

셸 구조물의 위상최적화

- Topology Optimization for Shell Structures -



이 상 진*
Lee, Sang-Jin

1. 서 론

최적화 문제는 수학적인 복잡함 때문에 최근까지도 실용화에 상당한 어려움을 가지고 있었으며 전반적으로 학술적인 활동에 치중하고 있었다. 그러나 유한요소법과 같은 수치해석기법이 전통적인 계산 방법을 대체함으로써 최적화 문제는 새로운 국면을 맞게 되었다. 더욱이 저가의 고성능 컴퓨터가 보급됨으로써 개선된 최적화 알고리즘의 개발이 용이하게 되었으며 결과적으로 최적화라는 연구분야는 공학자에게 이해하기 쉬운 형태의 학문으로 발전하였다.

구조공학 분야에서는 Zienkiewicz교수^[1]가 유한요소법을 형상최적화에 도입한 이래로 형상을 표현하는 CAGD기법^[2], 설계변수에 대한 민감도를 계산하는 방법 그리고 최적화 알고리즘 등에 대한 연구가 현재도 활발하게 진행되고 있다.

그리고 보다 최근에는 이러한 구조물의 형상최적화^[3]이외에도 주어진 하중과 경계조건에 알맞은 구조물의 위상을 찾기 위한 위상최적화기법에 대한 연구가 활발해지고 있다. 위상최적화기법은 구조물의 형상과 크기를 동시에 변화시키는 방법으로 구조물에 사용된 재료를 재분배하는 기법을 사용한다. 위상최적화는 구조물을 구성하고 있는 재료를 먼저 다공성 물질로 표현하고 이 물질 내부에 존재하는 빈

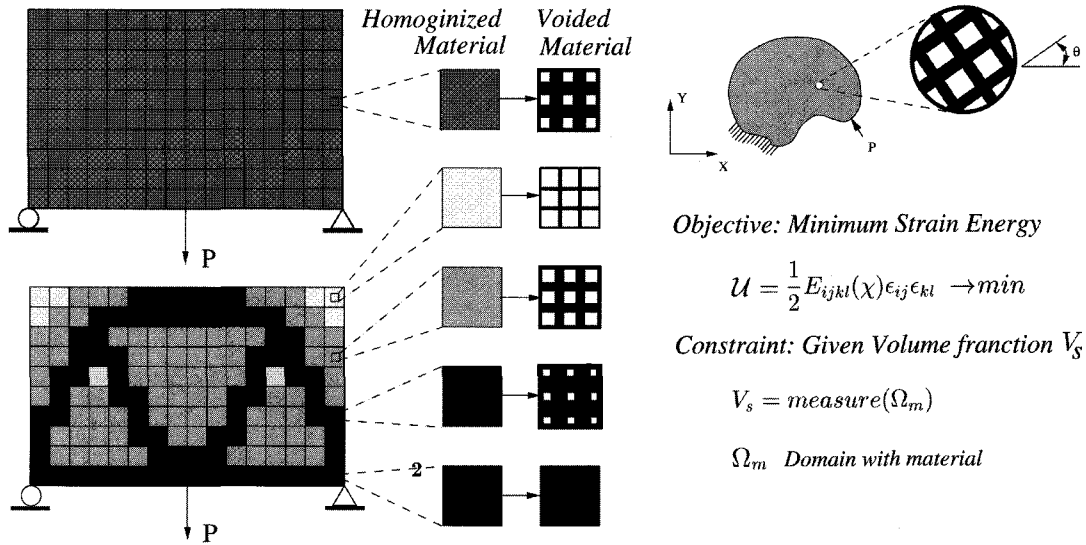
공간의 크기를 설계변수로 이용하게 된다. 이러한 방법으로 전통적인 형상과 크기 최적화기법에서 불가능했던 구조물의 위상변화를 가능하게 하였다. 또한 위상최적화의 개발은 개별적으로 존재하던 구조최적화의 개념을 구조설계 최적화의 개념으로 발전시켰으며 더 나아가 기존에 개발된 최적화기법을 통합하는 구조물에 대한 통합설계최적화(Integrated design optimization)^[3]기법으로 발전시키는 계기를 마련하였다.

본 고는 구조물의 설계 최적화에 많은 영향을 미치고 있는 위상최적화기법을 소개하고 이를 셸 구조물에 적용한 결과를 소개하고자 한다.

2. 위상최적화의 기본 개념

위상최적화의 기본개념은 주어진 설계영역 내에서 물질을 최적상태로 재분배하여 구조물의 강성을 최대화하는 물질분포 함수 $E_{ijkl}(x)$ 를 찾아내는 것이다. 다시 말하면 구조물의 전체 설계영역 Ω 내에서 변형에너지를 최소화하면서 동시에 임의의 구속조건을 만족하는 최적의 물질 분포함수 $E_{ijkl}(x)$ 를 구하는 것이다. 따라서 위상최적화문제의 목적함수는 일반적으로 최소화해야하는 구조물의 변형에너지가 되고 그 구속조건은 초기의 물질의 밀도값이 일정하게 유지되는 것으로 정의된다. 이를 수식으로

* 경상대학교 건축학부 조교수



<그림 1> Basic concept of topology optimization

표현하면 다음과 같다.^[4]

$$\begin{aligned} \text{Minimize } U &= \frac{1}{2} E_{ijkl}(\chi) \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \\ \text{subject to } Vol &= \text{measure}(\Omega_m) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 Ω_m 은 물질이 분포하는 영역을 나타내고 영역 Ω_m 의 부피값은 초기구속조건으로 사용된다.

또한 위상최적화의 개념은 <그림 1>에서 도시된 바와 같이 요약될 수 있다. <그림 1>의 단순보는 가로와 세로로 각각 16개와 10개의 유한요소로 이산화되었으며 일반적으로 균질하게 분포된 재료상태로 위상최적화를 시작한다. 최적화과정을 거치면서 구조물 내에서는 재료가 필요한 부분으로 재분배되면서 궁극적으로 각 요소가 서로 다른 재료밀도값을 가지게 된다.

3. 층상화된 가등질화 물질

셀 구조물의 위상최적화는 여러가지 형태로 이루어질 수 있으나 본 고에서는 셀의 두께방향으로 층을 도입하여 물질을 재분배하는 방법을 이용하였다.

이러한 방법으로 셀 구조물의 위상최적화를 실현하기 위하여 Reissenr-Mindlin가정에 바탕을 둔 적층셀요소와 연관시킨 가등질화 물질을 형성하였다. 여기서 형성한 층상화된 가등질화 물질은 <그림 2>

에서와 같은 층 재료모델을 바탕으로 한다. 층상화된 가등질화 물질은 고형(solid)물질과 다공성(voided)물질을 층별로 번갈아 사용함으로써 형성하였다. 이때 셀 구조물의 모든 층에 등방성물질을 적용하였으며 이는 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_p & 0 \\ 0 & D_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_p \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} \quad (2)$$

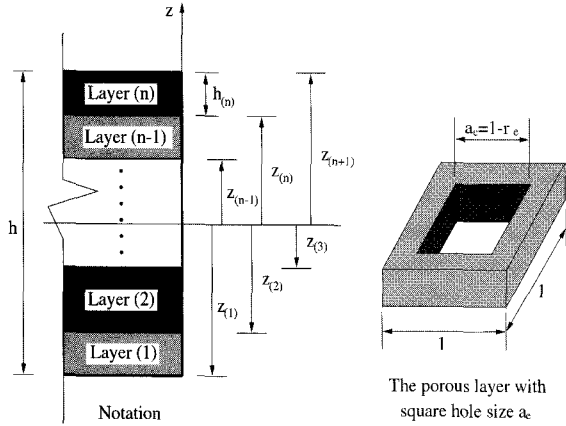
여기서 면방향성분 D_p 와 전단성분 D_s 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D_p &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \\ D_s &= \frac{kE}{2(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 E 는 재료의 탄성계수이고, ν 는 프와송비이며 k 는 전단수정계수이다. 이때 가등질화 물질을 사용하면 면방향성분과 전단성분의 D_p , D_s 는 다음과 같이 표현된다.

$$D_p^h = \rho^\gamma D_p, \quad D_s^h = \rho^\gamma D_s \quad (4)$$

여기서 ρ 는 재료밀도함수이고 γ 는 위상의 명확도를 조절하기 위한 지수 값이다.



<그림 2> Notation and multi-layer shell model used in conjunction with the artificial material method

이때 <그림 2>에서와 같이 층을 이루는 재료를 두께방향으로 적분하면 등가구성방정식을 구할 수 있다. 등가구성방정식은 힘의 항으로 표현되며 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} n \\ m \\ q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\epsilon} \\ x \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} \quad (5)$$

여기서 $\bar{\epsilon}$, x , ϵ_s 는 면내, 휨, 전단 변형률을 나타내고 n , m , q 는 변형률에 상응하는 힘의 항을 나타낸다. 식(5)의 각 행렬값은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-h/2}^{+h/2} D_p dz = \sum_{l=1}^{n_{layer}} D_p^{(n)} (z_{n+1} - z_n) \\ B &= \int_{-h/2}^{+h/2} D_p z dz = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n_{layer}} D_p^{(n)} (z_{n+1}^2 - z_n^2) \\ D &= \int_{-h/2}^{+h/2} D_p z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{l=1}^{n_{layer}} D_p^{(n)} (z_{n+1}^3 - z_n^3) \\ G &= \int_{-h/2}^{+h/2} D_s dz = \sum_{l=1}^{n_{layer}} D_s^{(n)} (z_{n+1} - z_n) \end{aligned}$$

4. 크기조절 알고리즘 (Resizing algorithm)

설계영역 Ω 내에서 합성물질을 재분배하는 위상 최적화의 문제는 전통적으로 변형에너지를 최소화하기 위한 최적기준을 유도함으로써 해결된다. 이때 설계변수로는 단위셀 내에 존재하는 빈 공간의

크기와 셀의 회전과 관련한 회전각이 쓰인다. 이때 빈 공간의 크기로 나타나는 설계변수는 물질의 부피를 계산하는데 사용되어지므로 구속조건과 직접적인 관계가 있고, 회전각으로 나타나는 설계변수는 이방성물질의 재료축 회전을 위해서 도입되므로 구속조건과는 무관하다. 그리고 등방성 물질이 최적화에 사용될 경우 회전각은 설계변수로 작용하지 않게 된다. 따라서 본 절에서는 앞서 논의한 등방성 물질을 위상최적화에 도입함으로써 밀도에 대한 최적조건만 고려하게 된다. 유한요소법을 사용하면 요소 e 내에 빈공간의 크기가 $a_e \times a_e$ 인 물질이 반복적으로 분포되어 있는 것으로 가정되며 이산화된 영역에서는 식(1)을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } U &= \sum_{e=1}^{nel} \left[\frac{1}{2} \int_{V^{(e)}} \epsilon^T \sigma dV \right] \\ \text{subject to } V_s &= \sum_{e=1}^{nel} (1 - a_e^2) V_e \quad (6) \end{aligned}$$

여기서 아래첨자 e 는 e 번째 유한요소를 나타낸다. 그리고 V_s 는 설계영역 Ω 내에 물질이 존재하는 부분의 부피를 말하며 a_e 는 요소내에 존재하는 정사각형 형태의 빈 공간의 크기를 나타낸다. 그리고 층상화된 가동질화 물질을 이용한 셀 구조물의 위상최적화는 두께방향의 적분을 통하여 구한 등가구성방정식을 이용하므로 위상최적화시 최소화해야하는 요소변형에너지는 다음과 같이 표현할 수 있다.^[5]

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \left[\int_{A^{(e)}} \bar{\epsilon}^T A \bar{\epsilon} dA + 2 \int_{A^{(e)}} \bar{\epsilon}^T B x dA \right. \\ &\quad \left. + \int_{A^{(e)}} x^T D x dA + \int_{A^{(e)}} \epsilon_s^T G \epsilon_s dA \right] \quad (7) \end{aligned}$$

<그림 2>에서와 같이 단위셀의 크기를 1이라고 가정하면 요소 e 에 대한 재료밀도 매개변수 r_e 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$r_e = 1 - a_e \quad (8)$$

따라서 설계변수 a_e 를 사용하면 식(6)에서 정의된 최적화문제는 재료밀도 매개변수 r_e 로 다시 정의된다. 즉 nel 개의 유한요소로 이산화된 설계영역의 설계변수는 다음과 같다.

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_{nel}]^T \quad (9)$$

식(6)에 정의된 최적화문제는 라그랑지 승수를 이용하여 구속조건을 목적함수에 첨가함으로써 라그랑지함수 L 로 다시 정리 할수 있다.

$$L(r_e) = \sum_{e=1}^{nel} U_e - \Lambda \left(\sum_{e=1}^{nel} (2r_e - r_e^2) - V_s \right) - \sum_{e=1}^{nel} \lambda_{r_e}^+ (r_e - 1) + \sum_{e=1}^{nel} \lambda_{r_e}^- r_e \quad (10)$$

여기서 U_e 는 요소 e 의 변형에너지를 나타내고 $\Lambda, \lambda_{r_e}^+ = [\lambda_{r_1}^+, \lambda_{r_2}^+, \dots, \lambda_{r_{nel}}^+], \lambda_{r_e}^- = [\lambda_{r_1}^-, \lambda_{r_2}^-, \dots, \lambda_{r_{nel}}^-]$ 는 라그랑지 승수이다. 식(10)의 라그랑지 승수중 $\lambda_{r_e}^+, \lambda_{r_e}^-$ 는 항상 만족 되므로 라그랑지함수 $L(r_e)$ 의 정상조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$B_{r_e} = \frac{1}{2\Lambda(1-r_e)} \frac{\partial U_e}{\partial r_e} = 1 \quad (11)$$

식(11)는 재료밀도함수와 변형에너지의 관계를 나타내는데 이를 이용하여 Bendsøpe는 다음과 같은 크기조절 알고리즘^[4]을 제시하였다.

$$\begin{aligned} r_e^{k+1} &= MAX && \text{if } r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta \leq MAX \\ &= r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta && \text{if } MAX \leq r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta \leq MIN \\ &= MIN && \text{if } MIN \leq r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta \end{aligned} \quad (12)$$

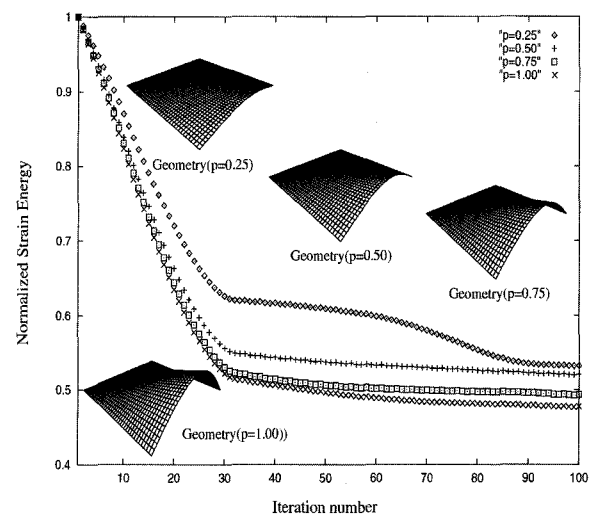
여기서 $MAX = \max\{(1-\zeta)r_e, 0\}$ 이고 $MIN = \min\{(1+\zeta)r_e, 1\}$ 이며 η 는 조절변수, ζ 는 이동변수이고 $B_{r_e}^k$ 는 k 번째 반복계산에서 B_{r_e} 값이다.

5. 셸 구조물의 위상최적화 예

앞서 기술한 위상최적화의 개념을 이용하여 코노이드(conoid)형태의 셸에 대한 최적위상을 조사하였다. 위상최적화에 이용된 코노이드 셸의 세면은 직선으로 표현되었고 한변은 함수 $f(x) = p \times \sin(\pi x/3)$ 를 이용하여 곡선으로 표현하였다. 셸의 형상을 형성하기 위하여 곡선으로 표현된 셸의 한변을

x 축에 맞추고 나머지 셸의 형상은 y 축을 따라 선형으로 보간하였다. 곡면의 양끝에 놓인 변은 힌지로 지지되었고 곡면의 반대에 위치한 직선으로된 변은 고정지지 되었다. 그리고 그이외의 다른 변은 자유 지지된 것으로 가정하였다. 코노이드 셸의 곡률은 앞서 정의한 함수의 변수 p 를 이용하여 변화시켰으며 이때 사용한 변수값은 $p=0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ 이다. 또한 본 예제에 이용된 셸을 xy 평면에 투영하면 2차원상에서 각 변의 길이가 $3m$ 인 정사각형이 된다. 본 예제에서는 셸의 좌우대칭성을 이용하여 셸의 절반을 800개의 9절점 셸유한요소로 이산화하였다. 최적화에 이용된 재료의 탄성계수와 프와송비는 각각 $E=2.1 \times 10^8 N/m^2$ 와 $\nu=0.3$ 이다. 그리고 셸에는 등분포하중 $P=10kN/m^2$ 을 작용시켰다.

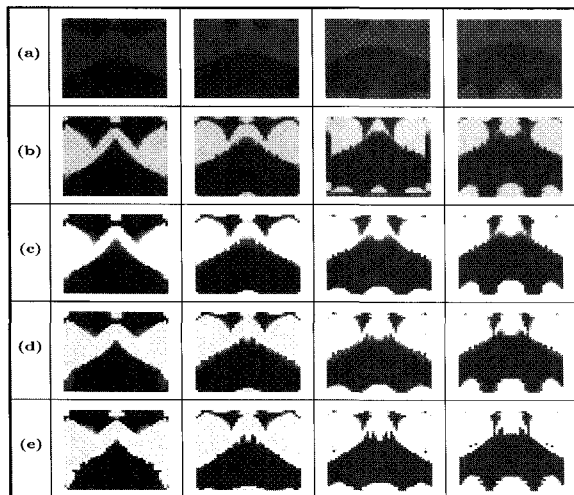
본 예제에서는 세 개의 층을 가진 재료모델을 이용하여 셸의 위상최적화를 수행하였다. 셸의 전체두께는 $h=0.4m$ 이고 각 층의 두께는 $h_1=h_3=0.1m$ 그리고 $h_2=0.2m$ 이다. 부피제약조건은 셸의 전체부피값의 $\Omega=50\%$ 를 채택하였고 조절매개변수와 이동매개변수는 $\eta=0.8$ 과 $\zeta=0.04$ 를 각각 사용하였다. 그리고 부피구속조건의 수렴허용치는 0.002로 하였고 가동질화된 재료의 지수값은 $\gamma=3.0$ 을 택하였다.



〈그림 3〉 The iteration history for the conoid-type shell with the FE mesh used in topology optimization

네가지 셀의 위상최적화를 수행하고 목적함수의 이력값을 <그림 3>에 도시하였다. 셀의 곡률값이 커질수록 목적함수의 감소는 뚜렷하게 나타났으며 곡률이 적은 셀의 경우 목적함수의 감소율이 반복계산 구간에 따라 다소 둔화되는 경향도 나타났다.

또한 <그림 4>에서 도시된 셀의 위상최적화 결과로 부터 곡률이 커질수록 곡선변과 반대의 직선변을 따라서 나타나던 재료의 밀집현상이 다소 감소되는 것으로 나타났다. 이는 곡률의 증가로 인해 셀 구조물의 보강위치가 상당히 달라지는 것을 단적으로 보여주었으며 위상최적화를 통하여 셀 구조물의 보강위치를 효율적으로 유추할 수 있음을 보여주고 있다.



<그림 4> Topology with respect to different shell curvature: rows (number of iteration): (a) 10th iteration; (b) 40th iteration; (c) 70th iteration; (d)100th iteration; (e) 130th iteration, columns (degree of curvature): the 1st, 2nd, 3rd, and 4th columns show the results with $p=0.25, 0.5, 0.75$ and 1.0 , respectively.

6. 결 언

본 고에서는 셀 구조물의 최적위상을 도출하기

위한 위상최적화의 기본개념과 셀 최적화에 일반적으로 사용되는 물질, 그리고 물질내의 빈공간의 크기를 조절하는 크기알고리즘에 대하여 설명하였다. 그리고 이러한 위상최적화의 요소기술들을 이용하면 셀 구조물의 건설에 사용된 재료가 효율적으로 재분배 되고 셀 구조물의 보강위치를 효과적으로 추적할 수 있음을 수치예제를 통하여 증명하였다. 수치예제를 통하여 위상최적화기법이 셀 구조물의 설계에 매우 유용한 도구로 사용되어 질수 있을 것으로 나타났으며 앞으로 이에 대한 다양한 이용이 기대된다. 또한 가까운 미래에 위상최적화기법의 셀 구조물의 건설에 실무적으로 이용되기 위하여 두께 방향 비대칭 층상화 물질에 대한 심층적인 연구가 요망되는 바이다.

참 고 문 헌

1. Zienkiewicz, O.C. and Campbell, J.S., "Shape optimization and sequential linear programming", in *Optimum structural design*, edited by R.H. Gallagher and O.C. Zienkiewicz, Chapter 7, John Wiley, Chichester, 1973
2. 이상진, "셀의 진동수를 최대화하기 위한 최적화 기법에 대한 연구", 대한건축학회 추계학술발표회논문집, 제23권 제2호, 2003, pp.237~240
3. Lee, S.J., "Schematic concept of fully integrated design optimization for shells", in *the Proceeding of the 6th Asian Pacific Conference on Shell and Spatial Structures*, Seoul, 2000 (in press)
4. Bendsoe, M.P. and Kikuchi, N., "Generating optimum topologies in structural design using a homogenization method", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 71 (2), 1988, pp.197~224
5. Lee, S.J., Bae, J.E. and Hinton, E., "Shell topology optimization using layered artificial material model", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 47, 2000. pp.843~867