자본자산가격의 운동법칙을 표상하는 연속시간 확률미분방정식의 추정방법

- 비시뮬레이션 방법 -

이 일 균*

요 약

연속시간모형은 시간의 흐름에 대응되는 자본자산의 운동의 성질과 시간의 흐름에 따라 형성되는 자본자산의 가격을 동시적으로 파악할 수 있는 것이 큰 장점이다. 연속시간 확률미분방정식을 구성하는 표류함수와 확산함수가 폐형해나 해석적 형태로 존재하지 않는 경우가 대부분이다. 여기에서 모수추정의 어려움이 발생한다.

전이 확률밀도함수의 인지 또는 발견의 어려움과 표류함수와 확산함수의 적분불가능성은 최대가능도법의 사용을 어렵게 만든다. 여기에서 모수방법 보다는 비모수방법을 통하여 연속 확률 미분방정식을 추정하려는 성향이 존재한다. 밀도를 모르면 표본적률을 사용하여 모수를 추정할 수 있으므로 일반화 적률법이 연속시간 확률미분방정식의 모수 추정과 검정에 사용되고 있다. 전이밀도의 값을 시뮬레이션을 통하여 얻는 마코브연쇄 몬테카를로 방법, 전이밀도를 무한소 생성작용소를 통하여 얻는 방법, 비 모수방법, 여러 종류의 전개에 의하여 얻은 표류함수와 확산함수의 전이밀도에 대한 최대가능도법 등 여러 종류의 연속시간 확률미분방정식의 실증분석에서 사용되고 있다. 이 논문에서는 연속시간 확률미분방정식의 실증분석 방법들을 정리하는데 목적이 있다. 이일균(2004)은 이 논문과의 자매논문으로 시뮬레이션에 의한 확률미분방정식의 추정을 다루고 있어 시뮬레이션방법은 그 논문에 미룬다.

---

* 명지대학교 교수

Ⅰ. 서 론

자본자산의 가격은 이산시간(discrete time)의 틀 속에서 모형화되기도 하고 연속시간의 측면에서 정형화되기도 한다. 이 두 방법은 각기 고유한 성질과 특성을 가지고 있어 자본자산의 가격의 운동법칙을 규명하는데 자기 나름대로 공헌을 하고 있다. 이산시간 모형은 정태분석의 집중적 대상이 되고 있으므로 모형이 제시하는 결과를 분명하고 명백하게 이해할 수 있는 장점이 있다. 그러나 두 시점 사이에 진행되고 있는 사항들이나 과정적 현상에 대한 정보를 제공하고 있지 않다. 때문에 연속적인 거래가 이루어지고 있는 시장의 행동을 시간의 흐름과 동시적으로 파악할 수 없는 것이 단점이다. 이산시간모형은 이와 같은 단점이 있음에도 불구하고 두 시점에서 형성되는 행동과 그 행동의 차이를 두드러지게 보여준다는 의미에서 큰 장점을 가지고 있다. 이산시간의 틀 속에서는 자본자산의 행동과 운동법칙을 모형화하기가 용이하다.

반면 연속시간모형은 이산시간의 비교정태에서 무시되고 있는 시간의 흐름이 모형에 직접 도입됨으로써 시간의 흐름에 걸쳐 일어나는 행동을 간극없이 보여주고 있다는 의미에서 시간의 흐름에 대응되는 자본자산의 운동의 성질과 시간의 흐름에 따라 형성되는 자본자산의 가격을 동시적으로 파악할 수 있는 것이 큰 장점이다. 이와 같은 장점에도 불구하고 연속시간의 측면에서 모형을 정립하는 경우 수학적 통제나 조작 및 조정이 용이하지 않은 경우가 많다. 수학적 진행을 얻을 수 있는 경우에도 정리된 수식이 복잡하고 혼란스럽게 보이는 것도 있어 해석이 용이하지 않은 때도 있는 것이 단점이라 할 수 있다. 이산시간 접근법에서 이루어지는 정확한 해 또는 "깨끗한" 해, 해석적 해나 폐형해를 연속시간의 틀 속에서는 얻기가 어려운 경우가 많다.

그러나 연속시간 속에서도 정확한 해가 구하여지지 않는다 해도 근사치로서의 해석적 해와 폐형해를 얻을 수 있는 것이 대부분이다. 특히 마팅게일에 의한 접근법을 사용하면 이산시간 모형이 제시하지 못하는 자본자산의 행동을 파악 할 수 있으며 이를 통하여 새로운 자본자산의 운동법칙을 규명해주고 있다. 이 두 접근법이 밝혀주고 있는 자본자산의 행동이 동일한 경우가 많아 신뢰도

를 높혀 주고 있는 사실도 흔하다. 따라서 이 두 관점에서의 연구가 필요하다.

이산시간 모형들은 실증분석이 용이하다. 때문에 엄청나게 많은 실증분석이 축적되어 있다. 그러나 연속시간 모형은 실증분석이 용이하지 않다. 연속시간 모형은 연속시간으로 관찰된 데이터가 실증분석에서 요청된다. 그러나 자본자산 시계열의 관찰치들 중에서는 연속시간의 정의에 알맞게 관찰된 시계열 데이터는 희귀하다. 연속시간적으로 관찰되지 않은 시계열을 사용하면 "잃고만" 데이터, 즉 결절 데이터 또는 결절변수 문제가 발행한다. 이 기간 동안의 전이 확률밀도함수를 알아야 잃은 데이터를 복원할 수 있다. 잃은 데이터가 발생하기 직전에 관찰된 값을 조건부로 한 조건부 확률밀도함수가 전이확률밀도함수이다. 따라서 전이밀도가 밝혀지면 이 밀도를 이용하여 잃은 데이터의 복원이 가능하다. 여기에서 전이밀도의 탐색이 요청되고 있다. 전이밀도함수의 탐구가 벽에 부딪히면 이에 대한 해결책으로 마코브 연쇄 몬테카를로(Markov Chain Monte Carlo ; MCMC)방법으로 전이밀도 대신 시뮬레이션에 의하여 값을 생성시키고 이 값을 잃은 데이터의 "찾어낸" 데이터로 사용하고 있다. 그런데 MCMC 역시 쉬운 방법은 아니다.

연속시간 모형의 실증 검증에서 매우 흔하게 부닥치는 난관은 적분의 문제이다. 이산시간 모형에서는 적분 대신 합산이 사용된다. 모형의 형태로부터 파생되는 합산 불가능성이 야기되면 해석적 방법(analytical method)에 의하여 합산 가능형태로 변환시킨 후에야 관찰된 시계열에 대하여 합산이 가능하다. 그리고 이 같은 방법은 대부분의 경우 어렵지 않다. 그러나 적분은 단순한 해석적 방법으로는 가능하지 않은 경우가 비일비재하다. 연속시간 모형의 실증분석을 수행하기 위해서는 적분방법부터 모색해야 한다. 물론 몬테카를로 적분(Monte Carlo integration)이 존재하고 있는 것은 사실이나 이 방법을 통하여서도 적분을 쉽게 얻을 수 없는 경우가 허다하다. 왜냐하면 연속시간 확률미분방정식(stochastic differential equation)의 경우 이 방정식을 구성하는 표류함수(drift function)와 확산함수(diffusion function)가 이 모수들의 함수인데 이 함수가 해석적 형태로 존재하지 않는 경우가 대부분이다. 이 때에는 표류 항과 확산 항의 폐형이 존재하지 않는다. 연속시간 확률미분방정식은 Euler 형태의 이산시간 확률 차분방정식으로 변환시켜 실증분석을 행할 수도 있다. 그러나 미분방

정식은 연속시간 형이고 차분방정식은 이산시간 형이므로 이 두 방정식은 동일한 것이 아니다.

조건부 확률밀도함수, 즉 전이 확률밀도함수의 인지 또는 발견의 어려움과 표류함수와 확산함수의 적분 불가능성은 최대가능도법의 사용을 어렵게 만든다. 여기에서 모수방법 보다는 비 모수방법을 통하여 연속 확률 미분방정식을 추정하려는 성향이 존재한다. 최대가능도법은 밀도함수가 존재할 때 데이터의 밀도함수의 가능도를 최대화하는 모수의 추정량을 도출케 하는 방법이다. 밀도를 모르면 표본적률을 사용하여 모수를 추정할 수 있는데, 적절한 조건 하에서는 이 방법에 의하여 올바른 모수의 추정이 가능하다. 적률에 의한 추정방법을 일반화시킨 것이 일반화 적률법(generalized method of moment; GMM)이므로 GMM이 연속시간 확률미분방정식의 모수 추정과 검정에 사용되는 근거가 존재한다. 한편에서는 전이밀도의 값을 시뮬레이션을 통하여 얻는 MCMC, 다른 편에서는 전이밀도를 무한소 생성작용소(infinitesimal generator)를 통하여 얻어 모수 값을 발견하는 추정량(estimator)을 얻는 방법, 또 다른 편에서는 GMM을 비롯한 비 모수방법, 또 다른 편에서는 표류함수와 확산함수의 전이밀도를 Taylor전개나 Hermite전개를 통하여 얻고 이를 사용하여 가능도 함수를 도출하여 추정하는 최대가능도법이 연속시간 확률미분방정식의 실증분석에서 사용되고 있다.

이 논문에서는 연속시간 확률미분방정식의 실증분석 방법들을 정리하는데 목적이 있다. 확률미분방정식에 대한 실증분석의 역사가 길지 않고 실증분석을 수행한 연구가 그리 많지 않은 것은 사실이지만, 지금이 이에 대한 연구가 본격화되는 시점이 되고 있다는 감이 든다. 이에 따라 이 논문에서는 실증분석이 제시하고 있는 실증의 결과에는 관심을 할애하고 실증분석의 방법들에 주안점을 두어 살펴보고 검토하고자 한다. 현재까지 이루어진 실증분석 방법들은 모두 한계가 있으며 분석방법에 중점을 두어 분석해 나가면 그 과정에서 한계와 단점이 스스로 드러나게 되므로 구태여 한계를 장황히 설명하고 비판을 나열하는 방식은 할애하고자 한다. 그러나 현재에 제시된 공개된 질문이나 공개된 미해결점을 밝혀 앞으로의 연구의 주제를 제공하고자 한다. 이 논문은 이 분야에 관심을 갖는 연구자가 앞으로 연구를 진행시키는데 길잡이의 역할이 되도록 하

고자 한다. 이 논문에서는 비시뮬레이션 방법에 의한 확률미분방정식의 추정에 한정한다. 이일균(2004)은 이 논문과의 자매논문으로 시뮬레이션에 의한 확률미분방정식의 추정을 다루고 있어 시뮬레이션방법은 그 논문을 참조하기 바란다.

Ⅱ. 비모수 방법

1. 고차적률과 직교성

Chan, Karolyi, Longstaff와 Sanders(CKLS, 1992)는 이자율의 운동법칙을 표상하는 확률미분방정식의 일반적 형태를 다음과 같이 정립하였다.

$$dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma r^{\gamma} dW_t \tag{2-1}$$

위 식에서 단기이자율의 변화의 조건부 평균과 분산은 r의 수준에 의존한다. CKLS는 표류함수와 확산함수의 형태와 γ의 값에 따라 자본자산의 가격결정에 사용되고 있는 확률미분방정식은 서로 다르다. <표 1>과 같이 정리하였다. CKLS는 Euler의 이산화 방법을 이용하여 다음과 같은 이산시간 계량경제학적 추정 모형을 정립하였다.

$$r_{t_1} - r_t = \alpha + \beta r_t + \varepsilon_{t-1} \tag{2-2}$$

$$E[\varepsilon_{t+1}] = 0, \quad E[\varepsilon_{t+1}^2] = \sigma^2 r_t^{2\gamma} \tag{2-3}$$

이산시간모형은 이자율의 변화의 분산이 연속시간모형과 일치하는 이자율의 수준에 직접 의존하도록 한 것이 장점이다. 그러나 이산시간모형은 연속시간모형의 근사화에 불과하다는 점을 간과해서는 안 된다. 그들은 일반화 적률법 또는 일반화 적률 법(generalized method of moment ; GMM)을 사용하여 모수를 추정하였다[2]. GMM은 모형의 분포에 대한 가정을 요구함이 없이 정상성과 어

2) 추정론에서 적률법은 모집단의 적률과 표본의 적률을 일치시켜 모수를 추정하고 검정하는 방법이다. 양자가 일치하므로 양자의 차이는 0이다. 따라서 직교성이 성립한다. 직교성 조건, 즉 적률방정식으로 통상 최소자승법(OLS)를 표현하면

고딕성(ergodicity)만 형성되면 사용할 수 있는 장점을 가진 추정방법이다. 그리고 GMM은 ε_{t+1}이 조건부 이분산적인 경우에서도 일치 추정량을 얻을 수 있다.

이 모형에서 모수는 $(\alpha, \beta, \sigma^2, \gamma)$인데 이를 θ라 하자. $f_t(\theta)$를 다음과 같이 정의하면 오차적률을 사용한 GMM의 직교성 조건이 충족된다.

$$f_t(\theta) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ \varepsilon_{t+1} r_t \\ \varepsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 r_t^{2\gamma} \\ (\varepsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 r_t^{2\gamma}) r_t \end{bmatrix}$$

$E[x_n(y_n - x_n'\beta)] = 0$이 된다. GMM은 $x_n(y_n - x_n'\beta)$를 비선형 함수 $g(y_n, x_n, \theta)$로 대체하여 모수를 추정하는 방법이다. 즉 적률조건은 $E[g(y_n, x_n, \theta) = 0$인 것이다. 직교성 조건을 얻기 위하여 보통 도구변수 (instrument variable)들을 사용한다.

GMM추정은 벡터값의 실증적률함수 $g_n(\theta)$의 수열이 존재하며 이 수열은 $g_n(\theta) \xrightarrow{p} 0$ 해야 한다. $g_n(\theta)$이 주어지면 대칭양정치행렬 C_n을 선택하여 $\theta_{GMM} = \arg\min g_n(\theta)' C_n g_n(\theta)$의 해를 구하면 θ가 추정된다. g_n은 일반적으로 $(1/n)\Sigma g(\theta)$이다. 따라서 $\hat{\theta} = \arg\min[(1/n)\Sigma g(\theta)]' C_n [(1/n)\Sigma g(\theta)]$이라 하자. 그러면 극소화의 제 1차 조건으로 $G(\theta)' C_n g_n(\theta) = 0$을 얻는다. 위에서 $G(\theta) = \partial g_n(\theta)/\partial\theta'$이다. 그리고 일반적으로 $G(\theta) = (1/n)\Sigma\partial g_n/\partial\theta'$이다. θ는 다음에 의하여 추정된다.

$$\hat{\theta}_{n+1} = \hat{\theta}_n - [-G'(\theta)' C_n G(\theta)]^{-1}[-G(\theta)' C_n g_n(\theta)] /_{\theta = \hat{\theta}_n}$$

위에서 $C_n = S^{-1}$이다. S는 유효추정량으로 $S = E[g_n(\theta) g_n(\theta)']$이다. 따라서 S의 추정값 $\hat{S}$는 $\hat{S} = (1/n)\Sigma g_n(\theta) g_n(\theta)'$이다.

비선형은 다음 식에 의하여 모수를 추정한다.

$$\hat{\theta}_{(n+1)} = \hat{\theta}_{(n)} - p_n \frac{\partial L}{\partial\theta}\Big|_{\theta = \hat{\theta}_{(n)}}$$

$$p_n' = \begin{cases} E\left[\dfrac{\partial^2 L}{\partial\theta\partial\theta'}\right] & \text{Newton-Raphson} \\ -\Sigma\left(\dfrac{\partial L}{\partial\theta}\right)\left(\dfrac{\partial L}{\partial\theta}\right)' & \text{BHHH} \end{cases}$$

위에서 아주 적은 양수 $\varepsilon > 0$에 대하여 $|\hat{\theta}_{(n+1)} - \hat{\theta}_n| < \varepsilon$이 될 때까지 반복 계산하면 $\hat{\theta}$를 얻는다.

GMM에서는 직교성 조건에 의하여 $E[f_t(\theta)]=0$이 요구되는데, 이 때 $E[f_t(\theta)]$ 대신 대응되는 표본의 함수 $g_T(\theta)$를 사용한다. 관찰시계열의 크기를 T라 하면 $g_T(\theta)$는 다음과 같다.

$$g_T=(1/T)\sum_{t=1}^{T} f_t(\theta)$$

위 식은 $J_T(\theta) = g_T'(\theta)W_T(\theta)g_T(\theta)$를 최소화하는 θ를 구하면 θ가 추정된다. 직교성 조건에 의하여 $D'(\theta)W_Tg_T(\theta) = 0$이 형성된다. 이 때 $D(\theta)$는 θ에 대한 $g_T(\theta)$의 야코비행렬이다.

2. 무한소 생성작용소와 테일러급수전개

Stanton(1997)은 표류함수와 확산함수에 대한 모수적 가정을 부가하지 않고 비 모수적으로 참 표류함수와 확산함수에 근사적으로 접근하는 방법을 택하고 있다. 그는 모수적 가정이 야기시키는 계량경제학적 문제점, 예컨대 시계열이 정규분포를 완벽히 따르고 있지 않은 경우 발생하는 문제점 보다는 비 모수적 방법에서 야기되는 문제점이 오히려 적을 수 있고, 비 모수적 방법에서는 이산시간으로 관찰된 시계열을 사용하기가 편하다는 주장을 하고 있다.

그는 시간 t의 값 x로부터 그 이후의 시간 s의 값 y로 이동하는 전이확률밀도함수, 즉 (x, t)를 조건부로 하는 (y, s)의 조건부 확률밀도함수가 모수 μ와 σ의 함수가 주어지면 Kolmogorov 전진방정식(forward equation)과 후진방정식(backward equation)을 만족한다는 점에 주목하고 있으나 편미분을 정확히 알 수 있는 경우에는 위의 두 식의 해를 용이하게 구할 수 있다. 그러나 확률미분방정식에서는 표류함수와 확산함수의 폐형이 존재하는 경우가 많지 않기 때문에 이론의 아름다움에도 불구하고 Kolmogorov 방정식에 의하여 해를 구하지 못한다. 이 문제를 해결하는 방법 중의 하나가 무한소 생성작용소(infinitesimal generator)이다. 무한소이기 때문에 근사 값으로 사용해도 무리가 없게 된다.

상태변수 X_t의 무한소 생성작용소는 그 정의가 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
f(x,t) &= \lim_{\tau \downarrow t} \frac{E[f(x_\tau, \tau \mid X_t = x) - f(x,t)]}{\tau - t} \\
&= \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\mu(x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\sigma^2(x)
\end{aligned}
$$

확률 과정이 확률미분방정식 $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$를 만족한다고 하자. 조건부 기댓값 $E_t[f(X_{t+\triangle}, t)]$는 Taylor급수 전개에 의하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$
\begin{aligned}
E_t[f(X_{t+\triangle}, t+\triangle)] &= f(X_t,t) + \mathcal{L}f(X_t,t)\triangle + \frac{1}{2}\mathcal{L}^2 f(x,t)\triangle^2 + \cdots \\
&+ \frac{1}{n!}\mathcal{L}^n(X_t, t)\triangle^n + O(\triangle^{n+1})
\end{aligned} \tag{2-4}
$$

그런데 식(2-4)는 다음의 형태로 쓸 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}f(X_t, t) &= \frac{1}{\triangle}E_t[f(X_{t+\triangle}, t+\triangle) - f(X_t,t)] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^2 f(X_t,t)\triangle \\
&- \frac{1}{6}\mathcal{L}^3 f(X_t, t)\triangle^2 - \cdots
\end{aligned} \tag{2-5}
$$

제 1차 근사치만을 구하면 다음과 같다.

$$
\mathcal{L}f(X_t,t) = \frac{1}{\triangle}E[f(X_{t+\triangle}, t+\triangle) - f(X_t,t)] + O(\triangle) \tag{2-6}
$$

2차 항을 고려하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}f(X_t,t) &= \frac{1}{2\triangle}E_t[f(X_{t+2\triangle}, t+2\triangle) - f(X_t,t)]\ldots \\
&- \frac{1}{2}\mathcal{L}^2 f(X_t, t)(2\triangle) - \frac{1}{\delta}\mathcal{L}^3 f(X_t, t)(2\triangle)^2 -
\end{aligned} \tag{2-7}
$$

식 (2-5)에 2를 곱하고 식 (2-7)을 빼면 다음의 2차 근사값을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}f(X_t,t) &= \frac{1}{2\triangle}[\triangle E_t f(X_{t+\triangle}, t+\triangle) - f(X_t,t)] \\
&- E_t[f(X_{t+2\triangle}, t+2\triangle) - f(X_t, t)] + O(\triangle^2)
\end{aligned} \tag{2-8}
$$

동일한 방법에 의하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\mathcal{L}f(X_t,t) = \frac{1}{6\triangle}\{18E_t[f(X_{t+\triangle},t+\triangle)-f(X_t,t)] \\ -9E_t[f(X_{t+2\triangle},t+2\triangle)-f(X_t,t)] \\ +2E_t[f(X_{t+3\triangle},t+3\triangle)-f(X_t,t)]+O(\triangle^2) \tag{2-9}$$

그런데 표류함수를 구하기 위하여 $f_{(1)}(x,t)=x$라 하자. $\mathcal{L}$의 정의에 의하여 $\mathcal{L}f_1(x,t)=\mu(x)$이다. 따라서 식 (2-6), 식 (2-8)과 식 (2-9)를 대입하면 다음을 얻는다.

$$\mu(X_t)=\frac{1}{\triangle}E_t[X_{t+\triangle}-X_t]+O(\triangle) \tag{2-10}$$

$$\mu(X_t)=\frac{1}{2\triangle}\{4E_t[X_{t+\triangle}-X_t]-E[X_{t+2\triangle}-X_t]\}+O(\triangle^2) \tag{2-11}$$

$$\mu(X_t) = \frac{1}{6\triangle}\{18E_t[X_{t+\triangle}-X_t]-9E_t[X_{t+2\triangle}-X_t] \\ +2E_t[X_{t+2\triangle}-X_t]\}+O(\triangle^2) \tag{2-12}$$

확산함수를 구하기 위하여 $f_{(2)}(x,t)=(x-X_t)^2$이라 하자. 그러면 $\mathcal{L}$의 정의로부터 다음을 얻는다.

$$\mathcal{L}f_{(2)}(x,\ t)=2(x-X_t)\mu(x)+\sigma^2(x)$$

그리고 다음이 형성된다.

$$\mathcal{L}f_{(3)}(X_t,\ t)=\sigma^2(X_t)$$

식 (2-6), (2-8)과 (2-9)를 대입하면 σ 근사치로서의 σ^2을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\sigma^2(X_t)=\frac{1}{\triangle}E_t[(X_{t+\triangle}-X_t)^2]+O(\triangle) \tag{2-13}$$

$$\sigma^2(X_t)=\frac{1}{2\triangle}\{4E_t[X_{t+\triangle}-X_t)^2]-E_t[(X_{t+2\triangle}-X_t)^2\}+O(\triangle^3) \tag{2-14}$$

$$\sigma^2(X_t) = \frac{1}{6\triangle}\{18E_t[(X_{t+\triangle}-X_t)^2]-9E_t[(X_{t+2\triangle}-X_t)^2] \\ +2E_t[(X_{t+2\triangle}-X_t)^2]+O(\triangle^3) \tag{2-15}$$

위에서 본 바와 같이 무한소 생성작용소를 사용하여 모수 μ와 σ의 함수형을

고차로 전개할 수 있으며 고차로 갈수록 근사값이 참값에 더욱 접근해 간다. 그런데 식 (2-10)와 식 (2-8)은 무한소 생성작용소를 1차에 한하여 적용한 것이다. 이것이 CKLS등이 적용한 이산시간 모형이다.

확률 미분 방정식의 모수를 추정하기 위하여 Stanton은 핵밀도(kernel density)를 사용하고 있으며 핵밀도는 다음과 같다.

$$f(z) = \frac{1}{Th^m} \sum_{t=1}^{T} K\left(\frac{z - z_t}{h}\right)$$

위에서 K(0)는 핵함수이고 h는 창폭(window width)이다. 창폭은 매끄러움모수(smoothing parameter)이다. 핵밀도는 데이터 점(data point)이 추정점에서 멀어질수록 밀도에 공헌이 약하고 데이터 점들이 집중된 곳에서는 공헌도가 높으며 관찰치들이 조밀하지 않고 흩어져있으면 추정된 밀도가 가장 낮다. 창폭 h는 $\hat{h}_t = \hat{\sigma}_t T^{-1/(n+1)}$이 많이 사용되고 있다. 핵밀도로서는 표준 가우스 밀도와 Epanechnikov(1969)함수가 많이 사용되고 있다[3]. 식 (2-10)의 μ의 제 1차 근사치에서 나타나는 조건부 기대값은 핵함수에 의하여 추정할 수 있으며 다음과 같다.

$$E[r_{\tau+\Delta} - r_{\tau\Delta} \mid r_\tau = r] = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} (r_{t\Delta} - r_t) K[(r - r_t)/h]}{\sum_{t=1}^{T-1} K[(r - r_t)/h]}$$

위에서 핵함수는 $K(z) = e^{-z^2/2}/\sqrt{2\pi}$으로 가우스 밀도이다. 그 이외의 핵함수를 사용할 수도 있다. 확산함수도 이와 유사하다.

Ⅲ. 최대가능도법

1. 이산화 : 일치추정량과 비일치추정량

Lo (1998)는 최대가능도법은 사용하여 이산시간으로 관찰된 데이터에 대하여

3) Epanechnikov 핵함수는 $K(t) = (3/4)(1 - t^2)$이다. 이 핵함수를 재축적 하면 임의의 $a > 0$에 대하여 $K(u) = (3/4a)(1 - u^2/a^2)$을 얻는다.

다음의 $\text{It}\widehat{o}$ 형 확률미분방정식의 추정량을 도출하였다.

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(X, \tau; \alpha) d\tau + \int_{t_0}^{t} b(X, \tau; \beta) dW(\tau) + \int_{t_0}^{t} c(X, \tau; \gamma)\, dN_\lambda(\tau) \tag{3-1}$$

식 (3-1)은 다음과 같은 확률미분방정식 또는 확률과정으로 쓸 수 있다.

$$dX(t) = a(X, t; \alpha)dt + b(X, t; \beta)dW(t) + c(X, t; \gamma)dN_\lambda(\tau) \qquad (3\text{-}1)'$$

위에서 W(t)는 표준브라운 운동 또는 Wiener 과정으로 $N_\lambda(t)$는 Poisson 과정이다. 함수 a, b 와 c는 알려진 함수이며 모수 $\overline{\theta} = [\alpha' \ \beta' \ \gamma']'$은 알려지지 않은 모수이다. 관찰시간 t_k에 데이터 X_k가 관찰된다고 하자. 즉 $X_k = X(t_k)$이다. $\rho(X; \theta)$를 확률밀도함수라 하면 조건부 밀도는 다음과 같다.

$$\rho(X) = \rho_0(X_0)\Pi_{k=1}^{n}\rho_k(X_{k,} t_K \mid X_{kK-1,} t_{k-1})$$

전이밀도는 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho_k] = -\frac{\partial}{\partial X}[\alpha\rho_k] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}[\beta\rho_K] - \lambda\rho_k + \lambda\widetilde{\rho_k} \mid \frac{\partial}{\partial X}[\ \tilde{c}^{-1}] \mid \tag{3-2}$$

$$\text{s.t} \qquad \rho_K(X, X_{t-1}) = \delta(X - X_{t-1})$$

위에서 $\delta(X - X_{t-1})$은 중심이 X_{t-1}에 있는 Dirac-delta 일반화함수이다. 그리고 $\rho_k(X, X_{t-1}) = \delta(X - X_{t-1})$은 초기조건이다. c=0인 순수확률과정이고 a와 b가 다음 축소조건(reducibility)를 만족하면 X_t의 변환과정을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{1}{b^2}\frac{\partial b}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{a}{h}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 b}{\partial X^2}\right] = 0$$

$F[X(t)] = Z(t)$라 정의하면 $\text{It}\widehat{o}$ 보조정리에 의하여 $dZ = p(t; \theta)dt + q(t, \theta)dW$를 얻는다. 이때 전이밀도 함수는 다음과 같다.

$$\rho_k(Z, t) = \left[2\pi\int_{t_{k-1}}^{t} q^2 d\tau\right]^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{\left(Z - Z_{k-1}\int_{t_{K-1}}^{t} p d\tau\right)^2}{2\int_{t_{k-1}}^{t} q^2 d\tau}\right]$$

확률미분방정식이 대수정규확산과정, 즉 기하브라운 운동인 경우 확률미분방정식 $dX = \alpha X dt + \beta X dW$는 축소조건을 만족한다. $Y = F(X) = \log X$로 놓으면 $It\hat{o}$ 보조정리에 의하여 $dY = [\alpha - \beta^2/2]dt + \beta dW$이다. 확률미분방정식 $dX = \alpha X dt + \beta X dW + \gamma X dN_\lambda$, $\gamma > 0$을 만족하는 X(t)과정의 가능도함수를 구해보자. 대수변환 $Y = \log X$ 을 사용할 때 $It\hat{o}$ 보조정리에 의하여 $dY = (\alpha - \beta^2/2)dt + \beta dW + \log(1+\gamma) dN_\lambda$를 얻는다. dW와 dN_λ가 독립적이라고 가정하면 다음을 얻는다.

$$\rho_Y(Y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^k}{k!} [2\pi\beta^2\tau]^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{-[Y_t - Y_{t-\tau} - k\log(1+\gamma) - \mu\tau]^2}{2\beta^2\tau}\right]$$

위에서 $\mu\tau = (\alpha - \beta^2/2)\tau$이며 분산이 $\beta^2\tau$인 가우스 분포와 강도가 λ인 Poisson 밀도에 의하여 위 식을 얻는다.

최대가능도 추정량은 $\hat{\theta}_{ML} = \arg\max G(\theta; X)$이며 $G(\theta, X)$ 다음과 같다.

$$G(\theta; X) = \log \rho_0(\alpha_a, t_0) + \sum_{k=1}^{n} \log(X_k, t_k \mid X_{k-1}, t_{k-1}; \theta)$$

식(4-2)의 해를 구하기가 어려운 경우에는 다음의 차분방정식에 의하여 전이밀도를 구한다.

$$X_{k+1} = X_k + a(X_k, t_k; \alpha)h + b(X_k, t_k; \beta) \cdot \Delta W(t_{k+1}) + c(X_k, t_k; \gamma) \cdot \Delta N_\lambda(t_{k+1})$$

위에서 $\Delta W(t_{k+1}) = W(t_{k+1}) - W(t_k)$이고 $\Delta N_\lambda(t_{k+1}) - N_\lambda(t_k)$이고 $t_k = kh$이다. 즉, $h = T/n$이다.

기하브라운 운동 $dX(t) = \alpha X(t)dt + \beta X(t)dW(t)$에 있어서 이산화는 다음과 같다.[4)]

---

4) Euler 이산화 접근법은 연속시간 확률미분방정식을 이산시간 속에서 반복적인 방정식에 의하여 대체해나가는 방법이다. 아래의 연속시간 확률미분방정식을 보자.

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \qquad dX_0 = x \tag{1}$$

작은 시간간격을 Δ라 하자. 과정 ($dX_t^{(\Delta)}, t \in R_+$)가 $dX_t^{(\Delta)} = X^{\Delta}_{[t/\Delta]}$의 관계가 형성된다고 하자. [X]는 X보다 적거나 동일한 가장 큰 정수이다. 다음 식을 보자.

$$X_{k+1} = \alpha X_k h + \beta X_k \Delta W_{k+1} \; ; \; \sigma = \alpha X_k h + X_k \epsilon_{k+1}$$

위에서 ϵ_{k+1}은 iid $N(0, \beta^2 h)$이다. 이산화최대가능도 추정량은 다음과 같다.

$$\hat{\alpha} = T^{-1} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{X_k}{X_{k-1}} - 1 \right] \; ; \; \hat{\beta}^2 = T^{-1} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{X_k}{X_{k-1}} - 1 - \hat{\alpha} h \right]^2$$

그런데 $\mathrm{plim}_{n-\infty} \hat{\alpha} = h^{-1}[e^{\alpha h} - 1] \neq \alpha$: $\mathrm{plim}_{n \to \infty} \hat{\beta}^2 = h^{-1}[e^{\beta^2 h} - 1] \neq \beta^2$이므로 일치추정량을 얻지 못한다.

2. 최대가능도 추정량

확률밀도함수의 모수의 추정은 최대가능도 추정법이 근간이며 핵심이다. 이 방법이 복잡하므로 동일한 성과를 내면서도 간편한 방법이 모색되어 왔으며 그 중 하나가 최소자승법이다. 확률밀도함수의 형태가 정확하지 않을 때 의사최대가능도법(quasi-maximum likelihood)에 의하거나 밀도가 잘 파악되지 않을 때 비모수 방법을 비롯하여 적률법을 일반화시킨 일반화적률법, 시뮬레이션을 통한 시뮬레이션적률법(method of simulated moments; MSM)이나 유효 적률법(efficient method of moments ; EMM), 그리고 Monte Carlo 시뮬레이션을 통하여 Markov연쇄를 얻고 이를 통하여 모수를 추론하는 Markov연쇄 Monte Carlo(MCM) 방법, 간접추론(indirect inference)방법이 많이 사용되고 있다. 확률미분방정식의 추론에는 최대가능도법 이외에도 위에서 열거한 방법이 흔히 사용되고 있다. 그것은 확률미분방정식 가운데 극히 일부를 제외하면 확률미분

$$\begin{aligned} dX_n^{(\Delta)} - X_{n-1}^{\Delta} &= \mu(X_{n-1}^{\Delta})\Delta + \sigma(X_{n-1}^{\Delta})\Delta^{1/2}\epsilon_n^{\Delta} \\ dX_0^{(\Delta)} &= X_0 \end{aligned} \qquad (2)$$

위에서 ϵ_n^{Δ}는 n이 변하며 가우스 백색잡음과정이다. 위의 이산시간 식(2)가 연속시간 식(1)의 Euler이산식이다. 시간 n-1로부터 시간 n으로의 전이에는 시간 Δ가 소요된다. dX_t는 대응되는 증분 δX_n으로 변환되고 연속시건 dt는 아산시간 Δ로 대치된다. dW_t는 분포가 $N(0,\Delta)$로 정규화된다. 이때에는 $\Delta^{1/2}$로 나눈다. 이 이산시간은 중요한 성질을 가지고 있다. 즉, X_0이 주어질 때 $X_t^{(\Delta)}$의 조건부 분포는Δ가 0으로 접근해감에 따라 X_0을 조건부로 하는 X_t의 조건부분포에 접근해 간다.

방정식을 구성하는 표류함수와 확산함수의 폐형이나 해석적 형태가 알려져 있지 않기 때문이다. 여기에서는 Pedersen(1995)이 정립한 최대가능도법을 먼저 보고자 한다. 이 논문에는 확률미분방정식의 모수추정과 점검에 관한 중요한 사실이 내포되어 있어 자세히 다루고자 한다.

확률미분방정식이 다음과 같다고 하자.

$$dX_t = b(t, X_t; \theta) + \sigma(t, X_t; \theta)dW_t, \quad X_0 = x_0, \quad t \geqq 0$$

위에서 W는 r 차원 브라운운동, $\theta \in \Theta \leqq R^p$ 는 미지이다.

$(b, \cdot, \cdot, ; \theta) : [0, \infty] \times R^d \rightarrow R^d$이고 $\sigma(\cdot, \cdot; \theta): [0, \infty] \times R^d \rightarrow M^{d \times r}$이 다. $M^{d \times r}$는 $d \times r$행렬의 집합을 의미한다. X는 상태변수이다. 시간 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$에서 관찰된 이산시간 시계열을 사용하여 모수 θ를 추정하고자 한다.

조건부밀도함수, 즉 전이밀도함수(transition density function)을 알고 있으면 대수가능도함수는 θ에 대하여 다음과 같다.

$$\ell_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log(p(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}, t_i, X_{t_i}; \theta))$$

위 식에 대한 최대가능도 추정량 $\hat{\theta}_n$은 불편성, 유효성(efficiency), 일치성(consistency)과 같은 통계적 성질이 잘 갖추어져 있다. 그런데 전이밀도가 알려져 있지 않을 때에는 θ에 대한 최대가능도 함수의 근사치를 구하여 사용하는데 이 경우 $\sigma(t, x; \theta) = \sigma(t, x)$를 알고 있어야 한다. 기간간격 $[0, t_n]$에서 X의 연속시간 관찰에 근거해야 하며 이에 근거한 θ의 대수가능도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} I_{t_n}^c = & \int_0^{t_n} b(s, X_s; \theta)' [(\sigma(s, X_s)\sigma(s, X_s)')]^{-1} dX_s \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{t_n} b(s, X_s; \theta)' [\sigma(s, X_s)\sigma(s, X_s)']^{-1} b(s, X_s; \theta) ds \end{aligned}$$

위 식은 이산시간관찰치를 기준으로 할 때 다음 식을 통하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{I}_n(\theta) = & \sum_{i=1}^{n} b(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}; \theta)' [\sigma(t_{i_1}, X_{t_{i-1}})\sigma(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})']^{-1} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} b(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})' [\sigma(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})\sigma(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})']^{-1} b(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}; \theta)(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

모수 θ가 $\theta=(\theta_1, \theta_2)$로 분할되고 $b(\cdot, \cdot, ; \theta)$가 θ_1에만 의존하고 $\sigma(\cdot, \cdot; \theta) = \theta_2\tilde{\sigma}(\cdot, \cdot; \theta)$일 때에도 위 식을 사용할 수 있다.

예를 들어보자. Ornstein-Uhlenbeck과정은 다음과 같다.

$$dX_t = \phi X_t dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x_0, \ t \geqq 0$$

위에서 $(\phi, \sigma) \in (-\infty, 0) \times (0, \infty)$이다. $i = 1, 2, \cdots$에 대하여 $t_i = i\triangle$라고 정의하자. 그러면 최대가능도 추정량(maximum likelihood estimator)은 다음과 같다.

$$\hat{\phi}_n = \frac{1}{\triangle} \log \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_{(i-1)\triangle} X_{i\triangle}}{\sum_{i=1}^{n} X^2_{(i-1)\triangle}} \right)$$

$$\hat{\sigma}_n = \frac{-2\hat{\phi}_n}{n(1-\exp(2\triangle\hat{\phi}_n))} \sum_{i=1}^{n} (X_{i\triangle} - X_{(i-1)\triangle} \exp(\triangle\hat{\phi}_n))^2$$

위 두 식은 일치추정량이다. 그러나 $\tilde{I}_n(\phi)$에 의한 추정량은 다음에서 보는 바와 같이 일치추정량이 아니다.

$$\tilde{\phi}_n = \frac{1}{\triangle} \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_{(i-1)\triangle} X_{i\triangle}}{\sum_{i=1}^{n} X^2_{(i-1)\triangle}} \right] \rightarrow \frac{\exp(\triangle\phi_0) - 1}{\triangle} > \phi_0 \tag{3-3}$$

$$\tilde{\sigma}^2_n = \frac{1}{n\triangle} \sum_{i=1}^{n} (X_{i\triangle} - X_{(i-1)\triangle})^2 \rightarrow \sigma_0^2 \frac{1-\exp(\triangle\phi_0)}{-\triangle\phi} < \sigma_0^2 \tag{3-4}$$

위에서 좌변의 → 는 $n \rightarrow \infty$함에 따라 얻는 값이다. 이와 같이 일치추정량을 얻지 못하는 경우에는 전이밀도의 수열을 얻고 각 전이밀도에 의한 추정량의 수열을 얻으면 이 수열의 수렴에 의하여 일치추정량을 얻을 수 있다. 왜냐하면 전이밀도가 Markov성질을 가지고 있기 때문이다. N번째 얻는 근사적 대수가능도함수를 다음과 같이 정의하자.

$$\ell_n^{(N)}(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log(p^{(N)}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}, t_i, X_{t_i}; \theta))$$

수열 $(I_n^{(N)}(\theta))_{N=1}^{\infty}$ 를 도출할 수 있다. $k=1, 2, \cdots, N$과 $0 \leqq s \leqq t$에 대하여 다음과 같이 정의하자.

$$\tau_k = s + k\frac{t-s}{N}$$

$$Y_s^{(N)} = x$$

$$Y_{\tau_k}^{(N)} = Y_{\tau_{k-1}}^{(N)} + \frac{t-s}{n} b(\tau_{k-1}, Y_{\tau_{k-1}}^{(N)}; \theta) + a(\tau_{k-1}, Y_{\tau_{k-1}}^{(N)}; \theta)^{1/2}(W_{\tau_k}^{\theta,s}, W_{\tau_{k-1}}^{\theta,s})$$

위에서 $W^{\theta,s}$는 시간 s후의 표준브라운운동이다. 이 때 적절한 가정 하에서 $Y_{\tau_N^{(N)}} = Y_t^{(N)} \to X_t$한다. $0 \leqq s < t$를 고정시키고 $x \in R^d$ 이면 $N=1$에 대하여 다음이 성립한다.

$$p^{(1)}(s,x,t,y;\theta) = (2\pi(t-s))^{d/2}|a \mid s,x;\theta|^{-1/2}$$
$$\times \exp\left(-\frac{1}{2(t-s)}[y-x-(t-s)b(s,x;\theta)]'a(s,x;\theta)^{-1}(y-x-(t-s)b(s,x;\theta)\right)$$

위에서 $|a(s,x;\theta)|$는 $a(s,x;\theta)$의 행렬식이다. $N>2$에 대하여는 다음이 성립한다.

$$p^{(N)}(s,x,t,y;\theta) = \int_{R^{d(n-1)}} \prod_{k=1}^{N} p^{(1)}(\tau_{k-1}, \xi_{k-1}, \tau_k, \xi_k; \theta)d\xi_1, \cdots, d\xi_{N-1} \qquad (3\text{-}5)$$

$$= E[P^{(1)}(\tau_{N_1}, Y_{\tau_{N-1}}^{(N)}, t, y; \theta)] \qquad (3\text{-}6)$$

위에서 $\xi_0 = x$이고 $\xi_N = y$이다. 위 식은 Markov연쇄 $\{Y_{\tau_k}^{(N)}\}_{k=0}^{N}$과 Chapman-Kolmogorov 방정식에 의하여 얻는다. 위 식에 의하여 $\ell_n^{(1)}(\theta)$을 얻는데 다음과 같다.

$$\ell_n^{(1)}(\theta) = -\frac{nd}{2}\log(2\pi) - \frac{d}{2}\sum_{i=1}^{n}\log(t_i - t_{i-1}) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(|a(tt_{i-1}, X_{t_{i-1}};\theta)|)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})'a(t_{i-1}, X_{t_{i-1}};\theta)'(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^{-1}(t_i - t_{i-1})^{-1}$$
$$+\sum_{i=1}^{n} n(t_{i-1}, X_{t_{i-1}};\theta)'a(t_{i-1}, X_{t_{i-1}};\theta)^{-1}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b(t_{i-1}, X_{t_{i-1}};\theta)'a(t_{i-1}, X_{t_{i-1}};\theta)^{-1}b(t_{i-1}, X_{t_{i-1}};\theta)(t_i - t_{i-1})$$

Ornstein-Uhlenbeck 과정에 있어서 $\ell_n^{(1)}(\theta)$추정량은 $\phi_n^{(1)} = \tilde{\phi}_n$이다. $\tilde{\phi}_n$는 식

(4-3)이다. $\hat{\sigma}^2$ 다음과 같다.

$$\hat{\sigma}_n^{2(1)} = \frac{1}{n\triangle} \sum_{i=1}^{n} \left(X_{i\triangle} - X_{(i-1)\triangle} - \triangle \ \hat{\phi}_n^{(1)} X_{(i-1)\triangle}\right)^2$$

위 식은 확률에서 $n \to \infty$함에 따라 $[\sigma_0^2 \xi(1-\exp(\triangle\phi_0))^{2]}/[r-2\triangle\phi_0]$로 수렴한다. 위에서 얻은 $p^{(N)}(s,\ X_s,\ t,\ X_t;\theta)$는 $N \to \infty$에서 $p^{(N)}(s, X_s, t, X_t; \theta) \to p(s, X_s, t, X_t; \theta)$를 얻는다. $p^{(N)}(s,x,t,y;\theta)$ 는 식(3-5)의 적분보다는 식(3-6)의 기댓값에 의하여 얻는 것이 편하다. 왜냐하면 강 대수의 법칙을 사용할 수 있기 때문이다. $\{U_k^m\}_{k=1,\ m=1}^{N-1\ \ M}$을 r 차원 표준정규분포에서 얻은 표본이라 하자. 그러면 다음을 얻는다.

$$Y_0^m = x,\ m = 1, \cdots, M$$

$$Y_k^m = Y_{k-1}^m + \frac{t-s}{N} b(\tau_{k-1}, Y_{k-1}^m;\theta) + \sqrt{\frac{t-s}{N}}\, \sigma(\tau_{k-1}, Y_{k-1}^m;\theta) u_k^m,$$
$$k=1, \cdots, N-1,$$
$$m=1, \cdots, M$$

위 식은 $Y_{\tau_{N-1}}^{(N)}$의 iid 표본으로 분포가 동일하다. M을 충분히 크게 잡으면 잡을수록 보다 정확한 $p^{(N)}$을 얻을 수 있다. 예를 들어 Ornstein-Uhlenbeck 과정을 적용해 보면 다음을 얻는다.

$$p^{(N)}(t,x,y;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_N^2}} \exp\left(-\frac{(y-\beta_N x)^2}{2\tau_N^2}\right)$$
$$p(t,x,y;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{(y-\beta x)^2}{2\tau^2}\right)$$

위에서

$$\beta_N = \left(1+\frac{\triangle\phi}{N}\right)^N \to \beta = \exp(\triangle\phi)$$
$$\tau_N^2 = \sigma^2\frac{\triangle}{N}\,\frac{1-\beta_N^3}{1-\beta_N^{2/N}} \to \tau^2 = \sigma^2\frac{1-\exp(2\triangle\phi)}{-2\phi}$$

모수 θ의 $\ell_n^{(N)}(\theta)$추정량은 다음과 같다.

$$\hat{\phi}_n = \frac{1}{\triangle}\log(\psi_n)$$

$$\hat{\sigma}^2_n = \frac{-2\hat{\phi}_n}{n(1-\exp(2\triangle\hat{\phi}_n))}\sum_{i=1}^{n}[X_{i\triangle} - X_{(i-1)\triangle}\exp(\triangle\hat{\phi}_n)]^2$$

$$\hat{\phi}_n^{(N)} = \frac{N}{\triangle}(\psi_N^{1/N} - 1)$$

$$\hat{\sigma}_n^{2(N)} = \frac{N}{\triangle}\hat{\tau}_n^2\frac{1-\psi_n^{2/N}}{1-\psi_n^2}$$

위에서

$$\hat{\tau}_n^2 = \frac{1}{n}\sum X^2_{(i-1)\triangle} - \frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i\triangle} - X_{(i-1)\triangle}\right)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^2_{(i-1)\triangle}}$$

$$\psi_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{i\triangle}X_{(i-1)\triangle}}{\sum_{i=1}^{n} X^2_{(i-1)\triangle}} \rightarrow \exp(\triangle\phi_0)$$

그리고 다음이 형성된다.

$$\hat{\theta}_0^{(N)} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_n^{(N)} \\ \hat{\sigma}_n^{2(N)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \hat{\phi}_n \\ \hat{\sigma}_n^2 \end{pmatrix} = \hat{\theta}_n$$

따라서

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \rightarrow N_2(\theta_1\ i(\theta_0, \triangle)^{-1})$$

위에서

$$i(\theta_0, \triangle)^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = \frac{1-\exp(2\phi_0\triangle)}{\triangle^2\exp(2\phi_0\triangle)},\quad c_{12} = \frac{2\sigma_0^2}{\triangle} + \frac{2\sigma_0^2}{\phi_0\triangle}\ \frac{1-\exp(2\phi_0\triangle)}{\exp(2\phi_0\triangle)}$$

$$c_{12} = \frac{2\sigma_0^2}{\triangle} + \frac{2\sigma_0^2}{\phi_0\triangle}\ \frac{1-\exp(2\phi_0\triangle)}{\exp(2\phi_0\triangle)}$$

$$c_{22} = \frac{\sigma_0^4}{\phi_0^2\triangle^2}\ \frac{1-\exp(2\phi_0\triangle)}{\exp(2\phi_0\triangle)} + \frac{4\sigma_0^4}{\phi_0\triangle}\ \frac{2\sigma_0^4(1+\exp(2\phi_0\triangle)}{1-\exp(2\phi_0\triangle)}$$

위의 $i(\theta_{1,}\triangle)^{-1}$는 Fisher 정보행렬의 역행렬이다.

3. 전이확률밀도함수

연속시간 확률미분방정식이 $dX_t = \mu(X_t;\theta) + \sigma(X_t;\theta)dW_t$로 표현된다고 하자. 상태변수 (X_t)에 대하여 $X_t = X_0$주어질 때 이 값을 조건부로 하는 $X_{t+\Delta}$의 조건부 확률밀도함수를 $P_x(\Delta,\, x \mid x_0;\, \theta)$라 하자. $\Delta > 0$ 가 고정되어 있을 때 시간 $\{t = i\Delta \mid i = 0, \cdots, n\}$에서 데이터가 관찰되면 베이즈 법칙과 확률미분방정식의 Markov 성질에 의하여 대수 가능도 함수는 다음의 단순한 형태가 된다.

$$\ln(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log\{P_x(\Delta, X_{i\Delta} \mid X_{(i-1)\Delta};\, \theta\}$$

위에서 log는 자연대수이며 자연대수를 앞으로 log로 쓴다. Ait-Sahalia(1999, 2002)는 이 전이밀도의 근사값의 수열을 Hermite전개를 통하여 얻고 이를 통하여 대수가능도 함수의 ln 의 근사값의 수열을 도출하였다. 그리고 이 근사값의 수열의 극한을 통하여 참 대수 가능도 함수에 수렴함을 증명하였다.

확산(diffusion) X 의 정의역을 D_x 라 하면 이 정의역도 자본자산의 가격의 경우 $D_x(-\infty, +\infty)$나 $D_x = (0, +\infty)$가 된다. 지수효용과 정규분포가 형성되는 영역에서는 $D_x = (-\infty, +\infty)$이고 승멱효용(power utility)과 대수정규분포에 의하여 자본자산의 가격이 생성될 때에는 $D_x = (0, +\infty)$이다. 전이밀도 P_x에 대한 근사값들의 수열을 얻기 위해서는 X의 확산함수를 정규화 하는 것이 편리하다. X를 정규화하면 Y를 얻게 되는데 이 변환은 다음과 같다.

$$Y = \gamma(x\,;\,\theta) = \int^{x} \frac{du}{\sigma(u;\theta)} \tag{3-7}$$

식 (3-7)의 Y의 확률 미분 방정식은 확산함수가 정규화되어 그 계수가 1이다. Itô보조정리를 사용하면 다음을 얻는다.

$$dY_t = \mu_Y(Y_t;\theta) + dW_t \tag{3-8}$$

위에서 $\mu_Y(Y_t;\theta)$은 다음과 같다.

$$\mu_Y(Y_t\,;\,\theta)\frac{\mu(\gamma^{-1}(y : \theta);\, \theta)}{\sigma(\gamma^{-1}(y\,;\,\theta);\, \theta)} - \frac{1}{2}\frac{\delta\sigma}{\delta x}(\gamma^{-1}(y\,;\,\theta);\, \theta) \tag{3-9}$$

식 (3-8)에서 볼 수 있는 바와 같이 dY_t의 확산함수의 계수는 1이다. 따라서 변환을 통하여 정규화가 이루어 졌음을 알 수 있다. Y의 정의역인 D_Y역시 $D_Y=(-\infty,+\infty)$와 $D_Y=(0,+\infty)$이다. 이 변환을 통하여 이루어지는 전이함수 $P_Y(\triangle, y \mid y_0; \theta)$는 0 보다 크며 상한을 갖는다. 따라서 밀도 P_Y의 꼬리는 가우스와 같은 상한을 가진다. Hermite 전개를 사용할 때 Hermite 급수가 수렴할 수 있는 결과를 얻은 것이 이 변환을 통하여 얻은 장점인 것이다. Y는 환산함수의 계수가 1이므로, 즉 $\sigma_Y=1$이므로 X보다 정규확률변수에 접근해 있다. 그러나 △가 적을 때 밀도 P_Y은 조건부 값 y_0 주위에서 첨도가 높아지므로 P_Y를 전개하기가 어렵다. 여기에서 Y를 Hermite급수의 전개에 알맞은 변수 Z로 변환해야 한다. 이 변환은 다음에 의하여 이루어 질 수 있다.

$$Z=\triangle^{-1/2}(Y-y_0) \tag{3-10}$$

식 (4-10)의 Z는 △가 고정되어 있으면 표준정규분포에 충분히 근접한다. 그러므로 밀도 P_z를 N(0. 1)주위에서 전개하여 수렴하는 시계열을 창출할 수 있다. $Y_{t+\triangle} \mid Y_t$의 조건부밀도를 $P_Y(\triangle, y \mid y_0; \theta)$라 하면 Z의 밀도함수는 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$P_z(\triangle, z \mid y_0; \theta) = \triangle^{1/2}P_Y(\triangle, \triangle^{1/2}z + y_0 \mid y_0; \theta) \tag{3-11}$$

밀도 P_Y는 밀도 P_z의 역함수로 구할 수 있으므로 다음을 얻는다.

$$P_Y(\triangle, y \mid y_0; \theta) = \triangle^{-1/2}P_z(\triangle, \triangle^{-1/2}(y-y_0) \mid y_0; \theta) \tag{3-12}$$

따라서 밀도 P_x는 다음과 같다.

$$P_x(\triangle, x \mid x_0; \theta) = \sigma(x; \theta)^{-1}P_Y(\triangle, \gamma(x; \theta) \mid \gamma(x_0; \theta); \theta) \tag{3-13}$$

변수 Z_t의 조건부 밀도에 Hermite 급수 전개를 수행할 수 있다. Hermite다항식은 다음과 같다[5].

5) Hermite 다항식은 다음의 성질을 만족한다.

$$H_j(z) = e^{z^2/2} \frac{d^j}{dz^j}(e^{-z^2/2}), \quad j \geq 0 \tag{3-14}$$

표준정규밀도함수 $\phi(z)$는 $\phi(z) = e^{-z^2/2}/\sqrt{2\pi}$이며 다음과 같이 정의하자.

$$P_z^{(J)}(\triangle, z \mid y_0; \theta) = \phi(z) \sum_{j=0}^{J} \eta_z^{(j)}(\triangle, y_0; \theta) H_j(z) \tag{3-15}$$

식 (3-15)는 밀도함수 $z \to P_z(\triangle,\ z \mid y_0;\ \theta)$의 Hermite전개이다. J의 값에 따라 $P_z^{(J)}$가 결정된다. J가 정수이므로 J의 값이 0, 1, 2, …로 증가함에 따라 $P_z^{(J)}$의 수열을 얻는다. 그리고 η_z는 다음에 의하여 구한다.

$$\eta_z^{(j)}(\triangle, y_0; t) = (1/j!) \int_{-\infty}^{\infty} H_j(z) P_z(\triangle, z \mid y_0; t) dz \tag{3-16}$$

밀도 P_y의 근사값들의 수열은 다음과 같다.

$$P_y^{(J)}(\triangle, y \mid y_0; \theta) = \triangle^{-1/2} P_z(\triangle, \triangle^{-1/2}(y - y_0)(y_0; \theta) \tag{3-17}$$

따라서 P_x의 수열 $P_x^{(J)}$은 다음과 같다.

$$P_x^{(J)}(\triangle, x \mid x_0; t) = \sigma(x; \theta)^{-1} P_y^{(J)}(\triangle, \gamma \mid x; t)(\gamma(x_0; \theta); \theta) \tag{3-18}$$

밀도 P_x의 수열 $P_x^{(J)}(\triangle, x \mid x_0; t)$는 $J \to \infty$함에 따라 $P_x(\triangle, x \mid x_0; \theta)$로 수렴한다.

그런데 식 (3-16)은 다음과 같이 정리될 수 있다.

(i) $(k+1) H_k(w) = (d/dw) H_{k+1}(w),\ \forall\ w \in R,\ k \geq 0,\ k \in z$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} H_i(w) H_k(w) \phi(w) dw = \begin{cases} i!, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$

(iii) 모든 $z \in R$ 와 모든 정수 k에 대하여 다음이 성립하는 $\overline{w}$가 존재한다.

$$|H_k(z)| \leq \frac{\overline{w}\sqrt{k!}}{\sqrt[4]{k}} \left(1 + \frac{z^{5/2}}{2^{5/4}}\right) e^{z^2/4}$$

따라서 Hermite 다항식을 계산해 보면,

$H_0(w) = 1,\ H_1(w) = -w,\ H_2(w) = w^2 - 1,\ H_3(w) = -w^3 + 3w,$

$H_4(w) = w^4 - 6w^2 + 3,\ H_5(w) = w^5 + 10w^3 - 15w,$

$H_6(w) = w^2 - 15w^4 + 45w^2 - 5$이다.

$$
\begin{aligned}
\eta_z^{(j)}(\triangle, y_0;\theta) &= (1/j!)\int_{-\infty}^{\infty} H_j(z)P_z(\triangle, z;\mid y_0;t)dz \\
&= (1/j!)\int_{-\infty}^{\infty} H_j(z)\triangle^{1/2}P_Y(\triangle, \triangle^{1/2}z+y_0\mid y_0;t)dz \\
&= (1/j!)\int_{-\infty}^{\infty} H_j(\triangle^{-1/2}(y-y_0))P_Y(\triangle, y\mid y_0;\theta)dy \\
&= (1/j!)E[H_j(\triangle^{-1/2}(Y_{t+\triangle}-y_0))\mid Y_t=y_0;\theta]
\end{aligned} \tag{3-19}
$$

확률변수 Y에 대한 무한소 생성작용소를 $\mathcal{A}(\theta)$라 하자. 다항식 $f(y, y_0)$에 대하여 $\mathcal{A}(\theta):f\to\mu_y(\cdot\ ;\theta)\ \delta f/\delta y+(1/2)\delta^2 f/\delta y^2$이라 하면 함수 $S\to E[f(Y_{t+s}, y_0\mid Y_t=y_o]$에 Taylor 정리를 적용하면 다음을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
E[f(Y_t+\triangle, y_0\mid Y_t=y_0] = &\sum_{k=0}^{K}\mathcal{A}^k(\theta)\cdot f(y_0, y_0)\frac{\triangle^k}{K!} \\
&\times E[\mathcal{A}^{k+1}(\theta)\cdot f(Y_{t+\delta}, y_0)\mid Y_t=y_0]\frac{\triangle^{k+1}}{(k+1)!}
\end{aligned} \tag{3-20}
$$

위 식은 수렴한다. 위 식을 이용하여 $\eta_t^{(k)}(\triangle, y_0;\theta)$를 계산할 수 있다. 물론 식 (3-19)에 Monte Carlo 적분을 적용하여 직접 구할 수 있으나 식 (3-20)이 계산이 용이하다. $P_z^{(k)}$ 대신 다음에 의하여 $P_Y^{(k)}$를 구할 수도 있다.

$$
P_y^{(k)}(\triangle, y\mid y_0;\theta)=\triangle^{-1/2}\phi\left(\frac{y-y_0}{\triangle^{1/2}}\right)\exp\left[\int_{y_0}^{y}\mu_Y(w;\theta)dw\right]\sum_{k=0}^{K}c_K(y\mid y_0;\theta)\frac{\triangle^k}{K!}
$$

위에서 $c_0(y\mid y;\theta)=1$이고 모든 $j\geq 1$에 대하여 다음 c_j는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
c_j(y\mid y_0;\theta) &= j(y-y_0)^{-j}\int_{y_0}^{y}(w-y_0)^{j-1} \\
&\quad+\{\lambda_Y(w;\theta)c_{j-1}(w\mid y_0;\theta)+\delta^2(c_{j-1}(w\mid y_0;\theta)/\delta w^2)/2\}dw
\end{aligned}
$$

위에서 $\lambda_Y(y;\theta) = -\{\mu_Y^2(y;\theta)+\delta\mu_Y(y;\theta)/\delta y\}/2$이다.

위의 예로서 Ornstein-Uhlenbeck 확률 미분 방정식인 $dX_t=-\beta X_t d_t+\sigma dW_t$를 살펴보자. 모수는 $\theta=(\beta, \sigma^2)$이고 $D_x=(-\infty, \infty)$이다. 확산함수는 $\sigma(X_1;\theta)=\sigma$이므로 X의 함수가 아니고 상수이다. 따라서 $Y=\gamma(X;\theta)=\int^{X}du/\sigma=X/\sigma$이다. $\mu_Y(y;\theta)=\mu(\gamma^{-1}(y;\theta);\theta)/\sigma(\gamma^{-1}(y;\theta);\theta)-(1/2)\delta\sigma(\gamma^{-1}(y;\theta);\theta)/\sigma x$인데

$\mu(\gamma^{-1}(u\,;\theta);\theta) = \beta\sigma Y$이고 $\sigma(\gamma^{-1}(y\,;\theta);\theta) = \sigma$이며 $\sigma(\gamma^{-1}(y\,;\theta);\theta)$가 상수이므로 미분은 0이다. 따라서 $\mu_Y(y;\theta) = -\beta\sigma Y/\sigma = -\beta Y$이다. $P_Y^{(k)}$는 <표 2>와 같다.

Ait-Sahalia는 수열에서 K항을표시하는 K는 K=1 또는 K=2이면 충분하다는 점을 시뮬레이션을 통하여 보여주고 있다. K=1일 때와 K=2일 때의 전이밀도는 각각 다음과 같다.

$$\widetilde{P}_Y^{(1)}(\triangle, y \mid y_0;\theta) = \widetilde{P}_Y^{(0)}(\triangle, y \mid y_0;\theta)\{1 + c_1(y \mid y_0;\theta)\triangle\}$$

$$\widetilde{P}_Y^{(2)}(\triangle, y \mid y_0;\theta) = \widetilde{P}_Y^{(0)}(\triangle, y \mid y_0;\theta)\{1 + c_1(y \mid y_0;\theta)\triangle + c_2(y \mid y_0;\theta)\triangle^2/2\}.$$

4. 시간 이질적 전이밀도 함수

Ait-Sahalia (1999, 2002)는 시간이 동질적이라는 가정 하에 확률미분방정식의 전이밀도를 유도하였다. 이에 비하여 Egorov, Li와 Xu (2003)는 시간의 동질성 대신 시간의 이질성을 가정하여 시간 이질적 확률미분방정식의 전이밀도를 도출하였다. 경제변수들은 경기변동, 통화정책, 일반적인 거시경제적 조건들의 변화로 인하여 시간의 흐름에 따라 변하게 된다. 미국의 경우 연방공개시장위원회의 회의가 열리는 날에는 이자율의 진폭성이 증가하고 있다. 주가의 주말효과와 연말효과 같은 현상은 시간의 동질성을 부정하고 있는 증거인 것이다. 시간의 이질성 아래에서는 시간이 중요한 변수 중 하나이므로 확률미분방정식은 다음과 같다.

$$dX_t = \mu(X_t, t\,;\theta) + \sigma(X_t, t\,;\theta)dW_t$$

Egorov 등 (2003)은 Ait-Sahalia (1999, 2002)의 방법을 그대로 따르고 있다. 시간의 동질성 대신 시간의 이질성만을 대체하고 있다. Ait-Sahalia의 대수가능도함수는 Egorov 등의 경우 시간변수가 도입되어 다음과 같이 변형된다.

$$Ln^{(J)}(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log\left\{P_X^{(J)}(X_{t_i}, t_i \mid X_{t_{i-1}}, t_{i-1};\theta \vee \frac{\varepsilon}{J}\right\}$$

위에서 ε은 작은 양수이다. J는 큰 수이다. ε/J는 전이밀도가 음수가 되는

상황을 배제하기 위한 것이다. X의 Y에로의 변환식과 Y로부터 Z에로의 변환은 h를 표본간의 간격으로 고정하고 t= s+h 라 할 때 다음과 같다.

$$Y_t = \phi(X_t ; t, \theta) = \int^{x} \frac{dw}{\sigma(w, t ; \theta)}; \quad Z_t = \phi(Y_t ; Y_s, h) = \frac{Y_t - y_s}{\sqrt{h}}$$

Ait-Sahalia의 Y_1에 X의 전이밀도에 이질시간 t 만 대체하면 이질적 시간의 모형을 얻게 되므로 과정은 생략하고 결과만 제시하면 다음과 같다.

기하브라운 운동은 $dX_t = aX_t dt + \sigma_0 e^{\sigma_1 t} X_t dW_t$이다. 가우스 전이확률밀도함수와 Hermite 전개에 의한 전이밀도는 각각 다음과 같다.

$$P_X(x, s+h \mid x_s, s; \theta) \sim N(\log x_s + ah - \frac{1}{2}V, V)x^{-1},$$

$$V = \frac{1}{2}\sigma_0^2 \sigma_1^{-1}(e^{2\sigma_1(s+h)} - e^{2\sigma_1 s})$$

$$P_X^{[m]}(x, s+h \mid x_s, s; \theta) = \frac{\phi(z)\, e^{-\sigma_1(s+h)}}{\sigma_0\sqrt{h}} \sum_{K=0}^{2m} \beta_k^{[m]} H_k(z), \quad z = \frac{e^{\sigma_1 h}\log x - \log x_s}{\sigma_0 e^{\sigma_1 s}\sqrt{h}}$$

Cox, Ingersoll과 Ross 모형은 $dX_t = a(b_t - x_t)dt + \sigma_0 e^{\sigma_1 t} dW_t$이다. 여기에서 $b_t = (\sigma_0^2 d/4a)e^{2\sigma_1 t}$ 이고 d는 상수이다. 전이밀도는 각각 다음과 같다.

$$P_X(x, s+h \mid x_s, s; \theta) = \frac{1}{2} G e^{-1/2(\lambda + Gx)} \left(\frac{Gx}{\lambda}\right)^{(d-2)/4} I_{d/2-1}(\sqrt{\lambda G x})$$

위에서 $\lambda = x_s V$,$G = e^{ah}V$, $V = (8\sigma_1/\sigma_0^2)e^{-ah}(e^{2\sigma_1(s+h)} - e^{2\sigma_1 s})$이고, $I_Q(\cdot)$는 차수Q의 제 1 종 수정 Bessel 함수이다. 전이밀도는 다음과 같다.

$$P_X^{[m]}(x, s+h \mid x_s, s; \theta) = \frac{\phi(z)\, e^{-\sigma_1(s+h)}}{\sigma_0\sqrt{h}} \sum_{k=0}^{2m} \beta_k^{[m]} H_k(z), \quad z = 2\frac{e^{-\sigma_1 h}\sqrt{x} - \sqrt{x_s}}{\sigma_0 e^{\sigma_1 s}\sqrt{h}}$$

Ⅳ. 가능도 비율 최대가능도법

다음의 일반적인 1차원 확률미분방정식을 고찰해보자.

$$dX_t = a(X_t, \Theta)dt + b(X_t, \sigma)dW_t \tag{4-1}$$

연속시간 아래에서 형성되는 대수가능도비율함수(loglikelihood ratio function)을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\log L(\Theta) = \int_0^T \frac{a(X_t, \Theta)}{\{b(X_t, \sigma)\}^2} dX_t - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\{a(X_t, \Theta)\}^2}{\{b(X_t, \sigma)\}^2} dt \tag{4-2}$$

1차원 확률미분방정식에 대하여는 k와 θ의 연속시간 최대가능도 추정치는 σ와 β값이 주어졌을 때 이 σ와 β의 값을 조건부로 하는 식(4-2)를 극대화시켜 얻을 수 있다. 이와는 대조적으로 Cleur와 Manfredi(1999)와 Cleur(2000)는 k와 θ의 추정량을 이산시간의 범주에서 얻을 수 있고 식(4-2)에 대한 quadrature approximation을 통하여 모수를 추정할 수 있다. Cleur(2000)는 Pedersen (1995), Shoji(1997), Shoji와 Ozaki(1997)등을 참조하여 다음과 같은 이산시간 최대가능도함수를 도출하였다.

$$\begin{aligned}\log L(\Theta) = & \sum_{t_i \le T} \frac{a(X_{t_i-1}, \Theta)}{\{b(X_{t_i-1}, \Theta)^2\}}(X_{t_i} - X_{t_i-1}) \\ & -\frac{1}{2}\sum_{t_i \le T} \frac{a(X_{t_i-1}, \Theta)}{\{b(X_{t_i-1}, \Theta)\}^2}(t_i - t_{i-1})\end{aligned} \tag{4-3}$$

위의 식(4-3)가 가능도 비율 최대가능도추정량이다.

모수 $\Theta=\{k, \theta\}$를 추정하기 위하여는 σ와 β의 값을 요구하고 있다. β의 값은 위에서 제시한 각 모형에 따라 알 수 있다. 즉 모형의 성질에 의하여 $\beta=0$, $\beta=0.5$ 또는 $\beta=1$ 이다. 그러나 σ는 일반적으로 알려지지 않고 있다. 이산화 단계가 충분히 작으면 Shoji와 Ozaki(1997)에 의하여 σ는 다음과 같이 추정하여 사용할 수 있다.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t_i \le T} \frac{(X_{t_i} - X_{t_i-1})^2}{X_{t_i-1}^{2\beta}} \tag{4-4}$$

위의 추정 값은 최대가능도 함수를 최초로 추정할 때 사용하며 그 이외의 단계에서는 다음에 제시하는 식에 의하여 추정된 값을 사용하는 것이 유리하다. Cleur(1999)가 제시하고 있는 바와 같이 이 추정치는 일치성(consistency)이 결

여되고 있기 때문이다. 모수 추정 절차는 다음과 같다.

(i) 식 (4-4)에 의하여 추정된 분산을 반복계산과정 중 최초의 반복과정에 사용한다.

(ii) 식(4-3)을 극대화시켜 k와 θ를 추정한다.

(iii) 위의 (ii)에서 얻은 k와 θ의 값을 사용하여 오일러 식(Euler scheme)으로 구한 잔차를 사용하여 분산 σ^2을 추정한다. 즉 다음에 의하여 σ^2를 구하며 이 때 $W_{t_i} \sim N(0, \sqrt{\delta})$이다.

$$X_{t_i} = X_{t_i - 1} + k(\theta - X_{t_i - 1})\delta + \sigma X^{\beta}_{t_i - 1} W_{t_i}$$

V. 실증적 특성함수

1. 일반화 적률법에 의한 추정량

조건부 특성함수를 사용하여 모수를 추정할 수 있다. 특성함수는 Kolmogorov 전진 후진방정식을 조건부밀도로 푸는 방법이다. Chacko와 Viceira(2003)는 스펙트럼적률을 사용하고 GMM을 통하여 특성함수를 구하고 있다. 이 방법은 이산화가 요구되지 않는다. 연속시간 고유변수(latent variable) 모형에 대하여서도 적용이 가능하다. 뿐만 아니라 건너뛰기과정 (jump process)에도 사용할 수 있다.

다음의 확률미분 방정식을 고려해 보자.

$$dX_t = \mu(X_t; \theta)dt + \sigma(x_t : \theta)dW_t + J_t\Gamma(T_t; \theta)dN_t(\lambda)$$

위에서 θ는 k 차원 모수 벡터이고 $\mu(X_t; \theta)$와 $\sigma(X_t; \theta)$는 표류함수와 확산함수이다. $J_t\Gamma(X_t; \theta)$는 건너뛰기의 양(jump magnitude)이다. 상태변수 X_t의 특성함수(characteristic function)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\theta(\omega, \tau; \theta, X_t) &= E[\exp(i\omega X_{t+\tau}) \mid X_t] \\ &= E[\cos(\omega X_{t+\tau}) \mid X_t] + E[i\sin(\omega X_{t+\tau}) \mid X_t]\end{aligned}$$

위의 등식은 Euler 전개에 의하여 구한 것이며 $i=\sqrt{-1}$이다. ω는 실가 변수이다. 따라서 조건부 특성함수는 t시점에 있어서 취하여진 τ기간 앞의 지수화된 상태변수의 조건부 기대이다. 그런데 D를 무한소생성작용소라 하면 다음의 확률과정의 Kolmogarov 전진방정식 $D\phi(\omega, \tau; \theta, X_t) = 0$을 풀어 특성함수를 구할 수 있다. 경계조건은 $\phi(\omega, 0; \theta, X_t) = \exp(i\ \omega\ X_t)$ 이다. 조건부 특성함수의 정의에 의하여 모든 $\omega \in R$에 대하여 다음이 형성됨을 알 수 있다.

$$E[\exp(i\ \omega\ X_t + \tau) - \phi(\omega, \tau; \theta, X_t \mid X_t] = 0$$

위 식에 Euler 근사법을 사용하면 다음을 얻는다.

$$E[Re(\exp(i\ \omega\ X_{t+\tau}) - \phi(\omega,\ \tau\ ;\ \theta,\ X_t)) \mid X_t] = 0$$

$$E[Im(\exp(i\ \omega\ X_{t+\tau}) - \phi(\omega, \tau\ ; \theta, X_t) \mid X_t] = 0$$

위에서 Re는 실수부분, Im은 허수부분을 의미한다. 위 식을 정리하면 다음과 같다.

$$Re\ \ (\exp(i\ \omega\ X_t + \tau) - \phi(\omega, \tau, \theta, X_t)) = \cos(\omega\ X_{t+\tau}) - Re(\phi(\omega, \tau\ ; \theta, X_t))$$

$$Im\ \ (\exp(i\ \omega\ X_t + \tau) - \phi(\omega, \tau\ ; \theta, X_t)) = \sin(i\ \omega\ \ X_t + \tau) - Im(\phi(\omega, \tau\ ; \theta, X_t))$$

도구변수(instrument variable)를 이용하면 다음과 같다.

$$E[h(X,t) \otimes \varepsilon(\theta, \omega; t)] = 0$$

위에서 $\varepsilon(\theta, \omega\ ; t) = \exp(i\omega X_{t-1}\tau) - \phi(\omega, \tau\ ; \theta, X_\theta)$이고 $h(X,t) = (h_1(X,t),$ $h_2(X, t),\ \ldots,\ h_\gamma(X, t))'$ 이다. $\varepsilon(\theta, \omega; t)$ 와 $\omega \in R$ 은 직교이다. 위 식에 대하여도 다음이 형성된다.

$$E[Re(h(X,t) \otimes \varepsilon(\theta, \omega; t))] = 0$$

$$E[Im(h(X,t) \otimes \varepsilon(\theta, \omega; t))] = 0$$

위에서 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdot\cdot\cdot, \omega_n)$으로 보통 $\omega = 1, 2, \cdot\cdot\cdot$를 취한다. 적률조건을 취하면 다음과 같다.

$$G(\theta ;P,t) = \begin{bmatrix} Re(h(X,t) \otimes \varepsilon(\theta;t)) \\ Im(h(X,t) \otimes \varepsilon(\theta;t)) \end{bmatrix}$$

위에서는 $\varepsilon(\theta: t) = (\varepsilon(\theta, \omega_1 ; t), \cdot\cdot\cdot, \varepsilon(\theta, \omega ; t))'$은 h(X,t)와 직교인 오차항의 n차원 벡터이다. GMM을 이용하기 위해선 위 식을 다음과 같이 합해야 한다.

$$g(\theta; X, \tau) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} G(\theta; X, t)$$

따라서 최적함수는 다음과 같다.

$$\widehat{\theta} = \arg\min g(\theta; X, T)W(\theta; X, T)g(\theta; X, T)$$

위에서 $W(\theta; X,t)$는 양정치 대칭 가중 행렬이다. 최적에 있어서는 $W^*(\theta;X,t) = S^{-1}$이다. 이 때 $S = \lim_{T\to\infty} E[g(\theta;X,t)g(\theta;X,t)']$이다. $g(\theta ;X,t)$가 시계열상관을 갖지 않으면 W^*의 일치추정값은 다음의 역행렬이다.

$$\widehat{S} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} G(\widehat{\theta}; X, t_i)G(\widehat{\theta}; X, t_i)$$

위에서 $\widehat{\theta}$는 θ의 일치추정량이다. $G(\widehat{\theta}; X, t_i)$가 시계열상관을 가지면, Newey-West (1987) 등이 추정하는 이분산 및 자기회귀일치추정량을 사용한다.

기하 브라운 운동과 제곱근 운동으로 이루어지는 모형은 주가의 순간적 진폭성이 확률적인 주가동태 모형이며 다음과 같다.

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sqrt{v_t}\, dW_S$$

$$dv_t = k(\theta - v_t) + \sigma\sqrt{V_0}\, dW_v$$

위에서 v_t는 주가의 순간적 분산이다. 모수는 μ, k, θ 와 σ이다. W_S와 W_V의 순간적공분산은 상수는 ρ이다. 조건부 특성함수를 도출하기 위하여 위 모형을 지수 아핀해를 갖도록 다음과 같이 변화시키자.

$$d\log S_t = \left(\mu - \frac{1}{2} v_t\right)dt + \sqrt{v_t}\, dW_S$$

$$dv_t = k(\theta - v_t)D_t + \sigma\sqrt{v_t}\,dW_v$$

조건부 특성함수 $\phi(\omega, \tau\,;\,\theta,\ \log S_t)$는 다음의 편미분 방정식을 만족한다.

$$D\phi(\omega,\ \tau,\ \theta,\ \log S_t,\ v_t) = 0$$

위에서

$$D\phi = \frac{1}{2}v_t\frac{\partial^2\phi}{\partial \log S_t^2} + \rho\sigma v_t\frac{\partial^2\phi}{\partial S_t\partial v_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 v_t\frac{\partial^2\phi}{\partial v_t^2} + \left(\mu - \frac{1}{2}v_t\right)\frac{\partial\phi}{\partial \log S_t}$$
$$+ k(\theta - v_t)\frac{\partial\phi}{\partial v_t} - \frac{\partial\phi}{\partial\tau}$$

위 식의 경계조건은 $\phi(\omega, 0\,;\theta, \log S_{T,} v_T) = \exp(i\omega\log_{S_T})$이다. 이 식의 해는 다음과 같다.

$$\phi(\omega, \tau\,;\theta, \log S_{t,} v_t) = \exp[i\omega\log S_T + A(\omega, \tau\,;\theta)v_t + B(\omega, \tau\,;\theta)]$$

위에서

$$A(\omega, \tau.\theta) = \frac{2}{\sigma^2}\left[\frac{u_1u_2e^{u_1\tau} - u_1u_2e^{u_2\tau}}{u_1e^{u_2\tau} - u_2e^{u_1\tau}}\right],$$

$$B(\omega, \tau.\theta) = \mu i\omega\tau + \frac{2k\theta}{\sigma^2}\log\left[\frac{u_2 - u_1}{u_2e^{u_1\tau} - u_1e^{u_2\tau}}\right],$$

$$u_1 = \frac{1}{2}[\rho\sigma i\omega - k + \sqrt{(\rho\sigma i\omega - k)^2 - \sigma^2 i\omega(i\omega - 1)}],$$

$$u_2 = \rho\frac{1}{2}[\sigma i\omega - k - \sqrt{(\rho\sigma i\omega - k)^2 - \sigma^2 i\omega(i\omega - 1)}].$$

위 식은 현재의 주가와 진폭성을 조건으로 하는 주가의 조건부 특성함수이다. 그런데 진폭성은 관찰되지 못하고 있다. 진폭성 모수들을 추정하기 위해서는 관찰되지 않는 변수에 대한 적분이 필요하며 이 적분은 다음과 같다.

$$\phi(\omega, \tau\,;\theta, \log S_t) = \int_0^\infty \phi(\omega, \tau, \theta, \log S_{t,} v_t)f(v_t)dv_t$$
$$= \exp[i\omega\log S_t + B(\omega, \tau\,;\theta)]\int_0^\infty \exp[A(\omega, \tau, \theta)v_t]f(v_t)dv_t \quad .$$

위에서 $f(v_t)$는 v_t의 비조건부 밀도이다. 적분 $\int_0^{\infty}\exp[A(\omega,\tau,\theta)v_t]f(v_t)dv_t$ 는 v_t의 비조건부 특성함수로 생각할 수 있다. 특성함수에서 분산 v_t를 적분하면 주가만을 조건부로 하는 조건부 특성함수를 다음과 같이 얻는다.

$$\phi(\omega,\tau,\theta,\log S_t)=\exp\left[i\omega\log S_t+B(\omega,\tau;\theta)+\frac{2k\theta}{\sigma^2}\log\left(\frac{2k}{2k-\sigma^2A(\omega,\tau,\theta)}\right)\right]$$

2. 아핀함수에 의한 실증적 특성함수

확률미분방정식의 구성요소인 표류함수와 확산함수를 아핀함수(affine function)로 가정하여 자본자산의 확률과정을 정립하는 연구가 진행되어 오고 있으며 Singleton(2001), Dai와 Singleton(2000), Duffie, Pan과 Singleton(2000) 등이 대표적인 경우이다. $\{Y_t\}$는 N차원 아핀확산으로부터 얻은 이산시간 시계열이라 하면, Y_t를 조건으로 하는 Y_{t+1}의 조건부 특성함수 (conditional characteristic function; CCF)는 Y_t의 아핀함수의 지수로서 폐형해를 가진다. CCF를 $\phi_t(u,\gamma)$로 표시한다. 이 때 u는 상수이고 γ는 모수의 벡터이다.

확률미분방정식이 다음과 같다.

$$dY_t=\mu(Y_t,t)dt+\sigma(Y,t)dt$$

다음 조건이 성립하면 Y의 확산은 아핀이다.

$$M(g)=\theta+\kappa y$$

$$\sigma(y)\sigma(g)=h+\sum_{j=1}^{N}y_iH^{(j)}$$

위에서 θ는 $N\times1$, κ는 $N\times N$, h와 $H^{(j)}$ $(j=1,\cdots,N)$는 $N\times N$ 대칭행렬이다. 순간이 시점 t에서 r_t에서의 순간적 할인율 r_t가 다음의 아핀함수이면 아핀가격결정모형이라 한다.

$$r_t=\delta_0+\delta_y{}'Y_t \tag{5-1}$$

그리고 증권의 이득(payoffs)은 함수 $g(Y_T)$이며 위험중립가격결정은 다음을

생성시킨다.

$$P_t^T = E_t^q[e^{\int_t^T r_s d_s} g(Y_T)] \quad (5\text{-}2)$$

위에서 E^q는 위험중립측도 아래에서의 기대작용소이다. 주가가 S이고 행사가격이 K일 때 $\log S_T = \eta_0 + \eta_y' Y_t$이고 $g(Y_T) = \max[S_T - K, v]$이면 식(5-2)는 아핀옵션가격결정모형이다. 시간 t에서 Y의 현재값과 그 이전의 시차값을 정보조건으로 하는 Markov과정 Y_t의 CCF는 다음과 같다.

$$\phi_t(\tau, u) = E(e^{iu'Y_t} \mid Y_t), \quad u \in R^N$$

위에서 $\tau = (T-t)$이고 $i = \sqrt{-1}$이다. $\phi_t(\tau, u)$는 다음의 형태를 취한다.

$$\phi(\tau, u) = e^{\alpha_t(u)} + \beta_t(u)' Y_t$$

위에서 α와 β는 복소 Riccati식을 만족한다.

$$d\beta_t = -k' \beta_t - \frac{1}{2}\beta_t' H \beta_t$$

$$d\alpha_t = -\theta \cdot \beta_t - \frac{1}{2}\beta_t' h \beta_t$$

위에서 경계조건은 $\beta_T(u) = u$이고 $\gamma_T(u) = 0$이다.

아핀 뛰어넘기 확산(affine jump diffusion)은 $dY = \mu(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dW_t + dZ_t$이다. Y_t의 아핀함수가 $\lambda(Y_t) = \ell_0 + \ell'_y Y_t$이면 CCF를 정의하는 Riccati 식은 다음과 같다.

$$d\beta_t = -k'\beta_t - \frac{1}{2}\beta_t' H \beta_t - \ell_0(\phi(\beta_t) - 1)$$

$$d\alpha_{t'} = -\theta \cdot \beta_t - \frac{1}{2}\beta_t' h \beta_t - \ell_y(\phi(\beta_t) - 1)$$

위에서 ϕ는 정규분포나 지수분포이다.

$\{Y_t\}_{t=1}^T$를 자산가격이나 수익률의 아핀함수로 표현된 확률미분방정식으로부터 관찰된 표본이라 하자. 이 때 Y_t가 이산적으로 관찰되었다고 하자. Y_t가

주어졌을 때 Y_{t+1}의 CCF는 $\phi_{Y_t}(u,\gamma)$이며 다음과 같다.

$$\phi_{Y_t}(u,\gamma)=\int_{R^N} f_Y(Y_{t+1}\mid Y_t;\gamma)e^{iu'Y_{t+1}}dY_{t+1}$$

따라서 Y_{t+1}의 조건부 밀도함수는 $\phi_{Y_t}(u,\gamma)$의 역 Fourier변환을 통하여 얻는다.

$$f_Y(Y_{t+1}\mid Y_t;\gamma)=\frac{1}{\pi^n}\int_{R_+^N} R_e[e^{-iu'Y_{t+1}}\phi_{Y_t}(u,\gamma)]du$$

위에서 R_e는 실수부분이다. 따라서 조건부 대수가능도함수는 다음과 같다.

$$\ell_t(\gamma)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\log\left\{\frac{1}{\pi^N}\int_{R_+^N} R_e\left[e^{-iu'Y_{t+1}}\phi_{Y_t}(u,\gamma)\right]du\right)$$

위 식의 극대화를 통하여 γ를 추정할 수 있다.

제곱근 과정은 다음과 같다.

$$dr=k(\theta-r)dt+\sigma\sqrt{r}dB_r$$

Cox, Ingersoll과 Ross(1985)는 r_t를 조건으로 하는 r_{t+u}의 조건부분포가 비중심 χ^2 분포이며 $\chi^2[2cr_t, 2q+2, 2\lambda_t)]$임을 밝힌 바 있다. 여기에서 $c=2k/(\sigma^2(1-e^{-k\Delta})$, $\lambda_t=cr_te^{-k\Delta}$, $q=2k\theta/\sigma^2-1$이다. r_{t+1}의 조건부 특성함수는 다음과 같다.

$$\phi_{r_t}(u)=(1-iu/c)^{-2k\theta/\sigma^2}\exp\left\{\frac{iue^{-k\Delta}r_t}{(1-ui/c)}\right\}$$

가격과정이 아핀 $p(Y_t,\gamma)$일 때를 보자. 이 때 $y_t=a(\gamma_0)+B(y_0)$이며 Y는 아핀함수를 따른다. y_t가 Y_t의 아핀함수이면 다음을 얻는다.

$$\phi_{y_t}(u,\gamma)=e^{iu'a(\gamma)}\phi_{Y_t}(B(\gamma)u)$$

위에서 ϕ_Y는 $Y_t=B(\gamma)^{-1}(y_t-a(\gamma))$의 평가를 통하여 얻는다. r_t가 제곱근 확산이면 n기간 순 할인 채권의 수익률 Y_t^n 은 $y_t^n=a_n(\gamma)_0+b_n(\gamma_0)r_t$이다. 여기에서 a_n 과 b_n은 상수이다. $\gamma_0'=(k,\theta,\sigma,\lambda)$라 하면 y_t^n을 조건으로 하는 CCF는 다

음과 같다.

$$\phi_{y_t^n}(u) = e^{\{-iua_n\}}(1-ib_n u/c)^{-k\theta^2/\sigma^2} \exp\left\{\frac{ib_n u e^{-k}(y_t^n - a_n)b_n}{(1-b_n ui/c)}\right\}$$

도구함수(instrument function)를 Z_T^∞라 하자. 이 Z_t의 원소는 $z_t(u):R^N \to C^Q$이다. $t=1,\cdots,T$에 대하여 $z_t(u)=I_t$, $Z_{t(u)} = \overline{Z}_t(-u)$이다. 각 $z \in Z_t^\infty$는 다음을 만족한다.

$$\frac{1}{T}\sum_k \int_{e^N} z_t(u)\left[e^{-iu'y_{t+1}} - \phi_t(u, \gamma_{KT}^z)\right]du = 0$$

주어진 $k>0$와 $\tau>0$에 대하여 구간 $[-k\tau, k\tau] \in R$를 고정시키자. Z_T^k를 만족하는 추정량 γ_{KT}^z족이라 하자.

$$\frac{1}{T}\sum_t \tau \sum_{k=-K}^{K} z_k(k\tau)\left[e^{ik\tau y_{t+1}} - \phi_{y_t}[\tau k, \gamma_{kT}^t\right] = 0$$

다음과 같이 정의하자.

$$\varepsilon_{K,t-1}(\gamma)' = \begin{bmatrix} \cos(\tau y_{t+1}) - R_e\phi_{yt}(\tau,\gamma), \cdots, \cos(k\tau y_{t+1} - R_e\phi_{yt}(k\tau,\gamma) \\ \sin(\tau y_{t+1} - I_m\phi_{yt}(\tau,\gamma), \cdots, \sin(k\tau y_{t+1}) - I_m\phi_{yt}(\tau,\gamma) \end{bmatrix}$$

그리고 $\tilde{Z}_{kT}$ 를 Q2k행렬로 $R_e(z_t,(k\tau))$와 $-I_m[z_t(k\tau)]$가 각각 첫째 k 및 둘째 k열이라 하자. 그러면 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{T}\sum_t \tilde{z}_{kT}\varepsilon_{k,t+1}(\gamma_{kT}^z) = 0 \tag{5-3}$$

γ_{kT}^z의 점근분포는 정규이며 공분산행렬은 다음과 같다.

$$\nu_0^k(\tilde{z}) = \{D^k(\tilde{z})\}^{-1} S_0^k(\tilde{z})\{D^{k\prime}(\tilde{z})\}^{-1}$$

위에서

$$S_0^k(\tilde{z}) = E[\tilde{z}_{kT}\varepsilon_{k,t+1}(\gamma_0)\varepsilon_{k,t+1}(\gamma_0)'\dot{z}_{kT}]$$

$$D^K(\tilde{z}) = E\left[\frac{\tilde{z}_{KT}\partial\varepsilon_{k,t+1}(\gamma_0)'}{\partial\sigma}\right]$$

위 식(5-3)이 GMM 함수이다. 따라서 GMM은 사용하여 모수를 추정할 수 있다.

3. 이자율의 아핀기간구조 모형

아핀 기간구조모형은 위험중립적 표류계수와 확산계수를 아핀함수로 정립하여 시간의 흐름에 따라 변하는 상태변수의 평균과 진폭성을 포착해주는 장점을 가진다. 순할인채권의 가격 결정에서는 아핀성이 폐형으로 표현된다. Vasicek(1977)와 Cox, Ingersoll과 Ross(1985)는 순간적 단기이자율 $r_{(t)}$가 N차원 상태변수 벡터 Y_t의 아핀함수라고 가정하였다. 즉 $r_{(t)}=\delta_0+\delta_y{}'Y(t)$이다. 여기에서 Y(t)는 확산함수가 가우스과정이거나 제곱근과정이다.

Dai와 Singleton(2000)은 이자율의 기간구조모형을 아핀기간구조모형으로 정립하였다. 그들은 Balduzzi, Das, Foresi와 Sundaram(BDFS, 1996)이 정립한 BDFS모형을 아핀모형으로 재정립하였다. BDFS모형은 다음과 같다.

$$du(t)=\mu(\overline{u}-u(t))dt+\hat{\eta}\sqrt{u(t)}dB_u(t)$$

$$d\theta(t) = \nu(\overline{\theta}-\theta(t))dt + \xi dB_\theta(t)$$

$$dr(t)=k(\theta(t)-r(t))dt+\sqrt{u(t)}d\widehat{B}_r(t)$$

위에서 $cov(dB_v(t), d\widehat{B}_r(t)=\rho_{rv}dt$이다. 위 식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$dr(t)=k(\theta(t)-r(t))dt+\sqrt{1-\rho_{rv}^2}\sqrt{u(t)}dB_r(t)+\rho_{rv}\sqrt{u(t)}dB_v(t)$$

위에서 $B_r(t)$와 $B_v(t)$는 독립적이다. u(t)를 $u(t)=(1-\rho_{rv}^2)u(t)$로 대체하고 $\overline{u}$를 $\overline{v}=(1-\rho_{rv}^2)\overline{u}$로 대체하고 $\hat{\eta}$를 $\eta=\sqrt{1-\rho_{rv}^2}\hat{\eta}$로 대체하면 아핀기간구조모형은 다음과 같다.

$$dv(t)=\mu(\hat{v}-v(t)dt+\eta\sqrt{v(t)}dB_v(t)$$

$$d\theta(t)=v(\overline{\theta}-\theta(t))dt+\xi dB_\theta(t)$$

$$dr(t)=k(\theta(t)-r(t))dt+\sqrt{v(t)}dB_r(t)+\sigma_{rv}\eta\sqrt{v(t)}dB_v(t)$$

위에서 $\sigma_{rv} = \rho_{rv}/n\sqrt{1-\rho_{rv}^2}$ 이다. 위에서 v(t)는 진폭성요인이며 이것은 r 의 조건부 진폭성을 통해서만 단기 이자율과정에 영향을 미친다. $\theta(t)$는 r의 중심성향(central tendency)이다. 단기 이자율평균은 k 율로 중심성향 $\theta(t)$에 회귀한다.

Ⅵ. 결 론

이 논문에서는 연속시간 확률미분방정식의 추정방법을 문헌을 통하여 살펴보았다. 정립된 추정방법을 주가, 채권가격, 옵션가격 등에 적용하여 모수를 추정하고 검정한 실증분석은 할애하였다. 그것은 지면의 계약 때문이다. 이 조사를 통하여 연속시간 모형이지만 추정은 주로 이산시간 시계열 데이터를 사용하여 이루어지고 있음을 보았다.

기하브라운 운동, 제곱근 과정과 장기적 평균과 평균회귀 속도가 고려된 모형을 제외한 대부분의 확률 미분 방정식의 표류함수와 확산함수는 폐형 해나 해석적 해가 알려져 있지 않고 있다. 때문에 최대가능도법을 적용하기가 어렵다. 표류함수와 확산함수를 Taylor 전개나 Hermite 전개, 또는 이 양자의 결합을 통한 전개를·수행하여 대수가능도 함수를 얻고 이 함수를 최대가능도법에 적용하여 모수를 추정하고 있다. 이 때의 관건은 대수 가능도 함수가 참대수가능도 함수에 일치하고 있느냐의 여부에 달려있다. 대수가능도 함수가 알려진 모형은 표류모수와 확산모수를 임의로 정하고 이 값들을 사용하여 시뮬레이션을 통한 데이터를 생성시킨다. 이 생성된 데이터를 최대가능도법에 적용하여 모수들을 추정한다. 앞에서 설명한 방법에 의하여 정립한 대수가능도함수를 생성된 데이터에 적용하여 모수들응 추정한다. 이 두 쌍의 모수들을 비교하여 참전이함수의 표상으로 정립된 대수전이확률밀도함수, 즉 대수가능도함수의 적합성 여부를 검토한다. 이 검토를 통하여 정립된 대수가능도 함수가 모집단의 대수가능도 함수로 사용해도 괜찮은지의 여부에 대한 결론이 내려지고 있다.

연속시간 모형은 Euler 방법에 의하여 이산시간 모형으로 변환시키고 이를 사용하여 모수를 추정한다. 그러나 이산시간 모형으로 근사치화 할 때 오차가

크게 발생할 우려가 존재하므로 최대가능도 법의 사용은 어렵다. 이를 완화하기 위하여 GMM이나 EMM 또는 SMM을 사용하여 오차를 줄이고 있는데, 이 경우 신뢰도가 무척 높아진다. 특히 이산시간화에 생성되는 오차와 도구 변수간의 직교성을 구하면 GMM의 적용은 성공적이다. GMM은 모집단적률과 표본적률이 일치하여야 하며 이 양자의 차이는 0이 되여야 한다. 모집단적률과 표본적의 차이벡터가 0의벡터, 즉 직교성이 형성되도록 해주는 도구변수를 발견하면 GMM은 훌륭한 모수추정방법이다. 관건은 직교성 조건이 충족되는 도구변수의 발견이다.

특성함수는 확률 분포의 기대값과 분산을 비롯한 고차적률을 계산하는데 사용되는 함수이다. 실증특성함수가 도출되면 이 함수를 이용하여 모수를 추정할 수 있다. 확률미분방정식의 실증특성함수는 Kolmogorov 전진 방정식과 후진 방정식을 이용하여 도출할 수 있다. GMM, EMM, SMM 등은 도구 변수와 적률조건을 사용하고 도구변수 적률의 직교성에 의하여 모수를 추정하는 방법이다. 실증특성함수는 이 같은 조건의 충족이 용이하므로 비모수추정방법 에의하여 모수를 추정할 수 있는 장점이 있다. 물론 최대가능도법의 적용도 가능하다.

상태변수를 그대로 적용하여 표류함수와 확산함수의 폐형과 이를 통한 확률밀도함수의 도출이 어렵거나 불가능한 경우에는 상태변수를 다른 변수로 변환시키고 이 변수의 조건부 확률밀도함수, 즉 전이밀도함수를 도출할 수 있다. 변환된 상태 변수의 전이밀도를 원래의 상태변수의 전이밀도함수로 변환시키면 소기의 목적이 달성된다. 한번의 변환에 의하여 조건부 전이밀도함수의 도출이 이루어지지 않으면 다시 한번 다른 변수로 변환시킨다. 이 변환된 변수의 전이확률 밀도함수를 유도한 후 역방향으로 전이밀도를 변환시키면 원래 상태 변수의 전이밀도를 얻을 수 있다. 이 같은 전환이 성공적으로 이루어지면 최대가능도법을 용이하게 적용할 수 있다.

미분의 개념과 유사한 개념이 무한소이다. 무한소를 생성시키는 작용소가 무한소생성 작용소이다. 무한소생성 작용소는 전이밀도함수를 도출하는데 유용한 도구이다. 이 작용소는 미분방정식의 해도 도출하므로 미분 방정식의 해를 통하여 확률밀도함수와 조건부 확률밀도함수인 전이 확률밀도함수를 생성시킬 수 있다. 무한소생성 작용소를 사용하여 고유값과 고유벡터를 구할 수 있으며

고유벡터가 함수이면 고유값과 고유함수를 얻을 수 있다. 고유값과 고유함수 또는 고유벡터를 통하여 전이밀도를 구하고 이 전이밀도를 통하여 모수의 추정이 가능하다.

연속시간 모형에 이산시간 시계열 데이터를 사용하면 관찰된 한 시점과 바로 이웃한 시점 사이에서는 데이터가 관찰되지 못하고 있다. 관찰 시점간의 구간이 길면 길수록 관찰되지 못한 데이터가 증가하게 되어 아무리 좋은 방법을 사용해도 참모수 값으로부터 일탈된 추정값을 얻을 가능성이 커진다. 관찰 시점과 이 시점과 이웃한 관찰시점 사이에 있는 데이터의 복원이 요청된다. 이 기간에 관찰되지 못한 데이터는 MCMC 방법에 의하여 시뮬레이션을 통하여 복원할 수 있다. 사전 확률과 사후 확률을 사용하고 Markov 연쇄의 성질을 이용하면 관찰되지 못한 데이터의 복원이 가능하다. MCMC 방법은 확률미분방정식 뿐만 아니라 진폭성 모형에서도 많이 사용되고 있다.

이자율의 기간구조는 아편모형으로 정립할 수 있다. 아핀모형은 단기 이자율과 장기 이자율의 운동을 파악할 수 있는 장점이 있다. 아핀 기간구조 모형은 실증특성함수의 적용을 통하여 추론이 가능하다.

확률미분방정식의 추정과 검정은 위에서 본 바와 같이 다양한 측면에서 이루어지고 있다. 90년대에 들어서서야 이 방면의 연구가 본격화되고 있으며 연구논문이 양적으로 많은 편은 아니지만 상당한 성과를 거두고 있음을 부인할 수 없는 사실이다. 함수의 폐형 해나 해석적 해가 존재하지 않는 경우 이를 얻기 위하여 Taylor 전개와 Hermite 전개가 사용되고 있다는데 불과하다. 알려진 중요한 변환방법이 사용된 적이 없고 알려진 전개법도 아직 시도되지 못하고 있다. 따라서 이 분야는 앞으로 여러 방면에서 접근이 가능하며 그만큼 연구의 성공 가능성이 높은 영역이라 할 수 있다. 이제 이 분야의 연구에 가속이 붙기 시작하였으므로 머지않아 실무계가 널리 활용할 수 있는 성과가 이루어지리라 생각된다.

이 논문에서는 주가와 채권가격, 이자율의 기간구조에 한정하고 추정방법에 중점을 두었다. 연속시간 확률미분방정식의 추정방법은 선물 및 옵션과 확률적 진폭성 모형에서도 사용되고 있으나 지면관계상 여기에서는 할애하였다. 그러나 여기에서 다루어진 방법들에 비추어 선물, 옵션, 확률적 진폭성 등을 다룬 논문을 읽으면 이해가 용이하리라고 생각되며 후일을 기약하여 남겨둔다.

참 고 문 헌

이일균. 주가시계열에 대한 확률미분 방정식의 모수추정과 자본시장의 운동법칙, 재무관리연구, 제15권 제2호, 1998, 1-59.

이일균. 자본자산가격의 운동법칙을 표상하는 연속시간 확률미분방정식의 추정방법: 비시뮬레이션 방법. 2004. 명지대학교.

이일균. 시뮬레이션에 의한 자본자산가격의 연속시간 확률미분방정식의 추정방법. 2004. 명지대학교.

Ait-Sahalia, Y., 1996a. Nonparametric Pricing of Interest Rate Derivative Securities. *Econometrica* 64, 527-560.

Ait-Sahalia, Y., 1996b. Testing Continuous-Time Models of the Spot Interest Rate. *Review of Financial Studies* 9, 385-426.

Ait_Sahalia, Y., 1999. Transition Densities for Interest Rate and Other Nonlinear Diffusions. *Journal of Finance* 54, 1361-1395.

Ait-Sahalia, Y., 2002. Maximum Likelihood Estimation of Discretely -Sampled Diffusions : A Closed-Form Approximation Approach. *Econometrica* 70, 223-262.

Ait-Sahalia, Y., 2002. Telling from Discrete Data Whether the Underlying Continuous-Time Model in a Diffusion. *Journal of Finance* 57, 2075-2112.

Ait-Sahalia, Y. and A. Lo, 2000. Nonparametric Risk Management and Implied Risk Aversion. *Journal or Econometrics* 94, 9-51.

Ait-Sahalia, Y. and P. Mykland, 2003. The Effects of Random and Discrete Sampling When Estimating Continuous-Time Diffusions. *Econometrica* 71, 483-549.

Andersen, T., L. Benzoni, and J. Lund, 2002. An Empirical Investigation of Continuous-Time Equity Return Models. *Journal of Finance* 57, 123-1284.

Andersen, T.G. and J. Lund, 1997. Estimating Continuous Time Stochastic Volatility Models of the Short Term Interest Rate. *Journal of Econometrics* 77, 343-377.

Backus, D., S. Foresi and C. Telmar, 2001. Affine Term Structure Models and the Forward Primium Anomaly. *Journal of Finance* 56, 279-305.

Bakshi, G., C. Gao and Z. Chen, 1997. Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models. *Journal of Finance* 52, 2003-2049.

Balduzzi, P., S. Das, and S. Foresi, 1996. The Central Tendency: A Second Factor in Bond Yields. *Review of Economics and Statistics* 80, 62-72.

Balduzzi, P., S. Das, S. Foresi, and R. Sundaram, 1996. A Simple Approach to Three Factor Affine Term Structure Models. *Journal of Fixed Income* 6, 43-55.

Bandi, F.M., 2002. Short Term Interest Dynamics: A Spatial Approach. *Journal of Financial Economics* 65, 73-110.

Bandi, F.M. ane P.C.B. Phillips, 2003. Fully Nonparametric Estimation of Scalar Diffusion Models. *Econometrica* 71, 241-283.

Bandi, F.M. and T.H. Nguyen, 2003. On the Functional Estimation of Jump-Diffusion Models. *Journal of Econometrics* 116, 293-328.

Bansal, R. and H. Zhou, 2002. Term Structure of Interest Rates with Regime Shits. *Journal of Finance* 57, 1997-2043.

Brandt, M.W. and P. Santa-Clara, 2002. Simulated Likelihood Estimation of Diffusions with an Application to Exchange Rate Dynamics in Incomplete Markets. *Journal of Financial Economics* 63, 161-210.

Broze, L., O. Scaillet, and J.M. Zakoian, 1995. Testing for Continuous Time Models of the Short Term Interest Rate. *Journal of Empirical Finance* 2, 199-223.

Chan, K., G. Karolyi, F. Longstaff, and A. Sanders, 1992. An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short Term Interest Rate. *Journal of Finance* 47, 1209-1227.

Chacko, G. and L. Viceira, 2003. Spectral GMM Estimation of Continuous -Time Processes. *Journal of Econometrics* 116, 259-292.

Chen, R. and L. Scott,1993. Maximum Likelihood Estimation for a Multifactor Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Fixed Income* 4, 14-31.

Chen, R. and L. Scott, 1995. Interest Options in Multifactor Cox-Ingersoll-

Ross Models of the Term Structure. *Journal of Derivatives* 3, 53-72.

Chernov, M., R. Gallant, E. Ghysels, and G. Tauchen, 1999. Alternative Models for Stock Price Dynamics.

Chernov, M. and E. Ghysels, 2000. A Study towards a Unified Approach to the Joint Estimation of Objective and Risk Measures for the Purpose of Options Valuation. *Journal of Financial Economics* 56, 407-458.

Cleur, E.M., 2000. Maximum Likelihood Estimates of a Class if One-Dimensional Differential Equation Models from Discrete Data. *Journal of Time Series Analysis* 22, 505-515.

Cleur, E.M. and P. Manfredi, 1999, One Dimensional SDE Models, Low Order Numerical Methods and Simulation Based Estimation: A Comparison of Alternative Estimators. *Computational Economics* 13, 477-497.

Conley, T., L. Hansen, E. Luttmer, and J. Scheinkman, 1997. Short-Term Interest Rates as a Subordinated Diffusions. *Review of Financial Studies* 10, 525-577.

Cox, J.C., J.E. Ingersoll and S.A. Ross, 1985. A Theory of the Term Structure of Interest Rate. *Econometrica* 53, 385-407.

Dacunha-Castelle, D. and D. Florens-Zmirou, 1986. Estimation of the Coefficients of a Diffusion from Discrete Observations. *Stochastics* 19, 263-284.

Dai, Q. and K.J. Singleton, 2000. Specification Analysis of Affine Term Structure Models. *Journal of Finance* 50, 1943-1978.

Dai, Q. and K.J. Singleton, 2002. Expectation Puzzles, Time-Varying Risk Premia, and Affine Models of the Term Structure. *Journal of Financial Economics* 63, 415-441.

Dai, Q. and K. Singleton, 2003. Term Structure Dynamics in Theory and Reality. *Review of Financial Studies* 16, 61-678.

Darolles, S., J.P. Florens, and C. Gourieroux, 1998. *Kernel Based Nonlinear Cannonical Analysis,* CREST, Paris.

Darolles, S. and C. Gourieroux, 2001. Truncated Dynamics and Estimation of Diffusion Equations. *Journal of Econometrics* 102, 1-22.

Das, S.R., 2002. The Surprise Element : Jumps in Interest Rates. *Journal of*

Econometrics 106, 27-65.

Dell'Aquila, R., E. Ronchetti, and F. Trojani, 2002. Robust GMM Analysis of Models for the Short Rate Process. *Journal of Empirical Finance* 10, 373-397.

Duarte, J., 1999. The Relevance of Parametrization of Market Price of Risk in Affine Term Structure Models. *University of Chicago.*

Duarte, J., 2003. Evaluating Alternative Risk Preferences in Affine Term Structure Models. *Review of Financial Studies.*

Duffie, D., and P. Glynn, 1997. Estimation of Continuous Time Markov Processes Sampled at Random Time Interval. *Stanford University.*

Duffie, D. and R. Kan, 1996. A Yield-Factor Model of Interest Rates. *Mathematical Finance* 6, 379-406.

Duffie, D., J. Pan, and K. Singleton,2000. Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump Diffusions. *Econometrica* 68, 1343-1376.

Duffie, D. and K. Singleton, 1993. Simulated Moments Estimation of Markov Models of Asset Prices. *Econometrica* 61, 929-952.

Duffie, D. and K. Singleton, 1999. Modeling Term Structure of Defaultable Bonds. *Review of Financial Studies* 12, 687-720.

Elerian, O., S. Chib, and N. Shephard, 2001. Likelihood Inference for Discretely Observed Non-Linear Diffusions. *Econometrica* 69, 959-993.

Eraker, B.,2001. MCMC Analysis of Diffusion Models with Application to Finance. *Journal of Business and Economic Statistics* 19, 177-191.

Epanechnikov, V.A., 1969. Nonparametric estimation of a multidimensional probability density. *Theory of Probability and Its Applications* 13, 153-158.

Egorov, A.V., H. Li, and Y. Xu, 2003. Maximum Likelihood Estimation of Time-Inhomogeneous Diffusions. *Journal of Econometrics* 114, 197-139.

Feller, W., 1951. Two Singular Diffusion Problems. *Annals of Mathematics* 54, 173-182.

Florens, D., 1999. Estimation of the Diffusion Coefficient from Crossing. *Sta-*

tistical Inference for Stochastic Processes 1, 175-195.

Florens-Zmirou, D., 1989. Approximate Discrete-Time Schemes for Statistics of Diffusion Processes. *Statistics* 20, 547-555.

Florens-Zmirou, 1993. On Estimating the Diffusion Coefficient from Discrete Obsevations. *Journal of Applied Probability* 30, 790-804.

Gallant, A.R. and J.R. Long, 1997. Estimating Stochastic Differential Equations by Minimum Chi-squared. *Biometrika* 84, 125-141.

Gallant, A.R. and G Tauche, 1989. Seminonparametric Estimation of Conditionally Constrained Heterogeneous Processes : Asset Pricing Implications. *Econometrica* 57, 1091-1120.

Gallant, A. and G. Tauchen, 1996. Which Moments to Match. *Econometric Theory* 12, 657-681.

Gallant, R. and G. Tauchen, 1997. Estimation of Continuous-Time Models for Stock Returns and Interest Rates. *Macroeconomic Dynamics* 1, 135-168.

Gallant, A.R. andG Tauchen, 1998. Reprojecting Partially Observed Systems with Application to Interest Rate Diffusions. *Journal of American Statistical Association* 93, 10-23.

Goureiroux, C. and A. Monfort, 1993. Indirect Inference. *Journal of Applied Econometrics* 8, 85-118.

Hansen, L. and J. Scheinkman, 1995. Back to the Future : Generating Moment Implications for Continuous-Time Markov Processes. *Econometrica* 63, 767-804.

Hansen, L., J. Scheinkman and N. Touzi, 1998. Identification of Scalar Diffusions Using Eigenvectors. *Journal of Econometrics* 86, 1-32.

Heston, S., 1993. A Closed-Form Solution of Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies* 6, 327-343.

Honore, P., 1997. *Maximum Likelihood Estimation of Non-Linear Continuous -Time Term Structure Models*. Aarhus School of Business.

Jiang, G.J. and J.L. Knight, 1997. A Nonparametric Approach to the Estimation of Diffusion Processes with an Application to a Short-term Interest -Rate Model. *Econometric Theory*13, 615-645.

Jiang, G.J. and J.L. Knight, 2000. Estimation of Continuous-Time Processes via the Empirical Characteristic Function. *Journal of Business and Economic Statistics* 20, 198-212.

Johannes, M., 2003. The Statistical and Economic Role of Jumps in Continuous -Time Interest Rate Models. *Journal of Finance*

Jones, C., 2003. Nonlinear Mean Reversion in the Short-Term Interest Rates. *Review of Financial Studies* 16. 793-843.

Kessler, M. and M. Sorensen, 1999. Estimating Equations Based on Eigen-functions for a Discretely Observed Diffusion Process. *Bernoulli* 5, 299-314.

Longstaff, T., P. Santa-Clara, and E. Schwartz, 2001. The Relative Valuation of Caps and Swaptions: Theory and Empirical Evidence. *Journal of Finance* 56, 2067-2109.

Lo, A., 1988. Maxilum Likelihhod Estimation of Generalized Ito Processes with Discretely Sampled Data. *Econometric Theory* 4, 231-247.

Pan, J., 2002. The Jump-Risk Premia Implicit in Options: Evidence from an Integrated Time-Series Study. *Journal of Financial Economics* 63, 3-50.

Pedersen, A., 1995a. A New Approach to Maximum Likelihood Estimation for Stochastic Differential Equations Based on Discrete Obser-vations. *Scandinavian Journal of Statistics* 22, 55-71.

Pedersen, A., 1995b. Consistency and Asymptotic Normality of an Approximate Maximum Likelihood Estimator for Discretely Observed Diffusion Processes. *Bernoulli* 1,257-279.

Pritsker, M., 1998. Nonparametric Density Estimation and Tests of Contin-uous Time Interest Rate Models. *Review of Financial Studie*s 11, 449-487.

Singleton, K., 2001. Estimation of Affine Asset Pricing Models Using the Empirical Characteristic Function. *Journal of Econometrics* 102, 111-141.

Singleton, K., 2001. Estimation of Affine Asset Pricing Models Using the

Empirical Characteristic Function. *Journal of Econometrics* 102, 111-141

Stanton, R., 1997. A Nonparametric Model of Term Structure Dynamics and the Market Rate of Interest Rate Risk. *Journal of Finance* 52, 1973-2002.

Vasicek, O., 1997. An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics* 5, 177-188.

Zhao, S. and G.W. Wei, 2003. Jump Process for the Trend Estimation of Time Series. *Computational Statistics and Data Analysis* 42, 219-241.

Zhou, H., 2001. Finite Sample Properties of EMM, GMM, QMLE, and MLE for a Square-Root Interest Rate Diffusion Model. *Journal of Computational Finance* 5, 89-122.