

비용 제약 하에서 서비스 수준을 최대화하는 설비입지선정에 관한 연구

홍성학 · 이영훈[†]

연세대학교 컴퓨터과학 · 산업시스템공학과

The Maximal Covering Location Problem with Cost Restrictions

Sung Hak Hong · Young Hoon Lee

Department of Computer Science and Industrial Systems Engineering, Yonsei University, Seoul, 120-749

This paper studied a maximal covering location problem with cost restrictions, to maximize level of service within predetermined cost. It is assumed that all demand have to be met. If the demand node is located within a given range, then its demand is assumed to be covered, but if it is not, then its demand is assumed to be uncovered. An uncovered demand is received a service but at an unsatisfactory level. The objective function is to maximize the sum of covered demand. Two heuristics based on the Lagrangean relaxation of allocation and decoupling are presented and tested. Upper bounds are found through a subgradient optimization and lower bounds are by a cutting algorithm suggested in this paper. The cutting algorithm enables the Lagrangean relaxation to be proceeded continually by allowing infeasible solution temporarily when the feasible solution is not easy to find through iterations. The performances are evaluated through computational experiments. It is shown that both heuristics are able to find the optimal solution in a relatively short computational time for the most instances, and that decoupling relaxation outperformed allocation relaxation.

Keywords : location problem, lagrangean relaxation, heuristic, subgradient optimization

1. 서론

설비입지선정문제(location problem)는 입지 후보지 중 가장 적절한 설비의 입지를 선택하는 문제로 크게 최대지역커버문제(Maximal Covering Location Problem)와 고정비를 가지는 설비입지선정문제(Fixed Charge Facility Location Problem)로 나누어지게 된다. 두 문제는 모두 설비 입지 선정 분야에 있어 가장 중요한 문제들 중 하나로 인식되어 왔으며, 이에 대한 연구도 매우 활발히 이루어져 왔다.

최대지역커버문제는 서비스 수준을 높이는 것이 목적으로, 설비가 커버하는 수요(covered demand)의 합을 최대화하면서 주어진 p 개의 설비를 세울 위치를 선정하는 문제이다. 즉, 커버하는 수요가 많을수록 서비스 수준도 높아진다고 보고 보다 많은 수요를 커버하기 위한 설비의 위치를 찾는 것이다. 여기

서 수요를 커버한다는 것은 설비의 위치가 수요 발생 지점으로 부터 일정 거리 S 이내에 있다는 뜻이며, 이 S 를 간단히 커버리지 거리(coverage distance)라고 한다.

커버되지 못한 수요(uncovered demand)는 서비스를 받지 못하는 수요가 아니라, 서비스를 받긴 하지만 서비스 받는 설비로부터의 거리가 커버리지 거리 밖에 있는 수요로서 만족할 만한 서비스 수준을 제공받지 못하는 수요를 말한다. 즉, 최대 지역커버문제는 수요지점과 설비 사이의 거리로 정의된 서비스 수준을 최대화할 수 있는 입지를 선택하는 것이다. Church and ReVelle(1974)에 의해 최초로 수식화된 최대지역커버문제는 소방서의 위치선정문제(Schilling *et al.*, 1980), 앰불런스의 위치선정문제(ReVelle *et al.*, 1976) 등에 응용되었다. Daskin (1995)과 Mirchandani and Francis(1990)는 최대지역커버문제에 관한 응용 분야와 해법들에 관해 소개하였으며, Galvao and

[†] 연락저자 : 이영훈 교수, 120-749 서울시 서대문구 신촌동 134 연세대학교 컴퓨터과학 · 산업시스템공학과, Fax : 02-364-7807,
E-mail : youngh@yonsei.ac.kr

ReVell(2000)은 이 문제에 라그랑지안 기법을 적용하여 좋은 결과를 얻었다.

반면, 고정비를 가지는 설비입지선정문제는 비용의 최소화가 목적으로, 각 입지마다 설비를 세우는 데 필요한 일정한 고정비가 존재하는 상황에서 최소 비용으로 모든 수요를 만족시킬 수 있는 위치를 찾는 문제이다. 여기에서 비용이란 설비를 세우는 데 필요한 고정비와 거리에 비례하는 운송비를 합한 비용으로 정의된다. 이 문제는 통신 네트워크의 설계(Mirzain, 1985), 분배 센터의 위치선정문제(Nozick and Turnquist, 1998) 등에 응용되었으며, Held *et al.*(1974)과 Parker and Radin(1988)은 라그랑지안 기법을 통한 문제의 해법을 제시하였다.

최대지역커버문제가 서비스 수준에 초점을 맞추고 있는 반면, 고정비를 가지는 설비입지선정문제는 비용의 최소화 초점을 맞추고 있어, 두 문제는 서로 상충되는 성격을 가지고 있다. 즉, 서비스 수준을 높이려면 더 많은 비용을 투자해야 하고, 비용을 줄이면 서비스 수준도 떨어지게 되는 서비스 수준과 비용과의 트레이드오프(trade-off) 관계 때문에 이 두 문제는 각각 다른 관점에서 다루어져 왔다. 하지만 현실적으로는 서비스 수준의 최대화와 비용의 최소화를 동시에 고려해야 하며, 이 두 가지가 적절히 조화될 수 있도록 하는 것이 중요하다. 이러한 관점에서 서비스 수준과 비용 두 가지를 동시에 고려하여 입지를 선정하는 입지선정모형의 필요성이 대두되었으며 이에 대한 연구도 이미 진행중이다. Goicoechea *et al.*(1982)은 비용과 서비스 수준의 적절한 트레이드오프 관계를 계산하고자 하였으며, Nozick(2001)은 미리 정해 놓은 서비스 수준을 만족하는 범위 내에서 최소의 비용으로 수요를 충족시킬 수 있는 모형을 개발하고 이의 해법을 제시하였다.

본 논문에서도 이처럼 비용과 서비스 수준 두 가지를 동시에 고려한 입지선정모형에 관한 연구를 시도하였다. 서비스 수준을 높이면서 비용을 줄이는 수리적 모형은 크게 두 가지 관점으로 접근할 수 있다. 하나는 기존의 연구처럼 제약조건을 일정 수준 이상의 서비스 수준으로 설정하고, 비용을 최소화하는 모형이고, 또 다른 하나는 기존의 연구와는 반대로 제약 조건을 최대 사용 가능 비용으로 설정하면서 서비스 수준을 최대화하는 모형이다. 현실적으로 어떤 모형이 더 타당하다고는 할 수 없으나, 기존의 수리적 모형을 이용한 연구는 비용보다는 서비스 수준을 제약조건으로 하여 접근하였다. 이는 비용을 제약조건으로 설정했을 경우에 발생하는 여러 가지 문제점 때문이며, 대표적인 문제점 중 하나는 해법상의 어려움으로 제약조건을 만족하는 해를 찾기가 매우 어렵다는 것이다. 그러나 현실적으로는 투자비용이 미리 정해져 있는 상황에서 서비스 수준을 최대화할 수 있는 입지를 선정하고자 하는 상황이 발생하며, 비용을 제약조건으로 설정한 입지선정모형이 필요하다.

본 논문에서는 미리 투자비용의 한도를 정해 놓고 이 한도 내에서 최대의 서비스 수준을 달성할 수 있는 설비의 위치를 결정하는 모형을 개발하고 이의 해법을 제시하고자 한다. 최

대지역커버문제와 고정비를 가지는 입지선정문제 모두 라그랑지안 기법을 적용하면 좋은 결과를 얻을 수 있다(Galvao and ReVelle, 2000; Nozick, 2001). 본 논문에서도 라그랑지안 기법을 적용한 발견적 기법을 사용하여 해를 구하고자 하였다.

이 후 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 수리적 모형을 제시하고, 3장에서는 라그랑지안 기법으로 이완된 두 가지 수리적 모형을 소개한 후, 커팅 알고리즘을 적용한 발견적 기법으로 문제의 해를 찾는 방법을 소개한다. 4장에서는 실험 및 결과 분석을 하고, 마지막으로 5장에서는 결론 및 토의를 제시한다.

2. 수리적 모형

비용의 제약하에서 서비스 수준을 최대화 하는 설비입지선정 문제는 다음과 같은 수리적 모형으로 표현할 수 있다.

기호

i : i 번째 수요 지역

j : j 번째 설비 후보 지역

f_j : j 에 설비를 세울 때 필요한 고정비용

h_i : 지역 i 의 수요

d_{ij} : 지역 i 에서 지역 j 까지의 직선거리

c : 단위 수요당 거리비용

V : 최대 투자 가능 비용(= 총 비용의 한계)

q_{ij} : 노드 j 에 세워진 설비가 노드 i 에 있는 수요를 커버하면 1, 아니면 0.

X_j : 설비가 후보지 j 에 세워지면 1, 아니면 0.(의사 결정 변수)

Y_{ij} : 노드 j 에 있는 설비가 노드 i 의 수요를 담당하면 1, 아니면 0. (의사 결정 변수)

수리적 모형

$$\max \sum_i \sum_j h_i q_{ij} Y_{ij} \quad (1)$$

s.t.

$$\sum_j Y_{ij} = 1 \quad \forall i, \quad (2)$$

$$Y_{ij} \leq X_j \quad \forall i, j, \quad (3)$$

$$\sum_j f_j X_j + c \sum_i \sum_j h_i d_{ij} Y_{ij} \leq V, \quad (4)$$

$$X_j = 0, 1 \quad \forall j, \quad (5)$$

$$Y_{ij} = 0, 1 \quad \forall i, j. \quad (6)$$

식 (1)은 커버하는 수요의 총합을 최대화하는 목적함수를

의미한다. 이는 서비스 수준을 최대화하는 것이며, 수요의 충족 유무가 아니라 커버하는 수요가 많을수록, 즉 설비와 그 설비로부터 수요를 공급받는 노드와의 거리가 일정 거리 이내인 수요가 많을수록 서비스 수준이 높다고 보고, 그렇지 않을 때는 수요는 공급받지만 서비스 수준은 낮다고 보는 것으로 최대지역커버문제에서와 동일하다. 식 (2)는 모든 수요를 충족시켜야 한다는 제약식이며, 식 (3)은 입지후보지 j 가 선택되었을 때만 그곳에서 서비스를 받을 수 있다는 제약식이다. 식 (4)는 비용 제약조건으로 고정비와 운송비를 합한 총비용이 미리 정한 비용을 초과해서는 안 된다는 제약식이며, 마지막으로 식 (5)와 식 (6)은 의사결정변수의 이진정수조건을 표현한 제약식이다. 식 (2), (3), (5), (6)은 고정비를 가지는 설비입지선정 문제에서 주로 나타나는 형태의 제약조건이다. 이 수리적 모형은 최대지역커버문제나 고정비를 가지는 설비입지선정 문제와 마찬가지로 규모가 큰 실제 문제에서는 최적해(optimal solution)를 찾는 것이 매우 어렵다. 예를 들면 100개의 고객 노드와 100개의 설비후보지역에 대한 문제는 10,000개 이상의 제약식과 변수로 구성된 정수계획법 문제가 되어 최적화 계산에 장시간이 소요된다. 따라서 라그랑지안 기법을 이용한 발견적 기법으로 문제의 해를 찾고자 하였다.

3. 발견적 기법

3.1 라그랑지안 기법으로 이완된 수리적 모형

앞 장에서 제시한 수리적 모형에 대해 라그랑지안 기법을 적용하여 해결하고자 식 (4)의 이완을 포함하는 두 가지의 라그랑지안 기법을 시도하였다. 첫 번째 방법은 할당이완(allocation relaxation)으로 모든 수요의 할당제한인 식 (2)와 비용제한인 식 (4)를 라그랑지안 기법으로 이완시킨 것이고, 두 번째 방법은 분할이완(decoupling relaxation)으로 설비 노드와 수요 노드의 관계에 대한 제약인 식 (3)과 비용제한인 식 (4)를 라그랑지안 기법으로 이완시킨 것이다. 두 기법의 해와 성능을 실험을 통해 비교, 분석하고자 한다. 이완된 수리적 모형은 각각 다음과 같다.

이완된 수리적 모형 (할당이완)

$$\max_{\gamma, \lambda} \max_{X, Y} \sum_j \frac{\gamma}{V} f_j X_j + \sum_i \sum_j (h_i q_{ij} + \frac{\gamma h_i d_{ij}}{V} - \lambda_{ij}) Y_{ij} + \sum_i \lambda_i - \gamma \quad (7)$$

s.t.

$$Y_{ij} \leq X_j \quad \forall i, j, \quad (8)$$

$$X_j = 0, 1 \quad \forall j, \quad (9)$$

$$Y_{ij} = 0, 1 \quad \forall i, j, \quad (10)$$

$$\gamma \leq 0, \quad (11)$$

$$\lambda_i \text{ 부호제한 없음 } \forall i. \quad (12)$$

이완된 수리적 모형 (분할이완)

$$\max_{\gamma, \lambda} \max_{X, Y} \sum_j \left(\frac{\gamma}{V} f_j - \sum_i \lambda_{ij} \right) X_j + \sum_i \sum_j \left(h_i q_{ij} + \lambda_{ij} + \frac{\gamma h_i d_{ij}}{V} \right) Y_{ij} - \gamma \quad (13)$$

s.t.

$$\sum_j Y_{ij} = 1 \quad \forall i, \quad (14)$$

$$X_j = 0, 1 \quad \forall j, \quad (15)$$

$$Y_{ij} = 0, 1 \quad \forall i, j, \quad (16)$$

$$\gamma \leq 0, \quad \lambda_{ij} \leq 0 \quad \forall i, j. \quad (17)$$

할당이완모형에서는 식 (2)와 (4)가 이완되어 라그랑지안 승수(lagrangean multiplier)인 γ 와 λ_i 가 목적함수에 포함되었다. 분할이완모형에서는 식 (3)과 (4)가 이완되어 라그랑지안 승수 γ 와 λ_{ij} 가 목적함수에 포함되었다. 발견적 기법은 라그랑지안 기법으로 이완된 수리적 모형을 사용하여 전개된다.

3.2 발견적 기법의 알고리즘 개요

본 논문에서 사용한 발견적 기법의 알고리즘에 대한 개요는 다음과 같다.

- 단계 1: 초기해(Initial Solution) 계산
- 단계 2: 상한(Upper Bound) 계산
- 단계 3: 하한(Lower Bound) 계산
- 단계 4: 라그랑지안 승수 업데이트
- 단계 5: 종료 조건 검사

발견적 기법은 단계 1에서 초기해를 구한 후 단계 2부터 단계 5의 과정을 거치게 된다. 본 논문에서는 단계 2부터 단계 5의 과정을 스텝이라 정의하기로 한다. 스텝을 반복하다가 종료조건이 만족되면 알고리즘은 종료하게 된다. 이 알고리즘은 단계 2의 상한계산 부분을 제외하고는 두 가지 이완기법에 대해 동일하게 적용된다.

3.3 커팅 알고리즘(Cutting Algorithm)

커팅 알고리즘은 발견적 기법의 하한계산 시 생기는 문제점을 해결하기 위해 개발한 알고리즘이다. 본 논문에서 적용한 두 가지 라그랑지안 기법은 상한을 구할 때 제약식 일부를 이완시켜 구하게 된다. 하한은 상한에서 결정된 입지변수를 그

대로 사용하면서 이완된 제약식을 모두 만족시키는 값을 구해야 하는데, 본 논문의 수리적 모형에 포함된 비용제약 때문에 이런 값을 찾기가 매우 어렵다.

본 논문의 수리적 모형과 유사한 Nozick(2001)의 모형은 비용에 대한 제약이 전혀 없기 때문에, 하한을 구하는 과정에서 모든 노드에 대한 수요를 충족시키기 위해 단순히 오픈 노드를 추가하면 되었다. 즉, Nozick(2001)의 모형 또는 이와 유사한 형태의 모형은 필요한 곳에 추가로 설비를 세우기만 하면 실행 가능해를 찾을 수 있지만, 본 논문의 모형은 비용제약 때문에 이러한 방법으로는 실행 가능해를 찾는 것이 매우 어렵다. <Figure 1>은 이와 같은 사례를 나타낸다.

<Figure 1>의 네트워크 선상에 표시된 숫자는 노드 간 거리, 모든 노드의 수요는 1, 단위당 운송비는 10, 설비를 세우는 데 드는 고정비는 모두 200, 비용제약조건 V 는 600이라 가정한다. 현재 스텝에서 상한을 구한 결과, 1번과 2번 노드가 설비 입지로 선택되었다면 총비용은 고정비400과 운송비 350을 더한 750으로 비용제약을 만족시키지 못한다. 제약조건을 만족하는 해를 구하기 위하여 기존 연구처럼 오픈 노드를 클로즈하거나 새로운 노드를 오픈하는 방법을 시도하면, 1번을 클로즈했을 때 총비용은 650, 2번을 클로즈했을 때 총비용은 700으로 비용제약을 만족하는 해를 찾을 수 없으며, 새로운 노드를 오픈하면, 3번을 오픈했을 때 총비용은 800, 4번을 오픈했을 때 총비용은 750, 3번과 4번을 같이 오픈했을 때 총비용은 800으로 역시 제약조건을 만족하는 해를 찾을 수 없다. 이 예제에서 비용제약을 만족하는 해는 2번을 클로즈하고 4번을 오픈하여 총비용이 600이 되는 해이며, 이러한 조합을 찾는 데 걸리는 시간이 노드수가 많아질수록 기하급수적으로 늘어나므로 오픈 또는 클로즈하는 방법으로 제약조건을 만족하는 해를 찾는다는 것은 무리한 일이다. 이러한 문제점이 발생하는 주된 이유는 총비용이 서로 트레이드오프 관계에 있는 고정비와 운송비로 구성되어 있기 때문이다. 라그랑지안 기법을 이용하는 이와 유사한 기존 연구에서 비용을 제약하지 않은 것은 이러한 이유 때문이다. 이처럼 비용제약이 있는 문제에서는 노드의 오픈 또는 클로즈가 비용의 감소를 보장해 주지 못하지만,

커팅 알고리즘은 비용의 감소를 보장한다.

커팅 알고리즘은 <Figure 1>의 예제에서와 같이 현재 스텝의 상한에서 결정된 오픈 노드로는 비용제약을 만족시키지 못하는 경우, 운송비가 가장 큰 노드부터 순서대로 삭제(cutting)하여 삭제된 노드에 대한 운송비를 총비용에서 제외시킴으로써 현재 스텝에서 비용제약을 만족시키는 해를 발견할 수 있다. 이와 같이 노드를 삭제하였을 경우, 모든 노드의 수요를 만족시켜야 한다는 제약식 (2)는 현재 스텝에서는 만족시킬 수 없지만, 스텝을 계속 진행하면 식 (2)를 만족하는 실행 가능해를 찾을 수 있기 때문에 해의 실행 불가능성(infeasibility)을 한 시적으로 허용함으로써, 라그랑지안 기법의 스텝을 계속 진행할 수 있게 만든다.

일반적인 라그랑지안 기법은 매 회(iteration)의 시행에서 실행 가능해를 찾아내어야 하며 이를 통해 상한과 하한을 업데이트하여 최적해에 도달하게 된다. 즉, 라그랑지안 기법은 실행 가능영역만 탐색하는 데 비해, 커팅 알고리즘은 실행 불가능영역의 탐색을 가능하게 함으로써 본 논문의 문제와 같이 실행 가능해를 찾기가 어려운 문제에 대한 해법을 제시할 수 있다. 이처럼 커팅 알고리즘은 본 논문의 문제뿐 아니라 라그랑지안 기법을 이용하는 다른 문제에도 응용될 수 있는 방법 이기에 시사하는 바가 크다. 커팅 알고리즘은 발견적 기법의 단계 3에서 사용하며, 구체적 실행방법은 다음 절에 제시한다.

3.4 발견적 기법의 알고리즘

할당이완기법과 분할이완기법 각각에 대한 발견적 기법의 단계별 세부 사항은 다음과 같다.

(1) 할당이완기법

단계 1: 초기해 계산

커버 가능거리($=S$)에 따라 거의 모든 수요를 커버할 수 있는 최소 개수의 노드를 오픈한다. 예를 들어 100×100 상에서 S 가 25라면 4개를 오픈한다. 모든 수요 노드를 현재 오픈된 노드로

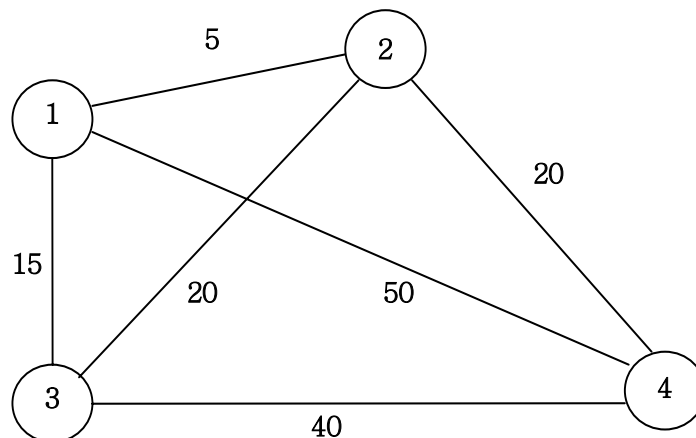


Figure 1. A simple network.

부터 서비스를 받도록 한 후 Y_{ij} 를 계산하고 이로부터 목적함수 값을 구한다. 이 값이 비용제약조건을 만족하면 이것이 초기해가 된다. 만족하지 않으면 커팅 알고리즘을 통하여 비용제약조건에 맞게 해를 수정하여 사용한다. 초기해는 라그랑지안 승수 계산에서 초기 하한으로 사용된다.

단계 2: 상한 계산

현재 스텝에서 이완된 수리적 모형의 최적해를 구하면 그것은 현재 스텝의 상한이 된다. 할당이완모형에서는 모든 수요를 할당해야 한다는 제약조건은 존재하지 않지만, 오픈된 노드에서만 수요를 할당받을 수 있다는 제약식 (8)이 존재하므로, 입지변수 X_j 를 먼저 계산한 후 할당변수 Y_{ij} 를 계산하면 최적해를 구할 수 있다. 할당이완모형의 최적해를 구하는 과정은 다음과 같다.

입지변수 X_j 의 계산

모든 j 에 대하여 다음을 계산한다.

$$K_j = \frac{\gamma}{V} f_j + \sum_i \max(0, h_i q_{ij} + \frac{\gamma h_i d_{ij}}{V} - \lambda_i)$$

여기서 $K_j > 0$ 이면 $X_j = 1$ 로, 그렇지 않으면 $X_j = 0$ 으로 한다. 이렇게 함으로써 목적함수의 최대화에 기여할 수 있는 X_j 만을 선택하게 된다.

할당변수 Y_{ij} 의 계산

모든 j 에 대하여, $X_j = 1$ 이고, $h_i q_{ij} + \gamma h_i d_{ij} / V - \lambda_i > 0$ 이면 Y_{ij} 는 1로, 그렇지 않으면 0으로 한다. 이렇게 함으로써, 목적함수의 최대화에 기여할 수 있는 Y_{ij} 만을 선택할 수 있고, 동시에 $X_j = 1$ 인 j 에 대해서만 Y_{ij} 를 1로 선택하므로 제약식 (8)을 만족시킨다.

목적함수 계산

위에서 계산한 X_j 와 Y_{ij} 를 목적함수에 대입하여 목적함수 값을 구할 수 있다. 이 값은 이완된 문제의 최적해인 동시에 본래 문제의 상한이 된다.

단계 3: 하한(Lower Bound) 계산

하한은 본래 문제에 대한 해가 되어야 하기 때문에 이완시켰던 모든 제약식을 다시 만족하도록 하는 작업이 필요하다. 하한은 상한을 구하는 과정에서 입지로 선택된 노드를 이용하여 찾게 되는데 상세한 과정은 다음과 같다.

단계 3.1. 상한을 구하는 과정에서 입지로 선택된 노드들을 오픈한다.

단계 3.2. 각 수요 노드를 자신과 가장 가까운 오픈 노드에 연결(greedy heuristic)하고 총비용을 계산한다.

단계 3.3. 총비용이 V 이하이면 단계 3.4로 간다. 그렇지 않다면 단계 3.5로 간다.

단계 3.4. 이 해는 실행 가능한 해이므로 본래 문제의 목적함수, 즉 식 (1)에 변수값들을 대입하여 하한을 구하고 단계 4로 넘어간다.

단계 3.5. 이 해는 실행 불가능한 해이므로 다음 과정을 거쳐 하한을 구한다. 이 과정에 커팅 알고리즘이 포함된다.

- (1) 우선 고정비를 V 보다 적게 만들기 위해, 현재의 오픈 노드 중 커버하는 수요가 적은 노드부터 차례로 클로즈한다. 즉, 현재 $X_j = 1$ 인 X_j 를 순서대로 하나씩 0으로 만든다. 이렇게 하여 고정비의 합이 V 보다 적어지면 다음으로 넘어간다.
- (2) 현재의 오픈 노드를 이용하여 운송비를 포함한 총비용을 계산한다. 총비용이 V 이하이면 (4)로 간다. 그렇지 않으면 (3)으로 간다.
- (3) 커팅 알고리즘 실행: 운송비를 줄이기 위해 수요 노드를 순서대로 하나씩 삭제(cutting)한다. 보다 빠르게 운송비를 감소시키기 위하여, 운송비가 큰 수요 노드부터 차례로 커팅한다. 이때 커팅된 노드는 서비스를 받지 못하며, 이 노드의 수요는 본 문제의 목적함수 값, 즉 커버되는 수요(covered demand)에서 제외시킨다. 총비용이 V 이하가 될 때까지 커팅하고, 총비용이 V 이하가 되면 다음으로 넘어간다.
- (4) 현재까지 계산된 목적함수 값을 하한으로 취하고, 서비스를 받지 못하는 노드 및 그 수요의 합을 기록한 후 단계 4로 넘어간다.

단계 4: 라그랑지안 승수들의 업데이트

기존의 연구방법에 따라 할당이완기법의 라그랑지안 승수들을 업데이트하면 다음과 같다(Crowder, 1976; Carmeni *et al.*, 1975).

$$t^n = \frac{\beta^n (UB^n - LB^n)}{\sum_i (\sum_j Y_{ij}^n - 1)^2 + ((\sum_j f_j X_j^n + c \sum_{ij} h_i d_{ij} Y_{ij}^n) / V - 1)^2} \tag{18}$$

$$\mu_i^n = \phi \mu_i^{n-1} + (\sum_j Y_{ij}^n - 1) \quad \forall i, \tag{19}$$

$$\lambda_i^{n+1} = \lambda_i^n - t^n \mu_i^n \quad \forall i, \tag{20}$$

$$v^n = \phi v^{n-1} + ((\sum_j f_j X_j^n + c \sum_{ij} h_i d_{ij} Y_{ij}^n) / V - 1), \tag{21}$$

$$\gamma^{n+1} = \min(0, \gamma^n + t^n v^n) \tag{22}$$

여기서 t_n 은 n 번째 스텝의 스텝 사이즈(Step-Size)로서, 상한

과 하한의 차이가 줄어드는 정도에 영향을 준다. 스텝 사이즈의 분자 부분인 UB_n 및 LB_n 은 각각 n 번째 스텝의 상한과 하한이며, β^n 은 n 번째 스텝의 스텝 사이즈 모수(Parameter)로서 $0 < \beta^n \leq 2$ 를 만족하는 스칼라(Scalar) 값이다. β^n 의 초기값은 모든 실험에서 2로 하였다. β^n 은 스텝이 진행됨에 따라 바뀌게 되는데, 기존의 논문에서 사용한 방법을 참조하여 변화시켰다 (Crowder, 1976; Nozick, 2001). 이 방법은 초기에 a, b, c, d 라는 네 변수를 정하여 처음 b 번째 스텝까지는 β^n 을 a 로 두다가 이후 a 와 b 를 c 로 나누어서 새로운 a, b 를 만든 다음 같은 과정을 반복 하다가 $b < d$ 가 되면, 매 d 번째 스텝마다 β^n 을 c 로 나누어서 계속 진행시키는 방법이다. 본 논문의 실험에서 a 는 2, b 는 6*노드 수, c 는 2, d 는 40으로 정하였다. 스텝 사이즈의 분모 부분은 라그랑지안 기법으로 이완된 제약식에 대한 놈(Norm)이다. 식 (19)와 (20)은 수리적 모형의 제약식 (2)를 이완시켜 추가된 파라미터인 λ_{ij} 에 대한 업데이트 방법이며, 식 (21)과 (22)는 식 (4)를 이완시켜 추가된 파라미터의 업데이트 방법이다. φ 는 가중요소로, 역시 상한과 하한의 갭에 영향을 미치며 모든 실험에서 0.4로 두었다.

단계 5: 종료조건을 검사

알고리즘의 종료조건은 다음과 같다.

- (1) 계산시간이 지정한 시간에 도달
- (2) 갭이 미리 정한 값보다 작아졌을 때
- (3) t가 0.001보다 작아졌을 때

단계 2에서 단계 5의 과정을 반복하다가, 위 종료조건 중 하나라도 만족하게 되면 알고리즘은 종료하게 되며, 커팅된 노드가 발생하지 않은 스텝 중에서, 즉 실행 가능해 중에서 가장 큰 하한을 해로 취한다. 만약 계산시간이 지정시간에 도달했지만 현재까지 진행된 모든 스텝에서 커팅된 노드가 존재한다면, 이 문제는 실행 가능해가 없다고 할 수는 없지만 본 논문의 알고리즘으로는 제한된 시간 내에 실행 가능해를 찾지 못하였으므로 편의상 실행 불가능이라 판단한다. 여기서 갭이란 상한과 하한의 차이를 퍼센트로 나타낸 값으로, 커팅 알고리즘을 실행하여 얻어진 하한은 모든 제약조건을 만족하지는 못하는 해이므로 이것을 제외한 모든 제약조건을 만족시키는 현재까지의 가장 큰 하한과 현재까지의 가장 작은 상한의 퍼센트 값으로 정의하였다.

(2) 분할이완기법

단계 1: 초기해 계산

할당이완기법과 동일하다.

단계 2: 상한 계산

할당이완기법에서와 마찬가지로 분할이완모형의 최적해가

분할이완기법의 상한이 된다. 분할이완모형의 최적해를 구하는 과정은 다음과 같다.

입지변수 X_j 의 계산

모든 j 에 대하여 $f_j \gamma / V - \sum \lambda_{ij} \geq 0$ 이면 $X_j=1$ 로, 그렇지 않으면 $X_j=0$ 으로 한다. 이렇게 함으로써 목적함수에서 X_j 에 관련된 식들을 최대화할 수 있다.

할당변수 Y_{ij} 의 계산

모든 i, j 에 대하여 다음을 계산한다.

$$L_{ij} = h_i q_{ij} + \lambda_{ij} + \gamma h_i d_{ij} / V$$

각각의 i 에 대하여 L_{ij} 가 가장 큰 j 에 대한 Y_{ij} 하나만 1로 하고 나머지 Y_{ij} 는 0으로 한다. 이렇게 함으로써 모든 수요를 할당해야 한다는 제약식 (14)를 만족하는 동시에 목적함수에서 Y_{ij} 에 관련된 식들을 최대화할 수 있다.

목적함수 계산

할당이완기법과 마찬가지로 위에서 계산된 X_j 와 Y_{ij} 를 목적함수인 식 (13)에 대입하여 상한을 구한다.

단계 3: 하한(Lower Bound) 계산

할당이완기법과 동일하다.

단계 4: 라그랑지안 승수들의 업데이트

분할이완기법의 라그랑지안 승수 업데이트 방법은 다음과 같다.

$$t^n = \frac{\beta^n (UB^n - LB^n)}{\sum_{ij} (Y_{ij}^n - X_j^n)^2 + ((\sum_j f_j X_j^n + c \sum_{ij} h_i d_{ij} Y_{ij}^n) / V - 1)^2}$$

$$\mu_{ij}^n = \varphi \mu_{ij}^{n-1} + Y_{ij}^n - X_j^n \quad \forall i, j,$$

$$\lambda_{ij}^{n+1} = \min(0, \lambda_{ij}^n + t^n \mu_{ij}^n) \quad \forall i, j,$$

$$v^n = \varphi v^{n-1} + ((\sum_j f_j X_j^n + c \sum_{ij} h_i d_{ij} Y_{ij}^n) / V - 1),$$

$$\gamma^{n+1} = \min(0, \gamma^n + t^n v^n)$$

식 (24)와 (25)는 수리적 모형의 제약식 (3)을 이완시켜 추가된 파라미터인 λ_{ij} 에 대한 업데이트 방법이며, 나머지 사항은 할당이완기법과 동일하다.

단계 5: 종료조건을 검사

할당이완기법과 동일하다.

4. 실험

본 논문에서 소개된 알고리즘은 마이크로소프트 사의 비주얼 C++로 구현하였으며 펜티엄 1.6 GHz PC에서 실험하였다.

4.1 테스트 문제

알고리즘의 검증을 위하여 임의로 3종류의 실험 노드를 생성하였다. 생성한 노드는 다음과 같으며 이를 좌표축 상에 나타내면 <Figure 2>와 같다.

- (a) 100X100 상에서 임의로 50개 노드를 생성.
- (b) 100X100 상에서 임의로 75개 노드를 생성.
- (c) 100X100 상에서 임의로 100개 노드를 생성.

위의 세 경우 모두 각 지점 평균 수요는 평균 5, 표준편차 1인 범위에서 임의 생성하였다. 75노드의 경우 50노드의 모든 노드를 포함하면서 25노드가 추가된 것이며, 100노드는 이에 25노드를 더 추가한 것이다. 따라서 노드 수가 많아지는 것은 면적당 노드 밀도가 높아지는 것이고, 이것은 수요 노드의 분포가 집중되는 것으로 해석할 수 있다. 운송비와 고정비는 실험 상황에 따라 비율을 달리 정하였으며 실험 세부 사항에 이를 나타내었다.

현실적으로 최대 수요 커버를 목적으로 입지후보지 중에서 적절한 위치를 선택할 때는 다음 두 가지 경우를 생각해 볼 수 있다. 하나는 주어진 비용한도(이하 V라 함) 내에서 일정 수준의 커버리지를 달성하기 위해 적절한 커버 가능거리(이하 S라 함)를 결정해야 하는 경우이고, 또 다른 하나는 S가 미리 결정되어 있는 경우에 일정 수준의 커버리지를 목표로 적절한 비용을 산정하는 경우이다. 본 논문에서는 이 두 가지 상황을 모두 고려하여 실험을 설계했다. 첫 번째 실험은 적절한 S의 결정에 대한 실험으로 V를 고정시키고 S를 바꾸어 가며 실험을 하였다. 두 번째 실험은 적절한 비용 수준에 대한 실험으로 S를 고정시키고 V를 바꾸어 가며 실험을 하였다. 실험의 세부적인 사항은 다음과 같다.

실험 1. V가 고정된 상황에서 S를 10부터 100까지 10단위로 변화시키며 실험

- case 1-1. 모든 노드에 대한 고정비가 10,000이고 단위당 운송비는 1일 때
- case 1-2. 모든 노드에 대한 고정비가 1,000이고 단위당 운송비는 10일 때
- case 1-3. 모든 노드에 대한 고정비가 100이고 단위당 운송비는 100일 때

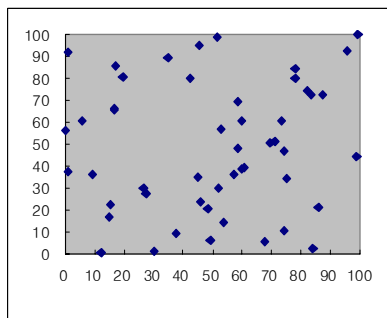
실험 2. S가 30으로 고정된 상황에서 V를 변화시키며 실험

- case 2-1. 모든 노드에 대한 고정비가 10,000이고 단위당 운송비는 1일 때
- case 2-2. 모든 노드에 대한 고정비가 1,000이고 단위당 운송비는 10일 때
- case 2-3. 모든 노드에 대한 고정비가 100이고 단위당 운송비는 100일 때

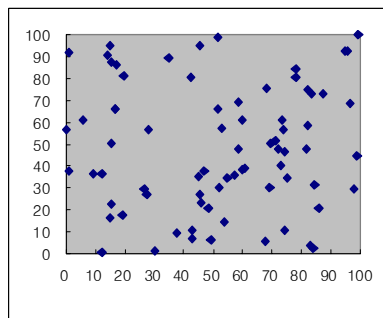
실험 1에서 고정비용 V는 노드별, 고정비와 운송비의 비율 별로 별도의 실험을 통해 상황에 따라 적절한 값을 선택하였고, 실험 2에서 V의 변화 역시 상황에 따라 적절한 값을 취하였다. 여기서 커버리지란 총수요 대비 커버하는 수요의 퍼센티지를 말하며, 목적함수 값과 정비례한다. 50노드, 75노드, 100노드 각각에 대한 종료 갭은 4%, 3%, 2%이며, 종료시간은 모두 1200초이다. 갭은 상한과 하한의 차이를 퍼센트로 표시한 것이다. 각 노드 수별로 갭이 지정수준 이하가 되거나 지정 시간까지 진행하게 되면 알고리즘을 종료한다.

4.2 결과 분석

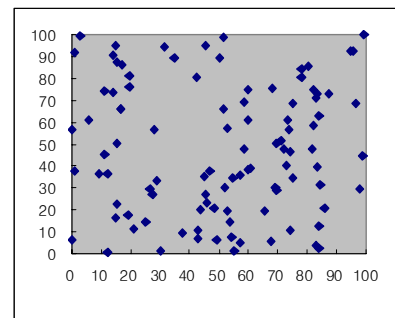
<Table 1>은 case 1-1에 대한 결과값이다. <Table 1>에는 노드 수별로 할당이완기법과 분할이완기법 각각에 대하여 S 변화에 따른 최고 커버리지, 상한과 하한 및 이들의 갭을 나타내었으며, 이 해를 실행하기 위해 드는 총비용, 종료 스텝, 해를 구하는 데 소요된 계산시간, 설비의 입지로서 결정된 노드 번호를 차례로 제시하였다. 결과로 제시된 하한은 모든 제약 조건



(a) 50-node network



(b) 75-node network



(c) 100-node network

Figure 2. Test networks.

Table 1. Computational results for case 1-1

N	S	Relaxation	Coverage (%)	Upper Bound	Lower Bound	Gap (%)	Cost	Steps	Time (sec)	Facility numbers
50	100	Allocation	100.00	242.00	242	0.00	19,169	1	0.00	3
		Decoupling	100.00	242.00	242	0.00	19,169	1	0.00	3
	90	Allocation	100.00	242.00	242	0.00	19,169	1	0.00	3
		Decoupling	100.00	242.00	242	0.00	19,169	1	0.00	3
	80	Allocation	100.00	242.00	242	0.00	19,169	1	0.00	3
		Decoupling	100.00	242.00	242	0.00	19,169	1	0.00	3
	70	Allocation	100.00	242.00	242	0.00	47,836	645	1.79	3, 14, 15, 35
		Decoupling	97.93	242.00	237	2.07	19,169	1	0.00	3
	60	Allocation	100.00	242.00	242	0.00	46,460	658	1.69	9, 13, 17, 39
		Decoupling	100.00	242.00	242	0.00	45,562	3	0.00	1, 2, 3, 5
	50	Allocation	100.00	242.00	242	0.00	45,529	57,159	132.93	17, 42, 43, 45
		Decoupling	100.00	242.00	242	0.00	35,535	39	0.15	16, 31, 42
	40	Allocation	98.35	242.00	238	1.65	45,177	24,231	59.16	4, 19, 29, 49
		Decoupling	98.35	242.00	238	1.65	45,611	59	0.22	6, 19, 48, 49
	30	Allocation	90.50	227.42	219	3.70	44,443	262,437	647.80	2, 19, 20, 44
		Decoupling	90.50	228.05	219	3.97	44,443	5,853	20.51	2, 19, 20, 44
	20	Allocation	64.88	173.70	157	9.61	45,133	648,567	1200.00	3, 4, 10, 49
		Decoupling	64.88	173.76	157	9.65	45,133	427,474	1200.00	3, 4, 10, 49
	10	Allocation	32.64	84.61	79	6.62	46,185	684,585	1200.00	5, 23, 38, 43
		Decoupling	32.64	84.70	79	6.73	46,203	462,375	1200.00	5, 23, 38, 43
75	100	Allocation	100.00	368.00	368	0.00	23,640	1	0.01	3
		Decoupling	100.00	368.00	368	0.00	23,640	1	0.00	3
	90	Allocation	100.00	368.00	368	0.00	23,640	1	0.00	3
		Decoupling	100.00	368.00	368	0.00	23,640	1	0.00	3
	80	Allocation	100.00	368.00	368	0.00	23,640	1	0.00	3
		Decoupling	100.00	368.00	368	0.00	23,640	1	0.00	3
	70	Allocation	98.64	368.00	363	1.36	23,640	1	0.00	3
		Decoupling	98.64	368.00	363	1.36	23,640	1	0.00	3
	60	Allocation	100.00	368.00	368	0.00	49,944	688	5.16	60, 62, 67, 71
		Decoupling	100.00	368.00	368	0.00	48,540	3	0.01	1, 2, 3, 5
	50	Allocation	100.00	368.00	368	0.00	47,845	6,665	29.39	2, 20, 42, 57
		Decoupling	98.64	368.00	363	1.36	49,939	148	1.64	17, 28, 41, 46
	40	Allocation	98.91	368.00	364	1.09	48,276	8,666	29.44	6, 34, 49, 55
		Decoupling	97.83	368.00	360	2.17	47,879	162	1.86	19, 23, 29, 48
	30	Allocation	91.30	346.35	336	2.99	47,122	39,250	95.94	6, 25, 34, 75
		Decoupling	91.58	347.40	337	2.99	46,828	3,069	31.23	2, 19, 34, 53
	20	Allocation	64.95	250.07	239	4.43	46,825	350,000	1163.39	5, 6, 24, 38
		Decoupling	64.95	249.79	239	4.32	46,825	236,344	1200.00	5, 6, 24, 38
	10	Allocation	34.51	133.92	127	5.17	47,164	350,000	989.67	5, 6, 20, 38
		Decoupling	34.51	133.84	127	5.11	47,164	244,565	1200.00	5, 20, 38, 56
100	100	Allocation	100.00	496.00	496	0.00	29,080	1	0.00	3
		Decoupling	100.00	496.00	496	0.00	29,080	1	0.01	3
	90	Allocation	100.00	496.00	496	0.00	29,080	1	0.00	3
		Decoupling	100.00	496.00	496	0.00	29,080	1	0.01	3
	80	Allocation	100.00	496.00	496	0.00	29,080	1	0.00	3
		Decoupling	100.00	496.00	496	0.00	29,080	1	0.01	3
	70	Allocation	98.59	496.00	489	1.41	37,420	2,097	30.36	3, 15
		Decoupling	100.00	496.00	496	0.00	44,138	3	0.03	1, 2, 3
	60	Allocation	98.99	496.00	491	1.01	44,210	285	6.14	3, 62, 71
		Decoupling	100.00	496.00	496	0.00	35,292	118	2.95	7, 62
	50	Allocation	100.00	496.00	496	0.00	41,506	142,384	1200.00	24, 42, 45
		Decoupling	100.00	496.00	496	0.00	41,060	35	0.91	5, 24, 85
	40	Allocation	98.59	496.00	489	1.41	49,635	14,397	83.93	49, 53, 88, 97
		Decoupling	98.99	496.00	491	1.01	49,593	153	3.77	6, 29, 32, 42
	30	Allocation	93.35	467.73	463	1.01	49,062	11,248	75.41	19, 53, 58, 76
		Decoupling	93.55	473.47	464	2.00	49,333	5,296	109.77	19, 58, 76, 83
	20	Allocation	67.34	340.80	334	1.99	48,963	1,208	15.38	6, 10, 42, 81
		Decoupling	67.34	340.82	334	2.00	48,963	3,469	72.92	6, 10, 42, 81
	10	Allocation	27.62	137.13	137	0.10	49,977	70,735	621.22	5, 6, 20, 38
		Decoupling	27.62	139.58	137	1.85	49,901	250	6.11	5, 6, 20, 64

을 만족하는, 즉 커팅 알고리즘이 실행되지 않은 하한이다. <Table 2>는 case 2-1에 대한 결과값으로, 노드 수별로 각 이완 기법에 대하여 V 변화에 따른 결과를 제시하였으며 그 순서는 <Table 1>과 같다. <Figure 3>과 <Figure 4>는 case 1-1과 2-1에 대한 결과를 각각 그래프로 나타낸 것이다.

나머지 실험에 대한 결과는 <Table 3>에서 <Table 6>에 제시하였으며, <Table 1>과 달리 설비로 결정된 노드의 번호 대신 결정된 노드의 개수를 제시하였다. 나머지 사항은 모두 동일하다.

할당기법과 분할기법을 서로 비교해 보면, 두 기법 모두 모

Table 2. Computational results for case 2-1

N	V	Relaxation	Coverage (%)	Upper Bound	Lower Bound	Gap (%)	Cost	Steps	Time (sec)	Facility numbers
70,000		Allocation	94.21	241.51	228	5.59	63,946	743,895	1200.00	6, 21, 25, 31, 39, 50
		Decoupling	97.52	242.00	236	2.48	63,804	327	1.27	2, 17, 21, 40, 44, 45
60,000		Allocation	95.45	239.27	231	3.45	53,826	90,822	167.00	2, 21, 32, 44, 50
		Decoupling	95.45	239.45	231	3.53	53,826	594	2.20	2, 21, 32, 44, 50
50,000		Allocation	90.50	227.42	219	3.70	44,443	262,437	647.80	2, 19, 20, 44
		Decoupling	90.50	228.05	219	3.97	44,443	5,853	20.51	2, 19, 20, 44
40,000		Allocation	79.75	206.23	193	6.42	35,400	500,000	967.66	2, 7, 34
		Decoupling	79.75	206.36	193	6.47	35,450	792,384	1200.00	6, 7, 34
30,000		Allocation	64.05	169.26	155	8.42	26,919	500,000	767.55	7, 34
		Decoupling	64.05	168.82	155	8.19	26,919	772,362	1200.00	7, 34
70,000		Allocation	99.46	368.00	366	0.54	66,050	29,247	126.03	2, 17, 21, 25, 44, 45
		Decoupling	99.46	368.00	366	0.54	66,286	965	10.30	2, 19, 23, 25, 44, 63
60,000		Allocation	97.01	364.03	357	1.93	56,250	19,571	56.52	2, 19, 20, 25, 44
		Decoupling	97.01	363.38	357	1.76	56,250	870	9.83	2, 19, 20, 25, 44
50,000		Allocation	91.30	346.35	336	2.99	47,122	39,250	95.94	6, 25, 34, 75
		Decoupling	91.58	347.40	337	2.99	46,828	3,069	32.86	2, 19, 34, 53
40,000		Allocation	83.97	318.44	309	2.96	38,163	33,060	150.36	2, 34, 75
		Decoupling	83.97	318.45	309	2.97	38,163	691	7.72	2, 34, 75
30,000		Allocation	40.76	154.56	150	2.95	24,828	33,033	129.91	38
		Decoupling	40.76	153.83	150	2.49	24,828	538	6.42	38
70,000		Allocation	100.00	496.00	496	0.00	67,651	79,222	370.03	21, 58, 61, 83, 88, 90
		Decoupling	98.19	496.00	487	1.81	67,926	163	4.50	19, 42, 44, 76, 83, 100
60,000		Allocation	98.39	489.53	488	0.31	58,546	27,469	192.45	21, 58, 76, 83, 90
		Decoupling	98.39	495.27	488	1.47	58,743	940	22.42	21, 58, 63, 83, 85
50,000		Allocation	93.55	467.73	463	1.01	49,062	11,248	75.41	19, 53, 58, 76
		Decoupling	93.55	473.47	464	2.00	49,333	5,296	116.19	19, 58, 76, 83
40,000		Allocation	64.72	324.05	321	0.94	34,668	16,663	118.05	34, 75
		Decoupling	62.70	317.15	311	1.94	39,903	1,068	26.48	29, 75
30,000		Allocation	35.69	177.00	177	0.00	29,879	1,537	25.82	20
		Decoupling	35.69	177.21	177	0.12	29,879	564	14.80	20

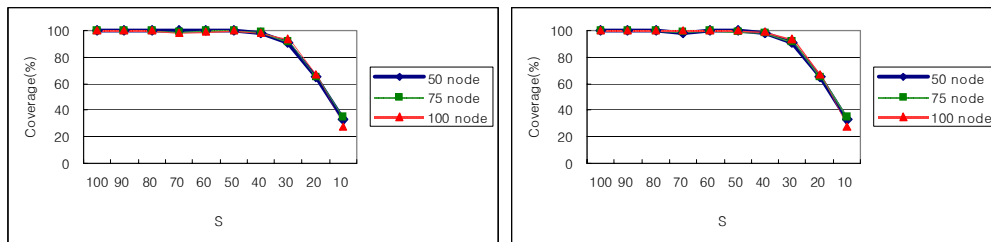


Figure 3. Coverage with case 1-1 with different S (left: allocation, right: decoupling).

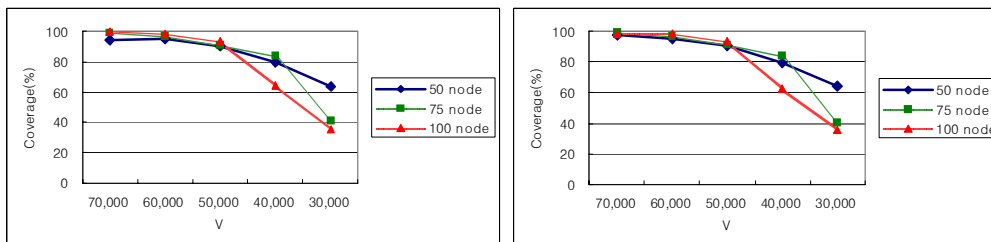


Figure 4. Coverage with case 2-1 with different V (left: allocation, right: decoupling).

든 실험에서 초기 스텝에서는 실행 가능해를 찾지 못해 커팅 알고리즘을 실행하였으나, 스텝이 진행되면서 실행 가능해가 발견되었고, 따라서 실행 불가능이라 판단된 실험은 없었다. 또한 두 기법 모두 대부분의 실험에서 종료 갭 조건을 만족하여 지정된 시간이 되기 전에 종료되었다. 해의 수준, 즉 커버리지는 동등한 수준을 달성하였으며, 입지로 선택된 노드 번호나 개수도 비슷하거나 동일하다는 것을 알 수 있다. 다만 할당 기법에 비해 분할기법이 훨씬 적은 스텝에서 종료가 되었으며 이에 따라 분할기법이 훨씬 더 적은 시간을 소요했다. 갭 종료조건을 만족시키지 못하여 종료시간까지 진행된 경우에는 분할기법의 진행 스텝이 더 적었으며, 이것으로 분할 기법의 스텝당 걸리는 계산시간이 이완기법에 비해 길다는 것을 알 수 있다. 이것은 분할기법에서의 라그랑지안 승수계산이 할당기법에 비해 좀더 복잡하기 때문이라 추정된다.

실험 1에서는 S가 작아짐에 따라 커버리지도 적어졌다. 또한 같은 S에서는 노드 수별로 비슷한 커버리지를 달성하였는데 이는 노드의 분포된 형태가 비슷하여 커버하는 수요와 커버하지 못하는 수요의 비율이 일정하게 유지되기 때문이다. 여기서 고객의 분포가 비슷하고, 밀도만 높아지는 경우 비용이 충분하다면 커버리지는 오직 S에만 의존한다는 사실을 알 수 있다. 또한 노드 수가 많을수록 커버리지가 커진 S의 경우는 각 노드 수별 종료 갭이 다르기 때문에 생긴 결과라 해석할 수 있다. 실험 1과 마찬가지로 실험 2에서도 V가 적어짐에 따라 커버리지가 줄어들었는데, 이것은 비용한계가 줄어들면서 설비의 수가 줄어들었기 때문이다. 반면, 그 정도는 노드 수별로 다르게 나타나 노드 수가 많을수록 V의 감소에 따른 커버리지의 감소가 커졌다. V가 적어지면 고정비를 줄이기 위해 오픈하는 노드 수를 줄여야 하는데, 오픈된 노드 수가 매우 적은 경우 오픈된 노드가 커버하는 수요에 비해 커버하지 못하는 수요가 훨씬 크기 때문에 노드 수가 많은 경우 커버리지의 감소가 커지는 것이다.

실험 1에서는 모든 경우에 S가 일정 수준 이상이 되면 모든 수요를 커버하는 100% 커버리지를 달성하였으며, 같은 100% 커버리지를 달성했다하더라도, S가 큰 경우에는 더 적은 비용으로 가능한 해를 찾아 낼 수 있었다.

실험 2에서도 역시 V가 일정 수준 이상이 되면 100% 커버리지에 도달했다. 이미 100% 커버리지에 도달했는데도 비용을 증가시키면 더 이상 커버리지는 증가하지 않고 총비용만 증가하였는데, 이 역시 마찬가지로 비용한계를 높게 준 경우로 적은 비용으로 같은 수준의 커버를 할 수 있는데도 불구하고 많은 비용이 소요되어 비용의 낭비를 가져온 것이다.

설비의 입지로 선택된 노드를 살펴보면 실험 1의 case 1-1에서는 세 가지 노드 경우 모두 S가 80 이상으로 충분히 큰 경우 3번 노드만 선택하여 100% 커버리지를 달성하였으나 S가 작아져서 여러 곳을 선택해야 할 경우엔 3번 노드 외에 다른 노드들의 조합이 선택되었다. 이는 S가 작아지면 한 곳이 아닌 여러 곳에 설비를 분산시켜야 더 많은 커버리지를 달성할 수

있음을 보여 준다. 반면 실험 2에서는 V가 적어짐에 따라 설비의 수도 감소하였으며 이것이 전체 커버리지의 감소로 이어졌다.

실험 1과 2 모두에서 대부분의 문제는 주어진 시간에 도달하기 전 갭 종료조건을 만족하여 종료되었다. 실험 1에서는 대부분이 100초 내외로 매우 빠른 시간 내에 최적해에 가까운 해를 제시해 주었으며, 실험 2에서도 대부분 50초를 넘기지 않았다.

실험 1에서는 일반적으로 S가 감소할수록 계산시간이 급격히 증가하였다. 이는 S와 총수요가 모두 적은 경우 최적해가 작은 값을 가지기 때문에 상한과 하한도 작은 값을 가지게 되고 이에 따라 상대적으로 커진 갭을 줄이기 위해 시도해 봐야 하는 결정변수조합의 수가 급격하게 증가하기 때문인 것으로 볼 수 있다. 반면 실험 2에서는 V의 변화에 따른 시간의 변화는 별로 없었으나 50노드의 경우가 다른 경우에 비해 훨씬 많은 시간을 소요했다. 이는 실험 1과 마찬가지로 50노드인 경우 총수요가 적어 최적해가 작은 값을 가지기 때문이다.

5. 결론 및 토의

본 논문은 서비스 수준의 최대화와 비용의 제약이라는 두 가지 상충되는 목적을 가진 문제를 어떻게 조절하여 설비의 입지를 결정할 것인가에 대한 매우 현실적인 문제를 수리적으로 모형화하고, 이의 효과적인 해결을 위하여 라그랑지안 기법과 커팅 알고리즘을 사용하는 발견적 기법을 제시하였다.

특히 본 연구에서 개발한 커팅 알고리즘은 비용제약이 있는 문제에 대한 해결책을 제시하여 주고 있다. 또한 실행 가능해를 찾기가 어려운 문제를 라그랑지안 기법으로 해결하고자 할 때 한시적으로 실행 불가능영역을 허용함으로써 스텝이 진행되면서 실행 가능해의 발견이 가능하다는 것을 실험을 통해 보여 주고 있다. 물론 커팅 알고리즘이 모든 문제에 대한 실행 가능해의 발견을 보장하지는 않지만, 라그랑지안 기법의 진행을 가능하게 함으로써, 존재할 수 있는 실행 가능해 탐색을 가능하게 한다는 점에서 큰 의미를 부여할 수 있다.

본 논문에서 제시한 발견적 기법은 실험한 문제의 대부분에 대해 최적해에 가까운 값을 빠른 시간 안에 찾아내었다. 또한 실험은 주어진 비용과 서비스 수준하에서 커버리지 거리를 얼마로 할 것인지에 대한 결정, 또는 주어진 커버리지 거리와 서비스 수준하에서 최적의 비용은 얼마가 될 것인지에 대한 계산이 가능함을 보여 준다.

커팅 알고리즘이 가지는 가장 큰 특징인 한시적 실행 불가능영역 허용 방법을 다른 라그랑지안 기법에 적용해 보는 것과, 본 논문의 수리적 모형에 몇 가지 현실적 제약조건을 추가한 확장된 수리모형의 제시 및 이의 해법에 대한 연구가 매우 유용할 것으로 보인다.

Table 3. Computational results for case 1-2

N	S	Relaxation	Coverage (%)	Upper Bound	Lower Bound	Gap (%)	Cost	Steps	Time (sec)	Number of Facilities
50	100	Allocation	100.00	242.00	242	0.00	34,359	635	2.43	15
		Decoupling	100.00	242.00	242	0.00	34,359	38	0.12	15
	90	Allocation	100.00	242.00	242	0.00	34,359	541	2.29	15
		Decoupling	100.00	242.00	242	0.00	34,359	62	0.37	15
	80	Allocation	98.35	247.63	238	3.89	34,129	325	1.38	16
		Decoupling	98.35	247.63	238	3.89	34,129	121	0.85	16
	70	Allocation	98.35	247.02	238	3.65	34,129	532	2.25	16
		Decoupling	97.52	245.81	236	3.99	34,532	419	1.77	17
	60	Allocation	95.04	237.63	230	3.21	34,766	654	2.75	18
		Decoupling	95.04	237.63	230	3.21	34,766	98	0.78	18
	50	Allocation	93.39	231.01	226	2.17	34,364	5,482	23.50	18
		Decoupling	93.39	231.01	226	2.17	34,364	453	4.08	18
	40	Allocation	85.12	208.25	206	1.08	36,421	54,390	230.31	18
		Decoupling	85.12	208.25	206	1.08	36,421	3,234	22.64	18
	30	Allocation	79.34	198.57	192	3.31	37,130	67,218	284.60	18
		Decoupling	82.64	207.38	200	3.56	38,712	4,721	42.49	18
	20	Allocation	64.88	163.51	157	3.98	38,235	34,854	147.51	18
		Decoupling	64.88	163.51	157	3.98	38,235	7,621	51.52	18
10	Allocation	54.55	139.67	132	5.49	36,498	325,461	1200.00	18	
	Decoupling	57.02	145.43	138	5.11	39,347	293,192	1200.00	18	
75	100	Allocation	94.02	356.66	346	2.99	39,876	5,878	37.17	17
		Decoupling	94.02	356.66	346	2.99	39,876	234	0.59	17
	90	Allocation	95.11	358.79	350	2.45	39,866	5,089	31.73	18
		Decoupling	95.11	358.79	350	2.45	39,234	264	0.74	18
	80	Allocation	94.02	356.66	346	2.99	39,746	4,057	29.47	18
		Decoupling	94.02	356.66	346	2.99	39,746	423	1.10	18
	70	Allocation	92.93	352.54	342	2.99	39,874	7,812	52.54	18
		Decoupling	92.93	352.54	342	2.99	39,874	621	1.49	18
	60	Allocation	92.93	349.26	342	2.08	39,874	9,781	76.11	21
		Decoupling	92.93	349.26	342	2.08	39,874	847	2.51	21
	50	Allocation	89.67	336.67	330	1.98	39,756	6,512	48.43	21
		Decoupling	89.67	336.67	330	1.98	39,756	1,092	2.68	21
	40	Allocation	89.13	334.08	328	1.82	38,728	42,123	102.71	21
		Decoupling	89.67	339.54	330	2.81	37,123	4,321	11.04	21
	30	Allocation	83.70	314.70	308	2.13	38,551	37,612	97.67	21
		Decoupling	83.70	314.70	308	2.13	38,551	2,531	6.44	21
	20	Allocation	77.17	296.95	284	4.36	39,882	432,133	1200.00	21
		Decoupling	78.26	300.38	288	4.12	37,821	213,543	1200.00	21
10	Allocation	57.61	220.58	212	3.89	39,985	451,568	1200.00	21	
	Decoupling	57.07	218.55	210	3.91	38,712	201,232	1200.00	21	
100	100	Allocation	100.00	496.00	496	0.00	44,338	1,116	24.55	19
		Decoupling	100.00	496.00	496	0.00	44,338	42	1.18	19
	90	Allocation	100.00	496.00	496	0.00	44,338	1,201	26.42	19
		Decoupling	100.00	496.00	496	0.00	44,338	73	1.95	19
	80	Allocation	100.00	496.00	496	0.00	44,338	1,027	22.59	19
		Decoupling	100.00	496.00	496	0.00	44,338	123	2.88	19
	70	Allocation	99.19	501.99	492	1.99	44,251	5,432	119.50	20
		Decoupling	99.19	501.99	492	1.99	44,251	244	5.72	20
	60	Allocation	98.39	497.91	488	1.99	44,359	3,435	75.57	23
		Decoupling	98.39	497.91	488	1.99	44,359	432	10.13	23
	50	Allocation	98.39	496.69	488	1.75	44,359	2,312	50.86	23
		Decoupling	98.39	496.69	488	1.75	44,359	753	17.56	23
	40	Allocation	93.75	474.39	465	1.98	44,333	3,445	75.79	23
		Decoupling	93.75	474.39	465	1.98	44,333	921	29.47	23
	30	Allocation	83.06	419.77	412	1.85	44,299	5,468	120.30	23
		Decoupling	83.47	422.19	414	1.94	43,216	2,012	44.26	23
	20	Allocation	69.35	350.02	344	1.72	44,464	21,321	469.06	23
		Decoupling	69.35	350.02	344	1.72	44,464	6,543	173.65	23
10	Allocation	62.90	318.27	312	1.97	44,891	43,256	951.63	23	
	Decoupling	63.31	318.01	314	1.94	42,139	10,132	246.71	23	

Table 4. Computational results for case 1-3

N	S	Relaxation	Coverage (%)	Upper Bound	Lower Bound	Gap (%)	Cost	Steps	Time (sec)	Number of Facilities
50	100	Allocation	100.00	242.00	242	0.00	3,482	2,013	8.52	21
		Decoupling	100.00	242.00	242	0.00	3,482	432	2.59	21
	90	Allocation	100.00	242.00	242	0.00	3,482	2,340	9.91	21
		Decoupling	100.00	242.00	242	0.00	3,482	543	3.26	21
	80	Allocation	100.00	242.00	242	0.00	3,482	4,322	18.30	21
		Decoupling	100.00	242.00	242	0.00	3,482	874	6.12	21
	70	Allocation	98.35	247.02	238	3.65	3,412	6,856	29.01	23
		Decoupling	98.35	247.89	238	3.99	3,412	1,023	7.16	23
	60	Allocation	90.91	227.81	220	3.43	3,454	10,345	43.51	23
		Decoupling	91.74	230.15	222	3.54	3,487	2,045	16.36	23
	50	Allocation	90.08	226.56	218	3.78	3,382	12,303	52.74	23
		Decoupling	90.08	227.06	218	3.99	3,463	2,121	19.09	23
	40	Allocation	87.60	216.61	212	2.13	3,348	21,035	89.07	22
		Decoupling	89.26	222.54	216	2.94	3,421	5,304	37.13	22
	30	Allocation	84.30	208.40	204	2.11	3,355	18,373	77.79	23
		Decoupling	84.30	206.25	204	1.09	3,355	4,612	41.51	23
	20	Allocation	77.27	194.75	187	3.98	3,443	57,464	243.19	23
		Decoupling	77.27	194.75	187	3.98	3,443	57,454	388.39	23
	10	Allocation	72.73	182.52	176	3.57	3,496	73,741	312.08	23
		Decoupling	73.55	184.57	178	3.56	3,470	43,212	292.11	23
75	100	Allocation	100.00	368.00	368	0.00	4,832	2,130	19.17	25
		Decoupling	100.00	368.00	368	0.00	4,832	432	5.62	25
	90	Allocation	100.00	368.00	368	0.00	4,832	2,384	21.46	25
		Decoupling	100.00	368.00	368	0.00	4,832	645	8.39	25
	80	Allocation	100.00	368.00	368	0.00	4,832	5,495	49.46	25
		Decoupling	100.00	368.00	368	0.00	4,832	412	5.36	25
	70	Allocation	100.00	368.00	368	0.00	4,832	4,023	36.21	25
		Decoupling	100.00	368.00	368	0.00	4,832	673	8.75	25
	60	Allocation	100.00	368.00	368	0.00	4,832	4,056	36.50	25
		Decoupling	100.00	368.00	368	0.00	4,832	837	10.88	25
	50	Allocation	98.91	371.35	364	1.98	4,927	8,576	77.18	24
		Decoupling	100.00	368.00	368	0.00	4,832	1,756	22.83	25
	40	Allocation	94.57	355.94	348	2.23	4,909	20,398	183.58	26
		Decoupling	94.57	358.32	348	2.88	4,909	3,621	47.07	26
	30	Allocation	91.30	344.83	336	2.56	4,823	38,748	348.73	27
		Decoupling	92.39	350.48	340	2.99	4,981	4,982	64.77	27
	20	Allocation	87.23	328.09	321	2.16	4,706	35,212	316.91	27
		Decoupling	87.23	325.76	321	1.46	4,706	3,029	39.38	27
	10	Allocation	83.97	318.13	309	2.87	4,922	40,348	363.13	27
		Decoupling	84.78	321.62	312	2.99	4,987	5,938	77.19	27
100	100	Allocation	100.00	496.00	496	0.00	7,428	2,384	52.45	31
		Decoupling	100.00	496.00	496	0.00	7,428	74	2.07	31
	90	Allocation	100.00	496.00	496	0.00	7,428	2,736	60.19	31
		Decoupling	100.00	496.00	496	0.00	7,428	87	2.32	31
	80	Allocation	100.00	496.00	496	0.00	7,428	2,513	55.29	31
		Decoupling	100.00	496.00	496	0.00	7,428	109	2.56	31
	70	Allocation	100.00	496.00	496	0.00	7,428	2,913	64.09	31
		Decoupling	100.00	496.00	496	0.00	7,428	182	4.27	31
	60	Allocation	100.00	496.00	496	0.00	7,428	3,716	81.75	31
		Decoupling	100.00	496.00	496	0.00	7,428	254	5.96	31
	50	Allocation	100.00	496.00	496	0.00	7,428	3,928	86.42	31
		Decoupling	100.00	496.00	496	0.00	7,428	281	6.55	31
	40	Allocation	100.00	496.00	496	0.00	7,428	5,834	128.35	31
		Decoupling	100.00	496.00	496	0.00	7,428	587	18.78	31
	30	Allocation	97.18	491.44	482	1.92	7,490	5,468	120.30	31
		Decoupling	97.18	491.49	482	1.93	7,490	2,012	44.26	31
	20	Allocation	95.56	483.13	474	1.89	7,321	21,321	469.06	31
		Decoupling	94.96	480.37	471	1.95	7,498	6,543	173.65	31
	10	Allocation	91.94	465.26	456	1.99	7,409	43,256	951.63	32
		Decoupling	91.94	318.01	456	1.99	7,409	10,132	246.71	32

Table 5. Computational results for case 2-2

N	V	Relaxation	Coverage (%)	Upper Bound	Lower Bound	Gap (%)	Cost	Steps	Time (sec)	Number of Facilities
	50,000	Allocation	100.00	242.00	242	0.00	64,213	124	0.53	23
		Decoupling	100.00	242.00	242	0.00	64,213	421	3.79	23
	47,500	Allocation	97.93	244.86	237	3.21	49,212	3,212	13.60	20
		Decoupling	97.93	246.67	237	3.92	49,212	1,321	11.89	20
50	45,000	Allocation	79.34	198.57	192	3.31	37,130	67,218	284.60	18
		Decoupling	82.64	207.38	200	3.56	38,712	4,721	42.49	18
	42,500	Allocation	71.07	178.26	172	3.51	41,322	93,483	395.81	15
		Decoupling	75.21	189.50	182	3.96	42,312	5,437	48.93	14
	40,000	Allocation	69.01	180.40	167	7.43	39,454	323,454	1200.00	13
		Decoupling	69.01	180.19	167	7.32	39,454	283,213	1200.00	13
	50,000	Allocation	99.46	373.39	366	1.98	49,543	43,283	104.74	30
		Decoupling	99.46	373.39	366	1.98	49,543	956	2.43	30
	45,000	Allocation	97.01	364.03	357	1.93	44,273	19,571	47.36	25
		Decoupling	97.01	363.40	357	1.76	44,273	870	2.21	25
75	40,000	Allocation	83.70	314.70	308	2.13	38,551	37,612	91.02	21
		Decoupling	83.70	314.70	308	2.13	38,551	2,531	6.44	21
	35,000	Allocation	82.61	313.37	304	2.99	33,234	39,343	95.21	16
		Decoupling	82.61	313.24	304	2.95	33,234	2,394	6.09	16
	30,000	Allocation	70.65	267.88	260	2.94	29,382	43,934	106.32	12
		Decoupling	70.65	267.96	260	2.97	29,382	2,321	5.90	12
	55,000	Allocation	100.00	496.00	496	0.00	54,921	123,943	2726.75	32
		Decoupling	100.00	496.00	496	0.00	54,921	163	3.59	32
	50,000	Allocation	95.97	485.62	476	1.98	48,213	27,469	604.32	28
		Decoupling	95.97	483.99	476	1.65	48,213	940	20.68	28
100	45,000	Allocation	83.06	419.77	412	1.85	44,299	5,468	120.30	23
		Decoupling	83.47	422.19	414	1.94	43,216	2,012	44.26	23
	40,000	Allocation	73.59	370.71	365	1.54	39,213	16,663	366.59	18
		Decoupling	74.19	372.58	368	1.23	39,372	1,068	23.50	18
	35,000	Allocation	37.90	190.98	188	1.56	29,879	1,537	33.81	13
		Decoupling	40.32	204.00	200	1.96	29,123	564	12.41	13

Table 6. Computational results for case 2-3

N	V	Relaxation	Coverage (%)	Upper Bound	Lower Bound	Gap (%)	Cost	Steps	Time (sec)	Number of Facilities
	4,500	Allocation	100.00	250.18	242	3.27	4,423	37,238	157.67	29
		Decoupling	100.00	251.43	242	3.75	4,423	4,845	43.61	29
	4,000	Allocation	98.35	247.89	238	3.99	3,921	34,875	147.66	26
		Decoupling	98.35	247.89	238	3.99	3,921	5,768	51.91	26
50	3,500	Allocation	84.30	208.40	204	2.11	3,355	18,373	77.79	23
		Decoupling	84.30	206.25	204	1.09	3,355	4,612	41.51	23
	3,000	Allocation	72.73	182.29	176	3.45	2,938	483,456	1200.00	18
		Decoupling	72.73	181.26	176	2.90	2,938	48,656	437.90	18
	2,500	Allocation	57.02	152.03	138	9.23	2,423	484,586	1200.00	13
		Decoupling	57.85	153.36	140	8.71	2,477	239,848	1200.00	13
	5,500	Allocation	99.46	368.00	366	1.98	5,412	59,458	535.12	32
		Decoupling	99.46	368.00	366	2.99	5,412	4,738	61.59	32
	5,000	Allocation	97.01	364.03	357	2.76	4,823	48,486	436.37	28
		Decoupling	97.01	363.38	357	2.65	4,823	5,898	76.67	28
75	4,500	Allocation	91.30	344.83	336	2.56	4,823	38,748	348.73	27
		Decoupling	92.39	350.48	340	2.99	4,981	4,982	64.77	27
	4,000	Allocation	78.26	296.51	288	2.87	3,894	39,506	355.55	21
		Decoupling	78.26	296.24	288	2.78	3,894	7,867	102.27	21
	3,500	Allocation	33.70	127.82	124	2.99	3,754	59,459	535.13	16
		Decoupling	34.24	129.88	126	2.99	3,921	4,596	59.75	16
	8,500	Allocation	100.00	496.00	496	0.00	8,468	39,545	869.99	38
		Decoupling	100.00	496.00	496	0.00	8,468	3,954	86.99	38
	8,000	Allocation	98.79	499.95	490	1.99	7,998	7,856	172.83	35
		Decoupling	98.79	499.34	490	1.87	7,998	2,304	50.69	35
100	7,500	Allocation	97.18	491.44	482	1.92	7,490	5,468	120.30	31
		Decoupling	97.18	491.49	482	1.93	7,490	2,012	44.26	31
	7,000	Allocation	61.29	309.51	304	1.78	6,821	7,457	164.05	26
		Decoupling	62.90	318.17	312	1.94	6,832	3,958	87.08	26
	6,500	Allocation	29.23	147.81	145	1.90	6,421	10,239	225.26	20
		Decoupling	29.23	147.94	145	1.99	6,421	6,967	153.27	20

참고문헌

- Carmeni, P.M., Fratta, L., Maffioli, F. (1975), On improving relaxation method by modified gradient techniques, *Mathematical Programming Study* **3**, 26-34.
- Church, R.L., ReVelle, C.S. (1974), The Maximal covering location problem, *Papers of the Regional Science Association* **32**, 101-118.
- Crowder, H. (1976), *Computational Improvements for Subgradient Optimization*, Symposia Mathematica, Academic Press, New York.
- Daskin, M. (1995), *Network and Discrete Location Models, Algorithms and Applications*, Wiley, New York.
- Galvao, R., ReVelle, C. (2000), A comparison of lagrangean and surrogate relaxation for the maximal covering location problem, *European Journal of Operational Research* **124**, 377-389.
- Goicoechea, A., Hansen, D., Duckstein, L. (1982), *Multiobjective decision analysis with engineering and business applications*, Wiley, New York.
- Held, M., Wolfe, P. and Crowder, H. (1974), Validation of subgradient optimization, *Mathematical Programming* **6**, 6288.
- Nozick, L.K. (2001), The fixed charge facility location problem with coverage restrictions, *Transportation Research Part E* **37**, 281-296.
- Nozick, L.K., Turnquist, M.A. (1998), Integrating inventory impacts into a fixed charge model for locating distribution centers, *Transportation Research Part E* **31E** (3), 173-186.
- Mirchandani, P.B., Francis, R.L. (1990), *Discrete Location Theory*, Wiley, New York.
- Mirzain, A. (1985), Lagrangian relaxation for the star-star concentrator location problem: approximation algorithm and bounds, *Networks* **15**, 1-20.
- Parker, R.G., Radin, R.L. (1988), *Discrete Optimization*, Academic Press, New York.
- ReVell, C., Church, R., Schilling, D. (1976), Application of the location set covering problem, *Geographical Analysis* **8**, 65-76.
- Shilling, D.A., ReVell, C., Cohon, J., Elzinga, D.J. (1980), Some models for fire protection locational decisions, *European Journal of Operational Research* **5**, 1-7.