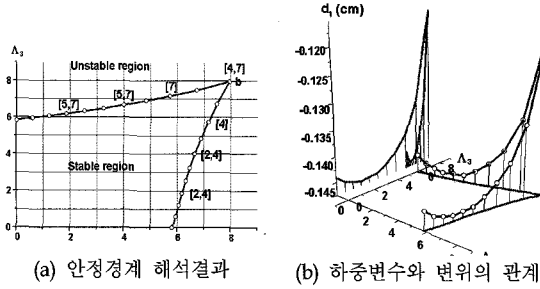
$$\{P_{23}\} = 10^{-4}EA \cdot \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1\}^T; \quad (13-c)$$

$$\{P_{24}\} = 10^{-4}EA \cdot \{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}^T \quad (13-d)$$

식 (13)에서 하중벡터  $\{P_{21}\}$ 은 절점 1에서의 수직하중이고,  $\{P_{22}\}$ 는 절점 2, 3, 4에서 동일한 수직하중이 작용함을 의미한다. 또,  $\{P_{23}\}$ 는 절점 5, 6, 7에서의 수직하중을 의미하며,  $\{P_{24}\}$ 는 7개의 모든 절점에 수직하중이 등분포로 작용함을 의미한다.

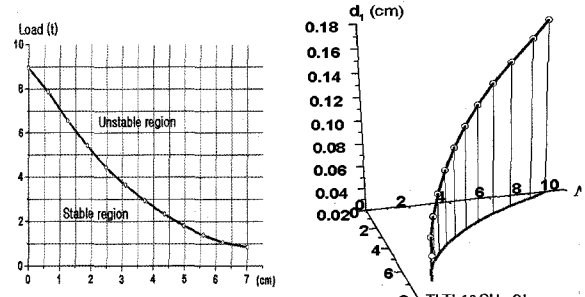
$\Lambda_1 = \Lambda_4 = 0$ 인 경우의 안정경계는 그림 3과 같다.  $\Lambda_2 - \Lambda_3$  하중평면에서 초기 임계점(극한점 또는 분기점)이 결정되며, 이 임계점을 연결하면 안정경계가 만들어진다. 안정경계 위의 모든 점들은 극한점이 된다. 단, 예외적으로  $\Lambda_2 = \Lambda_3$ 인 경우에 b점은 분기점에 의한 임계점으로 나타났다. 그리고 [ ]안에 있는 숫자는 대응하는 임계점에서 좌굴된 절점을 나타낸다. 그림 3에서의 안정경계는 단위기울기의 하중벡터에 대해 대칭이다. 분기가 일어나는 b점을 지남에 따라 지배적인 하중조합에서 변화가 나타나며, 반면에

(그림 중의 [ ]는 좌골된 절점)



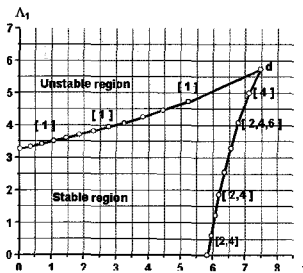
(a) 안정경계 해석결과 (b) 하중변수와 변위의 관계

〈그림 3〉  $A_1 = A_4 = 0$ 일 경우의 안정경계

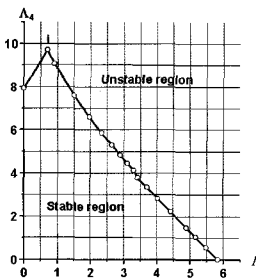


(a) 안정경계 해석결과 (b) 하중변수, 지점 13의 높이와 변위의 관계

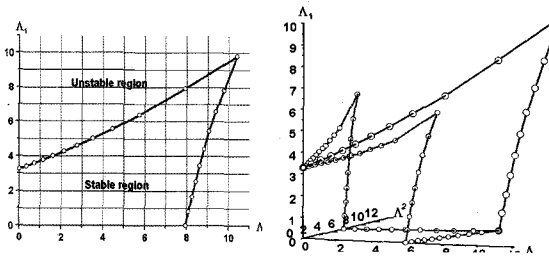
〈그림 7〉 지점 13의 높이의 변화에 따른 안정경계



〈그림 4〉  $A_3 = A_4 = 0$ 일 경우의 안정경계



〈그림 5〉  $A_1 = A_3 = 0$ 일 경우의 안정경계

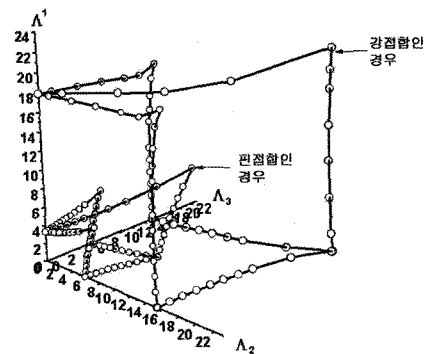


(a) 안정경계 해석결과 (b) 3차원 안정경계

〈그림 6〉  $A_2 = A_3$ 이고  $A_4 = 0$ 일 경우의 안정경계

b점에서는 두 개의 하중구성에 따른 평형상태가 존재한다.

그림 3(b)는 하중조합에 의한 임계점에서의 1번 절점의 변위와 하중 매개변수의 관계를 3차원으로 나타내었다.



〈그림 8〉 핀점합 스타돔과 강점합 스타돔의 안정경계 해석결과 비교

$A_3 = A_4 = 0$ 인 경우  $A_1 - A_2$  하중평면에서 안정경계는 그림 4와 같이 나타난다. 안정경계의 특성은 그림 3과 같으나 d점을 통과하는 하중구성이 정확히 대칭이 되는 위치에 놓이지 않음을 알 수 있다.  $A_1 = A_3 = 0$ 인 경우  $A_2 - A_4$  하중평면에서 안정경계는 그림 5와 같으며, 1점에서 단일 분기점이 나타났다.

그리고  $A_2 = A_3$ 이고  $A_4 = 0$ 인 경우의 안정경계는 그림 6과 같다. 여기서,  $A_1$ 은 정점에서 하중의 크기를,  $A_2$ 는 주변의 절점에서 똑같은 하중이 작용함을 의미한다. 그림 6(a)의 그래프에서 왼쪽 그래프 안정경계는 하중조합이 만나는 방향으로 갈수록 분기점에 의한 임계점의 형태로 안정경계가 나타났고, 오른쪽의 안정경계는 모두 분기점의 형태에 의한 안정경계로 나타났다.

두 개의 평형곡선이 만나는 방향으로 갈수록 분기점에 의한 임계점의 형태로 안정경계가 나타났으며, 오른쪽의 안정경계는 모두 분기점의 형태에 의

한 안정경계로 나타났다.

그림 7은 하중벡터  $\{P_{21}\}$ 만이 존재하는 경우, 즉 등분포하중을 받는 경우에 지점 13의 높이에 따른 안정경계해석을 수행한 것이다. 해석결과 지점의 높이가 높아질수록 이에 대응하는 임계하중은 작게 나타났다. 절점 1의 변위를 고려해서 안정경계 곡선을 3차원으로 나타낸 것이 그림 7(b)이다.

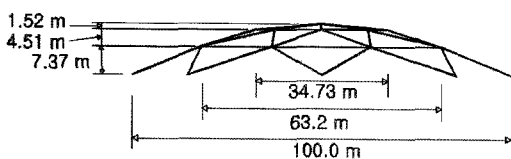
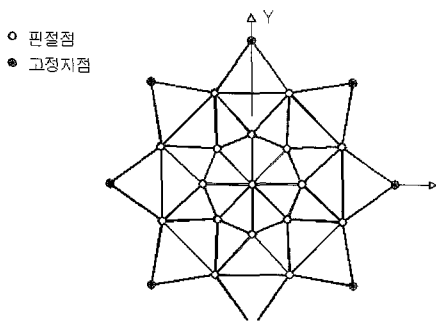
그림 8은 스타돔이 핀접합일 경우와 강접합일 경우의 안정경계를 비교한 것이다. 해석결과 강접합일 경우의 안정경계에서의 임계하중이 3배~4배 정도 더 크게 나타났다.

### 4.2 다중 스타 돔(Multi-Star Dome)

그림 9과 같이 자유도수가 스타 돔보다 많은 다중 스타 돔에 대해서 안정경계해석을 수행하였다. 부재제원은 표 1과 같고 수치해석모델에 적용된 하중형태는 그림 11과 같다.

〈표 1〉 다중 스타 돔의 부재제원

접 합 부		핀 접 합
부 재 단 면 적	cm <sup>2</sup>	200(외경: 30 cm, 두께: 2.3 cm)
부재단면2차모멘트	cm <sup>4</sup>	19329
하 중 형 태	t/node	절점하중
스 팬	m	100
탄 성 계 수	kg/cm <sup>2</sup>	2.1×10 <sup>6</sup>



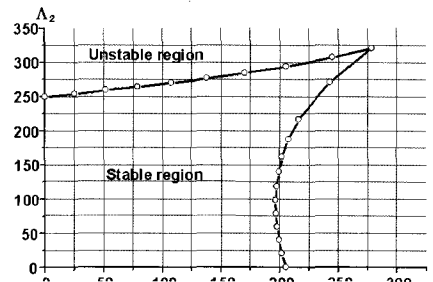
〈그림 9〉 다중 스타 돔의 수치해석모델

해석결과  $\Lambda_3 = 0$ 인 경우의 안정경계(그림 10)는 극한점 이전에 임계점이 생기지 않아 모두 극한점에 의한 안정경계로 나타났다.

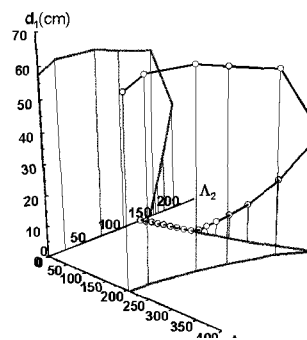
또한,  $\Lambda_2 = 0$ 인 경우(그림 12)에는 극한점 이전에 구조물의 강성행렬의 값이 영(零)이 되어 모두 분기점에 의한 안정경계로 나타났다.

### 4.3 아치(Arch)

아치의 해석모델은 그림 13에 나타낸 것과 같이 절점이 강절점, 단부가 핀절점인 것으로 가정한다. 부재는 강관  $\phi 300 \times 23$ (cm), 스패 100 m, 아치높이는 16 m로 하였다. 아치의 작용하는 하중벡터  $\{P_{21}\}$ ,  $\{P_{22}\}$ ,  $\{P_{23}\}$ 은 각각 일절점에만 작용하고, 각각의 하중매개변수를  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$ ,  $\Lambda_3$ 로 하여 해석을 수행한다. 그 결과 그림 14(a)에

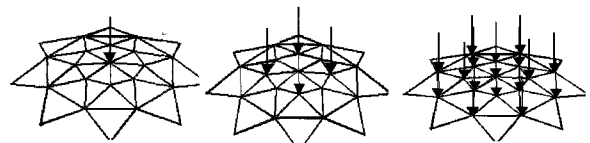


(a) 안정경계 해석결과



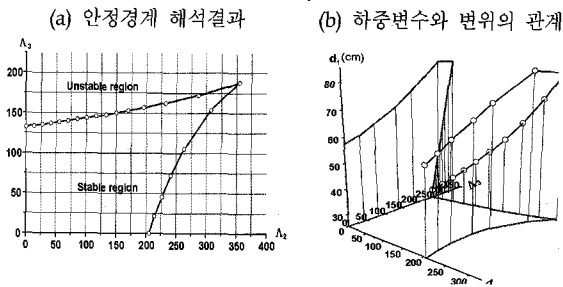
(b) 하중변수와 변위의 관계

〈그림 10〉  $\Lambda_3 = 0$ 일 경우의 안정경계

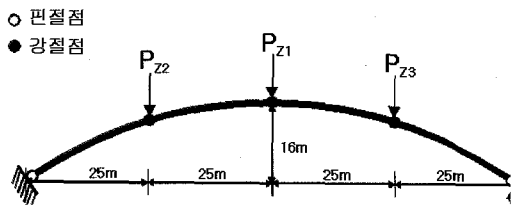


(a) 하중형태  $\{P_{21}\}$  (b) 하중형태  $\{P_{22}\}$  (c) 하중형태  $\{P_{23}\}$

〈그림 11〉 수치 모델에 적용된 하중형태



〈그림 12〉  $A_2 = 0$  일 경우의 안정경계



〈그림 13〉 아치의 해석모델

$A_1 = 0$ 인 경우, (b)에  $A_2 = 0$  또는  $A_3 = 0$ 인 경우, (c)에  $A_2 = A_3$ 인 경우의 안정경계를 나타내고, (d)에 이들 결과를 3차원으로 나타낸다.

### 5. 결론

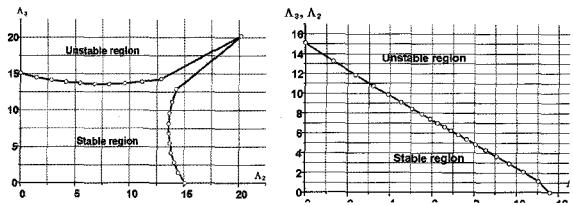
본 논문에서 상호 독립적인 여러 개의 하중을 받는 래티스 돔의 안정경계는 하중공간에서 하중 매개변수의 상호작용에 영향을 받는다. 안정경계를 결정할 때 비례하중을 통해 조합하중을 만들어 전체 하중구성을 하나의 하중매개변수로 줄여서 비례계수의 변화에 따른 임계점의 위치를 찾았다. 두 개의 독립하중 매개변수를 가진 안정경계는 하중평면에서 곡선을 이루는 반면, 3차원 공간에서 세 개의 독립하중 매개변수를 고려하면 안정경계는 평면으로 나타난다.

본 연구결과를 요약하면 다음과 같다.

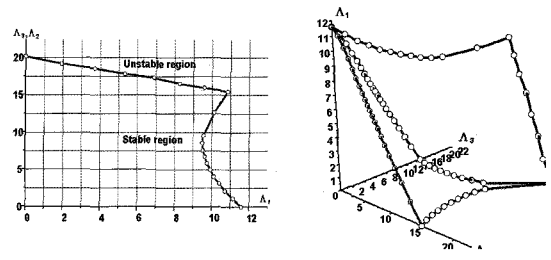
(1) 래티스 돔의 안정경계를 결정할 때 비례하중을 통해 조합하중을 만들어 비례계수의 변화에 따른 정확한 임계점의 위치를 찾을 수 있어서 래티스 돔 및 아치의 설계시 하중의 분포 및 크기를 결정할 수 있는 지표가 된다.

(2) 하중구성이 등분포 하중으로 조합되었을 경우

(a)  $A_1 = 0$ 인 경우의 안정경계 (b)  $A_2 = 0$  또는  $A_3 = 0$ 인 경우의 안정경계



(c)  $A_2 = A_3$ 인 경우의 안정경계 (d) 하중변수에 따른 안정경계



〈그림 14〉 아치의 해석결과

좌굴의 형태는 극한좌굴 이전에 분기좌굴이 일어났고 비례하중과 비례계수의 변화에 따라 임계점의 형태가 변하여 래티스 돔과 아치의 극한좌굴 및 분기좌굴은 적용된 하중조합과 이 하중조합 사이의 비례하중에 의해 지배된다.

(3) 래티스 돔의 안정경계 해석에 있어서 하중구성을 비례하중을 사용하여 조합하면 하중 매개변수를 하나의 하중 매개변수로 감소시켜 해석을 단순화 할 수 있고 시간을 절약할 수 있다.

### 참고문헌

- Holzer S. M., Plaut R. H., Soners A.E. and White W. S. "Stability of lattice structures under combined loading", *Journal of Engineering Mechanics Division, Proceeding of ASCE*, Vol. 106, EM2, 1980, April, pp.289~305
- Huseyin K., "The multi-parameter perturbation technique for the analysis of nonlinear system", *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Vol.8, 1973, pp.31~43
- 半谷裕産, 川口健一, "形態解析—一般逆行列とその應用", 培風館, 東京, 1991, p.198
- Rheinboldt W. C. "Computation of critical

- boundaries on equilibrium manifolds", SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol.19, No.13, 1982, June, pp.653~669
5. 韓 相乙, "래티스 構造物의 非線型座屈舉動에 관한 基礎的研究", 경도대학학위논문, 1994, pp. 11-18, 74-78.
  6. 韓 相乙, "래티스 돔의 幾何學的 非線型 座屈舉動에 관한 研究", 초대형구조시스템 연구센터 第3号 1994. 5, pp. 13-22.
  7. Riks E., "An Incremental Approach to the Solution of Snapping Buckling Problems", Int.J.Solids Structures, 1979, Vol.15, 529-551
  8. Riks E., "Some Computational Aspects of the stability Analysis of Nonlinear Structure", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1984, pp. 47, 219-259.
  9. Bergan, P. G., "Solution Algorithms for Nonlinear Structural Problems", (Compute. & Structures, Vol. 12, 1980), pp. 497-509.
  10. Thompson J.M.T. and Hunt G.W., "A General Theory of Elastic Stability", 1973, Chapter 3, John Wiley & Sons
  11. Hutchinson, J. W. and Koiter, W. T., "Post-buckling Theory", Appl. Mech. Reviews 23, 1970, pp.1353
  12. Croll, J. G. A. and Walker, A. C., "Elements of Structural Stability", Macmillan, 1972.
  13. Waszczyszyn Z. and Cichon C., "Nonlinear stability analysis of structures under multiple parameter loads", Engineering Computers, Vol.5, 1988, pp.10~14
  14. Hangai Y. and Kawaguchi K., "Shape Analysis-Generalized Inverse Matrix and its Application", 1981, 13, pp.55-62.
  15. 김 재열, "일반역행렬을 이용한 복합하중을 받는 구조물의 안정경계에 관한 연구", 한국전산구조공학회 논문집 제 12권 제 2호, 1999. 6, pp.223~231
  16. 김 진기, "모드중첩법에 의한 단층래티스 돔의 기하학적 비선형 좌굴거동에 관한 연구", 인하대학교 대학원 공학석사학위청구논문, 1998, pp.10-14.