물리탐사
Vol. 7, No. 3, 2004, p. 207~212

해 설

MT 자료의 3차원 역산 개관

김희준[1)]· 남명진[2)] · 한누리[2)] · 최지향[2)] · 이태종[3)] · 송윤호[3)] · 서정희[2)]

Review on the Three-Dimensional Inversion of Magnetotelluric Data

Hee Joon Kim[1)], Myung Jin Nam[2)], Nuree Han[2)], Jihyang Choi[2)], Tae Jong Lee[3)], Yoonho Song[3)] and Jung Hee Suh[2)]

요 약 : 자기지전류(MT) 자료의 3차원 역산에 대해 소개한다. MT 자료의 역산 문제는 기본적으로 악조건이므로 유일한 해가 존재하지 않는다. 이러한 비유일성을 줄이고 정확한 역산해를 구하기 위해서는 역산 시 사전정보를 추가하는 제약조건을 가해야 한다. 물리탐사 분야에서 비선형 역산에 사용되는 가장 일반적인 방법은 일련의 선형화된 역산문제를 푸는 Gauss-Newton법이다. 이 알고리듬은 수렴 시, 모델 공간에서 역산문제에 대한 목적함수를 최소화하는 최적해를 준다. 그러나 이러한 반복적 선형화기법은 3차원 MT 역산의 경우 Jacobian 행렬을 구하기 힘들기 때문에 그 유용성에 한계가 있다. 이러한 어려움은 CG법에 의해 완화할 수 있다. 선형 CG법은 Gauss-Newton 반복의 각 단계를 근사적으로 풀기 위해서 사용된다. 한편 비선형 CG법은 목적함수의 최소화에 직접적으로 적용된다. 이들 CG법은 Jacobian 행렬의 계산 및 대형 선형방정식의 해를 반복 당 세 번의 모델링으로 대치할 수 있어서 3차원 역산에 적합하다.

주요어 : 3차원, MT, 역산, Gauss-Newton, Jacobian, CG

Abstract : This article reviews recent developments in three-dimensional (3-D) magntotelluric (MT) imaging. The inversion of MT data is fundamentally ill-posed, and therefore the resultant solution is non-unique. A regularizing scheme must be involved to reduce the non-uniqueness while retaining certain a priori information in the solution. The standard approach to nonlinear inversion in geophysics has been the Gauss-Newton method, which solves a sequence of linearized inverse problems. When running to convergence, the algorithm minimizes an objective function over the space of models and in this sense produces an optimal solution of the inverse problem. The general usefulness of iterative, linearized inversion algorithms, however, is greatly limited in 3-D MT applications by the requirement of computing the Jacobian (partial derivative, sensitivity) matrix of the forward problem. The difficulty may be relaxed using conjugate gradients (CG) methods. A linear CG technique is used to solve each step of Gauss-Newton iterations incompletely, while the method of nonlinear CG is applied directly to the minimization of the objective function. These CG techniques replace computation of Jacobian matrix and solution of a large linear system with computations equivalent to only three forward problems per inversion iteration. Consequently, the algorithms are very efficient in computational speed and memory requirement, making 3-D inversion feasible.

Keywords : 3-D, MT, inversion, Gauss-Newton, Jacobian, CG

서 론

자기지전류(magnetotelluric, MT)법의 유용성을 높이고 자료해석의 신뢰도를 향상하기 위해서는 3차원적 해석이 필요하며, 이를 위해 그 동안 3차원 역산에 대한 많은 연구가 진행되어 왔다. Mackie and Madden(1993)은 선형 CG(conjugate gradients)법을 이용하여 Jacobian(편미분, 감도) 행렬을 효율적으로 계산하는 획기적인 알고리듬을 제안했다. 그 후 Newman and Alumbaugh(2000)는 병렬컴퓨터를 이용하여 비선형 CG (NLCG)법에 기초한 수치실험을 시도하였으며, Mackie *et al.* (2001)도 이 NLCG법이 메모리와 계산시간을 절약하는데 효과적임을 보여주었다. 한편 Zhdanov *et al.*(2000a)은 모델링에 QL(quasi-linear) 근사법을, Hursan and Zhdanov(2001)는 QA (quasi-analytical) 근사법을 이용한 역산법을 소개하였으며, Yamane *et al.*(2000)은 RRI(rapid relaxation inversion)법을 3차원 문제에 확장하였다.

3차원 역산을 실용화하는데 있어서 가장 중요한 과제는 역산 시 필요한 막대한 계산량과 메모리를 어떻게 실용적인 규

*2004년 8월 11일 접수
1) 부경대학교 환경탐사공학과(Department of Environmental Exploration Engineering, Pukyong National University)
2) 서울대학교 지구환경시스템공학부(School of Civil, Urban & Geosystem Engineering, Seoul National University)
3) 한국지질자원연구원(Korea Institute of Geoscience and Mineral Resources)

모로 줄이느냐 하는 것이다. 위에서 소개한 연구들은 NLCG법을 제외하고 모두 어떤 형태든 근사법을 도입하여 계산시간을 줄이고 있다. 그러나 어떤 역산법이 실용적인지 아닌지 여부는 단순히 계산효율 뿐만 아니라 근사로 인한 해석의 정확도 저하가 허용될 수 있는 수준인지 여부에도 달려있다.

최근 현장탐사자료를 3차원 역산하여 해석한 보고가 이어지고 있다(Uchida *et al.*, 2001; Golubev *et al.*, 2002; 송윤호 등, 2004). 이러한 시점에서 그 동안 발표된 MT 자료의 3차원 역산법을 정리하여 이를 실용화하는데 따르는 문제점을 명확히 하고 비선형 최소자승법, CG법 및 적분방정식에 기초를 둔 3차원 역산법에 대해 소개한다.

비선형 최소자승 역산

MT 법의 역산문제는 다음과 같이 요약할 수 있다.

$$\mathbf{d} = \mathbf{f}(\mathbf{m}) + \mathbf{H}\mathbf{s}. \tag{1}$$

여기서 $\mathbf{d}$는 관측자료, $\mathbf{f}(\mathbf{m})$은 모델변수 $\mathbf{m}$에 대한 모델링 반응, $\mathbf{s}$는 정적효과(static shift), 그리고 $\mathbf{H}$는 위상에 대응한 행은 모두 0, 겉보기비저항에 대응한 행은 한 요소만 1이고 나머지는 모두 0인 행렬이다(deGroot-Hedlin, 1991). MT 자료에는 일반적으로 정적효과가 포함되어 있으며, 이는 지하 천부의 소규모 전기비저항 이상에 기인한다. 이 정적효과는 겉보기비저항을 모든 주파수에 걸쳐서 같은 양만큼 이동시키기 때문에 이를 제거하지 않으면 해석 결과에 심각한 영향을 미친다. deGroot-Hedelin(1991) 및 Ogawa and Uchida(1996)는 2차원 역산에 정적효과를 포함시키는 것으로 이 문제를 해결하였으며, 이러한 기법은 Sasaki(2001) 및 Lee *et al.*(2003)에 의해 3차원 문제에 적용되었다.

모델변수 $\mathbf{m}$에 관하여 비선형인 (1)식은 Gauss-Newton법에 의해 k번째 반복 시의 모델을 $\mathbf{m}^{(k)}$로 표현하면 다음과 같이 변형된다.

$$\Delta\mathbf{d} = \mathbf{J}\Delta\mathbf{m} + \mathbf{H}\mathbf{s}. \tag{2}$$

여기서 $\Delta\mathbf{d}[= \mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{m}^{(k)})]$는 관측값과 모델 응답과의 차이를 나타내는 오차벡터, $\mathbf{J}$는 Jacobian 행렬, 그리고 $\Delta\mathbf{m}$은 모델의 증분(수정) 벡터이다. (2)식의 최소자승해는 일반적으로 안정적으로 구해지지 않기 때문에 사전정보(a priori information)에 기초한 제약조건을 줄 필요가 있다. 따라서 보통 다음과 같은 목적함수 U를 최소화하는 모델을 구하는 문제를 생각하게 된다.

$$U = \|\mathbf{W}_d(\Delta\mathbf{d} - \mathbf{J}\Delta\mathbf{m} - \mathbf{H}\mathbf{s})\|^2 + \lambda[\|\mathbf{W}_m\mathbf{L}\mathbf{m}^{(k+1)}\|^2 + \varepsilon\|\Delta\mathbf{m}\|^2] + \kappa\|\mathbf{s}\|^2. \tag{3}$$

여기서 $\mathbf{W}_d$ 및 $\mathbf{W}_m$은 각각 자료 및 모델 roughness에 대한 가중치(weight), $\mathbf{L}$은 모델 roughness를 정량화하기 위한 Laplacian (2차 미분) 연산자, 그리고 마지막 항은 정적효과가 평균이 0인 정규분포를 따른다고 가정한 것에 해당된다(Ogawa and Uchida, 1996). 또 λ 및 κ는 Lagrange 곱수, ε는 정수이다.

(3)식을 최소화하는 것은 다음의 연립 정규방정식(normal equation)

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_d^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_d\mathbf{J} + \lambda(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_m\mathbf{L} + \varepsilon\mathbf{I})]\,\Delta\mathbf{m} \\
&\qquad = \mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_d^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_d\Delta\mathbf{d} - \lambda\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_m\mathbf{L}\mathbf{m}^{(k)}, \\
&(\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_d^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_d\mathbf{H} + \kappa\mathbf{I})\mathbf{s} = \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_d^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_d\Delta\mathbf{d},
\end{aligned} \tag{4}$$

또는 다음의 관측방정식(observation equation)의 최소자승해를 구하는 것과 동일하다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_d\mathbf{J} & \mathbf{W}_d\mathbf{H} \\ \sqrt{\lambda}\mathbf{W}_m\mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \sqrt{\lambda\varepsilon}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{\kappa}\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{m} \\ \mathbf{s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_d\Delta\mathbf{d} \\ -\sqrt{\lambda}\mathbf{W}_m\mathbf{L}\mathbf{m}^{(k)} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \tag{5}$$

일반적으로 관측방정식이 정규방정식보다 수치적으로 안정된 최소자승해를 줄 수 있으며(Scales *et al.*, 1988), 이 관측방정식은 개량 Gram-Schmidt법이나 특이치분해(singular value decomposition)법으로 풀 수 있다. 그리고 (4)식이나 (5)식을 풀기 위해서는 적절한 Lagrange 곱수를 선택해야 하며, 이는 일반적으로 시행착오 과정을 통해 구해진다(Constable *et al.*, 1987; Uchida, 1993). 적절한 Lagrange 곱수가 구해지면 많은 물리탐사문제에 대해 적은 수의 반복으로 안정된 역산해가 얻어지는 것으로 알려져 있다.

전자기장의 편미분

3차원 역산문제처럼 자료수보다 미지수가 많은 경우, 전자기장의 편미분(Jacobian)은 수반방정식(adjoint equation) 혹은 그린함수(Green's function)를 포함하는 전자기장의 적분방정식으로부터 유도할 수 있다(Weidelt, 1975; McGillivary *et al.*, 1994). 3차원구조 내의 영역 V의 전기전도도가 $\delta\sigma$만큼 변화했을 때 수신점 $\mathbf{r}$에서 전체 전기장(total electric field) $\mathbf{E}_t$는 다음의 적분방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \int_V \mathbf{G}_E(\mathbf{r},\mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}_t(\mathbf{r}')\delta\sigma(\mathbf{r}')dv'. \tag{6}$$

여기서 $\mathbf{E}$는 전기전도도가 변화하기 이전의(배경) 매질에 대한 전기장이며, $\mathbf{G}_E(\mathbf{r},\mathbf{r}')$는 전기장에 대한 텐서 그린함수로서 배경매질 내 점 $\mathbf{r}'$에 단위 세기의 전기쌍극자 (electric dipole)가 존재할 때 수신점 $\mathbf{r}$에서의 전기장을 나타낸다. 전기전도도 변화에 따른 전기장의 변화를 $\delta\mathbf{E}$라고 하면 (6)식은

$$\delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V \mathbf{G}_E(\mathbf{r},\mathbf{r}') \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{r}') + \delta\mathbf{E}(\mathbf{r}')]\delta\sigma(\mathbf{r}')dv', \tag{7}$$

와 같이 쓸 수 있는데 전기전도도의 변화가 작다면 $\mathbf{E} >> \delta\mathbf{E}$

이므로 (7)식은 Born 근사에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \int_V \mathbf{G}_E(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}')\delta\sigma(\mathbf{r}')dv'. \quad (8)$$

마찬가지로 자기장의 변화는

$$\delta\mathbf{H}(\mathbf{r}) \approx \int_V \mathbf{G}_H(\mathbf{r},\mathbf{r}')\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}')\delta\sigma(\mathbf{r}')dv', \quad (9)$$

이다. 여기서 $\mathbf{G}_H$는 자기장에 대한 그린함수로서 단위 전기쌍극자에 의한 자기장에 해당되며, 전기장 그린함수와의 관계는

$$\mathbf{G}_H(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{\nabla\times\mathbf{G}_E(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{i\omega\mu}, \quad (10)$$

이다. 여기서 $i=\sqrt{-1}$, ω는 각주파수, μ는 투자율이다.

(8)식의 의미를 알아보기 위하여 x 성분에 대해 구체적으로 쓰면

$$\delta E_x(\mathbf{r}) = \int_V [G_{xx}(\mathbf{r},\mathbf{r}')E_x(\mathbf{r}')+G_{xy}(\mathbf{r},\mathbf{r}')E_y(\mathbf{r}') + G_{xz}(\mathbf{r},\mathbf{r}')E_z(\mathbf{r}')]\delta\sigma(\mathbf{r}')dv', \quad (11)$$

이다. 식에서 첨자 E는 생략하였으며, G_{xy}는 점 $\mathbf{r}'$에 존재하는 y방향 전기쌍극자(J_y)에 의한 수신점 $\mathbf{r}$에서의 x성분 전기장을 나타낸다. 그런데 이는 그린함수에 관한 상반성(reciprocity)

$$G_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G_{ji}(\mathbf{r}',\mathbf{r}), \quad (i, j = x, y, z) \quad (12)$$

을 고려하면 수신점 $\mathbf{r}$에 놓인 x 방향 전기쌍극자(J_x)에 의한 점 $\mathbf{r}'$에서의 전기장 y 성분이라고 생각할 수 있다. 따라서 (11)식은

$$\delta E_x(\mathbf{r}) = \int_V \mathbf{E}_{J_x}(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}')\delta\sigma(\mathbf{r}')dv', \quad (13)$$

라고 고쳐 쓸 수 있으며, 결국 영역 V의 전기전도도 σ에 대한 x 성분 전기장의 편미분은

$$\frac{\partial E_x}{\partial\sigma} = \int_V \mathbf{E}_{J_x}(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}')dv', \quad (14)$$

로 표현할 수 있다. 마찬가지로 자기장에 대한 편미분은 (10)식을 참조하면

$$\frac{\partial H_x}{\partial\sigma} = -\frac{1}{i\omega\mu}\int_V \mathbf{E}_{M_x}(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}')dv', \quad (15)$$

이다. 여기서 첨자 M_x는 x 방향 자기쌍극자를 나타낸다(앞의 (9)식에서 자기쌍극자가 아닌 전기쌍극자인 이유는 자기장 그린 텐서와 자기쌍극자에 의한 전기장 그린 텐서가 서로 상반성을 만족하기 때문이며, 이들은 모두 (10)식과 같이 전기장 그린 텐서에 curl을 취한 형태이다). 이렇게 수신점에서의 전기장 또는 자기장에 대한 편미분은 수신점에 놓인 가상적인 전기 또는 자기쌍극자에 의한 영역 내의 전기장과 실제 전기장의 내적을 그 영역에 대해 체적적분함으로써 구해진다. 전자기장의 편미분으로부터 표면 임피던스나 겉보기비저항의 편미분은 쉽게 유도된다(부록 A 참조).

이러한 편미분 계산방법은 대단히 효율적이며 많은 역산문제에 실제로 적용되고 있다. 그러나 모델링에서 주로 반복법(iterative solver)을 사용하는 MT의 3차원문제에서는 상황이 다르다. Jacobian 행렬을 구하는데 필요한 모델링 회수 N_{fwd}는 다음과 같다.

$$N_{fwd} = N_{src}\cdot N_{pol}\cdot N_{site}\cdot N_{freq}. \quad (16)$$

여기서 N_{src}는 가상 전자기원의 수, $N_{pol}(=2)$은 분극의 수, N_{site}는 관측점의 수 그리고 N_{freq}는 주파수의 수이다. N_{src}는 2차원의 경우(분극 당) 1이지만 3차원의 경우 4(J_x, J_y, M_x 및 M_y)이다. 그리고 2차원의 경우 모델링에서 보통 직접법(direct solver)을 사용한다. 이 경우 모델링 단계에서 이미 LU 분해가 끝난 상태이므로 관측점에 가상적 유한 전자기원을 설정하는 문제는 후퇴대입(back-substitution) 만으로 해결된다. 이 후퇴대입에 필요한 시간은 모델링 한번의 20% 정도이므로 결국

$$N_{fwd} = \begin{cases} 8N_{site}\cdot N_{freq}, & \text{for 3-D,} \\ 0.4N_{site}\cdot N_{freq}, & \text{for 2-D,} \end{cases} \quad (17)$$

이다. 즉 Jacobian 행렬을 구하는데 필요한 모델링 회수는 3차원의 경우가 2차원에 비해 20배(만일 2차원에서 TE mode와 TM mode의 결합역산을 하지 않는다면 $N_{pol}=1$이기 때문에 40배) 많다. 이렇게 MT의 3차원문제에서 각 반복단계마다 정확한 Jacobian 행렬을 구하는 것은 현실적으로 불가능에 가깝다. 그래서 Uchida *et al.*(2001)이나 Uchida and Sasaki(2003)는 편미분을 균질대지에 대한 그것으로 대치하거나 아니면 역산과정에서 한번만 정확하게 구하고 BFGS(Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno)법 (Press *et al.*, 1992)으로 갱신하는 방법을 사용하였다.

CG법

Jacobian 행렬의 막대한 계산을 회피하면서 Jacobian에는 어떠한 근사도 가하지 않는, CG법을 이용한 획기적인 역산법이 Mackie and Madden(1993)에 의해 처음으로 발표되었다. MT 자료의 3차원 역산문제에 CG법이 적용되는 경우는 두 가지가 있다. 하나는 선형 CG법이라 하여 정규방정식을 풀 때 사용하는 경우이며(Mackie and Madden, 1993; Farquharson *et al.*, 2002), 다른 하나는 비선형 CG(NLCG)법이라 하여 역산의 목적함수를 직접 최소화하는데 사용되는 경우이다(Newman and Alumbauch, 2000; Mackie *et al.*, 2001). 다만 CG법으로 (3)식이나 (4)식에서 볼 수 있는 정적효과를 포함한 예는 아직 발표된 바 없다.

역산문제의 정규방정식에 나오는 행렬은 positive-definite의

대칭 행렬이기 때문에 반복적 해법인 CG법으로 풀 수 있다. 이 때 CG법을 쓰는 이유는 Jacobian 행렬 $\mathbf{J}$ 자체가 필요한 것이 아니라 $\mathbf{J}$나 $\mathbf{J}^T$에 어떤 벡터 $\mathbf{v}$가 곱해진 $\mathbf{J}\cdot\mathbf{v}$ 및 $\mathbf{J}^T\cdot\mathbf{v}$만이 필요하기 때문이다. 여기서 T는 행렬의 전치(transpose)를 나타낸다. $\mathbf{J}\cdot\mathbf{v}$ 및 $\mathbf{J}^T\cdot\mathbf{v}$의 계산은 부록 B에서 볼 수 있듯이 한 주파수 당 단지 두 번 정도의 모델링으로 구할 수 있을 뿐만 아니라 이들은 행렬이 아니라 벡터이므로 메모리 또한 대폭 절약할 수 있다.

CG 역산에서는 정규방정식을 정확하게 풀기 위해 수렴할 때까지 반복하여 모델의 수정벡터 $\Delta\mathbf{m}$를 구하는 것은 시간 낭비일 뿐만 아니라 그럴 필요도 없다. 왜냐하면 비선형 역산에서는 어차피 많은 반복개량을 필요로 하고 그 개량에는 어느 정도만 정확한 수정벡터가 있으면 되기 때문이다. Mackie and Madden(1993)은 CG법으로 5번만 반복하는 예를 보여주었다.

CG법은 함수의 최소화에도 사용된다. 함수의 경사(gradient) 정보만을 사용하는 최소화기법으로 가장 단순한 것으로는 최대경사법(steepest descent)이 있지만, 이는 함수의 최소 부근에서 수렴이 대단히 느린 것으로 알려져 있다(Press *et al.*, 1992). CG법은 보다 양호한 수렴성을 가지며 모델 변수의 수정을 함수의 경사와 이전의 탐색방향을 이용하여 다음과 같이 결정하게 된다.

$$\mathbf{m}^{(k+1)} = \mathbf{m}^{(k)} + \alpha^{(k)}\mathbf{p}^{(k)}. \tag{18}$$

여기서 k는 반복회수, α는 수정의 스텝 크기(step size),

$$\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{C}^{(k)}\mathbf{g}^{(k)} + \beta^{(k)}\mathbf{p}^{(k-1)}, \tag{19}$$

는 탐색방향, $\mathbf{C}$는 뒤에서 설명할 preconditioner, $\mathbf{g}$는 함수의 경사를 나타낸다. 변수 β는 예를 들면 Polak-Ribiere법(Press *et al.*, 1992)에 의해

$$\beta^{(k)} = \frac{\langle \mathbf{g}^{(k)}, \mathbf{g}^{(k)} - \mathbf{g}^{(k-1)} \rangle}{\langle \mathbf{g}^{(k-1)}, \mathbf{g}^{(k-1)} \rangle}, \tag{20}$$

와 같이 구해진다. 그리고 스텝 크기 α는 보통 그 반복단계에서 함수를 최소로 하는 값으로 선택한다.

NLCG법은 반복법이기 때문에 적절한 전처리(preconditioning)를 통해서 수렴을 가속화할 수 있다. Mackie *et al.*(2001)은 목적함수의 Hessian을 근사할 수 있도록 $\mathbf{C}^{(k)} = (\gamma^{(k)}\mathbf{I} + \lambda\mathbf{L}^T\mathbf{L})^{-1}$이라는 preconditioner를 제안하였다(그들의 목적함수는 (3)식보다 단순한 점에 주의). 여기서 $\gamma^{(k)}$는 어떤 상수이며 Hessian의 제 1항과 그 크기가 비슷하게 되도록 선택한다. 물론 계산 시에는 역행렬을 구하는 것이 아니라 $(\gamma^{(k)}\mathbf{I} + \lambda\mathbf{L}^T\mathbf{L})\mathbf{y} = \mathbf{g}$를 풀어서 $\mathbf{y}$를 (19)식의 제 1항에 대입한다. Newman and Alumbaugh(2000)는 preconditioner를 역산과정에서 고정하는 것 보다 갱신하는 것이 3차원의 경우 효과적이라고 하여 이를 BFGS법으로 갱신하는 방법을 제시하였다.

NLCG법에서는 Lagrange 곱수의 선택은 제한적이며, 한 번 선택한 곱수는 역산과정에서 고정된다. 이는 만일 이 곱수를 바꾸면 최소화해야 할 목적함수 자체가 바뀌기 때문이다. CG법은 함수의 최소화에서 경사 정보만을 사용하고 곡률(curvature)에 대한 정보는 직접적으로 사용하지 않으므로 보통 Gauss-Newton법에 비해 많은 반복을 필요로 한다. 그리고 상대적으로 탐색범위가 좁아 최소가 아니라 국부적인 극소(local minimum)에 빠질 가능성도 높아진다.

적분방정식

적분방정식을 이용하여 모델링(따라서 Jacobian 행렬도)을 근사적으로 실행하여 역산에 사용하는 일련의 연구가 주로 Utah대학에서 시도되고 있다(e.g., Zhdanov *et al.*, 2000a; Hursan and Zhdanov, 2001; Golubev *et al.*, 2002). 적분방정식법은 층서구조 내에 작은 불균질체가 존재하는 경우에는 비교적 짧은 시간에 정확한 수치해를 줄 수 있지만, 이산화해야 할 영역이 커지면 계산량은 기하급수적으로 늘어나 쉽게 한계에 이르게 된다. 이러한 단점을 극복하기 위해 그 동안 여러 가지 근사법이 개발되었으며, 대표적인 것으로는 확장 Born 근사 또는 국소 비선형 근사(Habashy *et al.*, 1993), QL 근사(Zhdanov and Fang, 1996), QA 근사(Zhdanov *et al.*, 2000b) 등이 있다. 이들은 모두 (6)식의 우변 제2항(2차 전기장) 내의 전기장을 1차 전기장의 변형으로 대치하기 때문에 대형행렬을 풀 필요가 없어져 계산시간이 대폭 줄어든다.

적분방정식은 역산에 유리한 면을 많이 가지고 있다. 우선 역산에 필요한 모델의 수정량 $\delta\sigma$는 같은 적분방정식인 (6)식에 나와 있기 때문에 Jacobian 행렬이 바로 유도될 수 있다. 다음으로 그린함수 및 이의 체적적분은 역산과 무관하게 배경 전기전도도 σ에 대해 구해지기 때문에 미리 계산하여 저장해 놓으면 역산과정 내내 사용할 수 있다. 문제는 적분내의 전기장을 어떻게 근사할 것이냐 그리고 역산의 안정성을 위해 어떤 제약을 가할 것이냐 하는 점이다. 한 예로 Golubev *et al.* (2002)는 모델링에는 QA근사를, 역산에는 NLCG법을 사용하는 방법을 제시하였다.

마지막으로

MT 자료의 3차원 역산을 실용화하는데 있어서 가장 중요한 과제는 정확한 Jacobian 행렬을 구하는데 필요한 그 막대한 계산량과 메모리를 어떻게 실제적인 규모로 줄이느냐는 것이다. NLCG법은 Jacobian 행렬에 어떠한 근사도 가하지 않으면서 모델의 반복 개량에 필요한 수정벡터를 단 세 번(모델링을 평면파원에 대해 한번 가상 전자기 송신원에 대해 두 번) 정도의 계산량으로 구할 수 있다는 점에서 대단히 매력적인 방법이다. 그러나 Lagrange 곱수의 선택이 제한적이며, Gauss-Newton법에 비해 보통 더 많은 반복을 필요로 한다는 단점이

있다. 한편, 물리탐사의 역산에 가장 많이 사용되는 비선형 최소자승법의 경우 Jacobian 행렬에 대한 좋은 근사를 어떻게 찾을 것인지가 관건이지만 아직은 만족스럽지 못하다. 그 밖에 적분방정식을 이용하여 모델링(따라서 Jacobian 행렬도)을 근사적으로 실행하는 일련의 연구도 보고되고 있으며 여기서는 간단히 소개하였다.

사 사

이 연구의 일부는 2004년도 한국지질자원연구원의 일반사업 심부지열에너지 개발사업의 연구비 및 한국과학재단의 연구비(R05-2004-000-12529-0) 지원으로 수행되었다.

참고문헌

송윤호, 이태종, 이성곤, Uchida, T., Mitsuhata, Y., and Graham, G. B., 2004, 포항지역 지열개발을 위한 3차원 MT탐사, 대한지구물리학회 · 한국물리탐사학회 공동 학술발표회.

Constable, S. C., Parker, R. L., and Constable, C. G., 1987, Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data, *Geophysics*, **52**, 289-300.

deGroot-Hedlin, C., 1991, Removal of static shift in two dimensions by regularized inversion, *Geophysics*, **56**, 2102-2106.

Farquharson, C. G., Oldenburg, D. W., and Haber, E., 2002, An algorithm for the three-dimensional inversion of magnetotelluric data, *Expanded Abstract, 72nd Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys.*, 649-652.

Golubev, N., Zhdanov, M. S., and Chernobay, B., 2002, Three-dimensional inversion of array magnetotelluric data based on quasi-analytical approximation, *Expanded Abstract, 72nd Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys.*, 637-640.

Habashy, T. M., Groom, R. W., and Spies, B., 1993, Beyond the Born and Rytov approximation: A nonlinear approach to electromagnetic scattering, *J. Geophys. Res.*, **98**, 1759-1775.

Hursan, G., and Zhdanov, M. S., 2001, Rapid 3-D magnetotelluric and CSAMT inversion, *Expanded Abstract, 71st Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys.*, 1493-1496.

Lee, T. J., Uchida, T., Sasaki, Y., and Song, Y., 2003, Characteristics of static shift in 3-D MT inversion, *Mulli-Tamsa*, **6**, 199-206.

Mackie, R. L., Rodi, W., and Watts, M. D., 2001, 3-D magnetotelluric inversion for resource exploration, *Expanded Abstract, 71st Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys.*, 1501-1504.

Mackie, R. L., and Madden, T. R., 1993, Three-dimensional magnetotelluric inversion using conjugate gradients, *Geophys. J. Int.*, **115**, 215-229.

McGillivary, P. R., Oldenburg, D. W., Ellis, R. G., and Habashy, T. M., 1994, Calculation of sensitivities for the frequency domain electromagnetic problem, *Geophys. J. Int.*, **116**, 1-4.

Newman, G. A., and Alumbaugh, D. L., 2000, Three-dimensional magnetotelluric inversion using non-linear conjugate gradients, *Geophys. J. Int.*, **140**, 410-424.

Ogawa, Y., and Uchida, T., 1996, A two-dimensional magnetotelluric inversion assuming Gaussian static shift, *Geophys. J. Int.*, **126**, 69-76.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P., 1992, *Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing*, Cambridge Univ. Press.

Sasaki, Y., 2001, Three-dimensional inversion of static-shifted magnetotelluric data, *Proc. 5th SEGJ Int. Symp.*, 185-190.

Scales, J. A., Gersztenkorn, A., and Treitel, S., 1988, Fast lp solution of large, sparse, linear systems: application to seismic travel time tomography, *J. Comput. Phys.*, **75**, 314-333.

Uchida, T., 1993, Smooth 2-D inversion for magnetotelluric data based on statistical criterion ABIC, *J. Geomag. Geoelect.*, **45**, 841-858.

Uchida, T., Lee, T. J., Sasaki, Y., Honda, M., Andan, A., and Andan, A., 2001, Three-dimensional inversion of magnetotelluric data at the Bajawa geothermal field, eastern Indonesia, *Expanded Abstract, 71st Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys.*, 1497-1500.

Uchida, T., and Sasaki, Y., 2003, Stable 3-D inversion of MT data and its application to geothermal exploration: in Macnae, J. and Liu, G., eds., "Three-Dimensional Electromagnetics III", ASEG, Paper 12, 1-10.

Weidelt, P., 1975, Inversion of two-dimensional conductivity structures, *Phys. Earth Planet Inter.*, **10**, 282-291.

Yamane, K., Kim, H. J., and Ashida, Y., 2000, Three-dimensional magnetotelluric inversion using a generalized RRI method and its application, *Butsuri-Tansa*, **53**, 234-244.

Zhdanov, M. S., and Fang, S., 1996, Quasi-linear approximation in 3-D electromagnetic modeling, *Geophysics*, **61**, 646-665.

Zhdanov, M. S., Fang, S., and Hursan, G., 2000a, Electromagnetic inversion using quasi-linear approximation, *Geophysics*, **65**, 1501-1513.

Zhdanov, M. S., Dmitriev, V. I., Fang, S., and Hursan, G., 2000b, Quasi-analytic approximations and series in electromagnetic modeling, *Geophysics*, **65**, 1746-1757.

부록 A. 표면 임피던스와 겉보기비저항의 편미분

평면파 가정하에서는 지표면에서 전자기장의 각 성분 사이에는 다음의 선형관계가 성립한다.

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix}. \tag{A1}$$

여기서 $Z_{ij}(i, j = x, \text{ or } y)$는 임피던스 텐서의 각 성분이다. 편파(분극) 방향이 서로 다른 두 조의 전자기장 성분을 아래 첨자 1과 2로 구별하면 최소자승 개념에 의해 유도되는 임피던스 텐서의 비대각(off-diagonal) 성분은 다음과 같다.

$$Z_{xy} = (E_{x2}H_{x1} - E_{x1}H_{x2})/D, \quad (A2)$$
$$Z_{yx} = (E_{y1}H_{y2} - E_{y2}H_{y1})/D. \quad (A3)$$

여기서

$$D = H_{x1}H_{y2} - H_{x2}H_{y1}, \quad (A4)$$

이다. 이들 성분은 다음의 식에 의해 겉보기비저항과 위상으로 변환된다.

$$\rho_{ij} = |Z_{ij}|^2/\mu\omega, \quad (A5)$$
$$\phi = \tan^{-1}[\mathrm{Im}(Z_{ij})/\mathrm{Re}(Z_{ij})]. \quad (A6)$$

전기전도도 σ에 대한 Z_{xy}와 Z_{yx}의 편미분은 다음과 같다.

$$\frac{\partial Z_{xy}}{\partial\sigma} = \frac{1}{D}\left(E_{x2}\frac{\partial H_{x1}}{\partial\sigma} + H_{x1}\frac{\partial E_{x2}}{\partial\sigma} - E_{x1}\frac{\partial H_{x2}}{\partial\sigma} - H_{x2}\frac{\partial E_{x1}}{\partial\sigma} - Z_{xy}C\right), \quad (A7)$$
$$\frac{\partial Z_{yx}}{\partial\sigma} = \frac{1}{D}\left(E_{y1}\frac{\partial H_{y2}}{\partial\sigma} + H_{y2}\frac{\partial E_{y1}}{\partial\sigma} - E_{y2}\frac{\partial H_{y1}}{\partial\sigma} - H_{y1}\frac{\partial E_{y2}}{\partial\sigma} - Z_{yx}C\right). \quad (A8)$$

여기서

$$C = H_{x1}\frac{\partial H_{y2}}{\partial\sigma} + H_{y2}\frac{\partial H_{x1}}{\partial\sigma} - H_{x2}\frac{\partial H_{y1}}{\partial\sigma} - H_{y1}\frac{\partial H_{x2}}{\partial\sigma}, \quad (A9)$$

이다. 그리고 겉보기비저항과 위상의 편미분은

$$\frac{\partial\rho_{ij}}{\partial\sigma} = \frac{2}{\omega\mu}\mathrm{Re}\left(\frac{\partial Z_{ij}}{\partial\sigma}Z_{ij}^*\right), \quad (A10)$$
$$\frac{\partial\phi_{ij}}{\partial\sigma} = \frac{\cos^2\phi_{ij}}{\mathrm{Re}(Z_{ij})}\left[\mathrm{Im}\left(\frac{\partial Z_{ij}}{\partial\sigma}\right) - \tan\phi_{ij}\mathrm{Re}\left(\frac{\partial Z_{ij}}{\partial\sigma}\right)\right], \quad (A11)$$

이며, *는 복소 conjugate를 나타낸다.

부록 B. J·v 및 $\mathbf{J}^T$·v의 계산

Jacobian 행렬 $\mathbf{J}$ 또는 $\mathbf{J}^T$와 어떤 벡터 $\mathbf{v}$와의 곱은 쉽게 유도된다. 편의상 모델링과정을 다음과 같이 정의하자.

$$\mathbf{A(m)\cdot x(m) = b}. \quad (B\text{-}1)$$

여기서 $\mathbf{A}$는 모델링의 계수행렬, $\mathbf{x}$는 구해야 할 전자기장 벡터, $\mathbf{b}$는 소스 벡터이다. 이러한 표현을 쓰면 자료 벡터 $\mathbf{d}$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{d = Qx(m)}. \quad (B\text{-}2)$$

여기서 $\mathbf{Q}$는 계산된 전자기장을 임피던스 자료로 변환해주는 사상행렬(projection matrix)이며, 모델 $\mathbf{m}$과는 무관하다. (B-1) 식을 모델 $\mathbf{m}$로 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial[\mathbf{A(m)x(m)}]}{\partial\mathbf{m}} = \mathbf{B(m,x)} + \mathbf{A(m)}\frac{\partial\mathbf{x(m)}}{\partial\mathbf{m}} = \mathbf{0}. \quad (B\text{-}3)$$

여기서

$$\mathbf{B(m,x)} = \frac{\partial\mathbf{A(m)}}{\partial\mathbf{m}}\mathbf{x(m)}, \quad (B\text{-}4)$$

이다. 따라서 $\mathbf{J}$는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{J} = \frac{\partial\mathbf{d}}{\partial\mathbf{m}} = \frac{\partial[\mathbf{Qx(m)}]}{\partial\mathbf{m}} = \mathbf{Q}\frac{\partial\mathbf{x(m)}}{\partial\mathbf{m}} = -\mathbf{QA}^{-1}\mathbf{(m)B(m,x)}. \quad (B\text{-}5)$$

먼저 $\mathbf{J\cdot v}$부터 생각한다.

$$\begin{aligned}\mathbf{J\cdot v} &= -\mathbf{QA}^{-1}\mathbf{(m)B(m,x)v} \\ &= -\mathbf{QA}^{-1}\mathbf{(m)q}_1 \qquad [\mathbf{q}_1 = \mathbf{B(m,x)v}] \\ &= -\mathbf{Qw}_1 \qquad [\mathbf{A(m)w}_1 = \mathbf{q}_1].\end{aligned} \quad (B\text{-}6)$$

즉 $\mathbf{J\cdot v}$는 $\mathbf{q}_1$을 소스항으로 한 모델링을 통해서 $\mathbf{w}_1$을 구하고 $-\mathbf{Q}$를 곱하면 얻어진다. 다음은 $\mathbf{J}^T\mathbf{\cdot v}$를 유도한다.

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^T\mathbf{\cdot v} &= -[\mathbf{QA}^{-1}\mathbf{(m)B(m,x)}]^T\mathbf{v} \\ &= -\mathbf{B}^T\mathbf{(m,x)A}^{-T}\mathbf{(m)Q}^T\mathbf{v} \\ &= -\mathbf{B}^T\mathbf{(m,x)A}^{-T}\mathbf{(m)q}_2 \qquad [\mathbf{q}_2 = \mathbf{Q}^T\mathbf{v}] \\ &= -\mathbf{B}^T\mathbf{(m,x)w}_2 \qquad [\mathbf{A}^T\mathbf{(m)w}_2 = \mathbf{q}_2].\end{aligned} \quad (B\text{-}7)$$

즉 $\mathbf{J}^T\mathbf{\cdot v}$는 $\mathbf{A}^T\mathbf{(m)}$을 계수행렬로, $\mathbf{q}_2$를 소스항으로 한 모델링을 통해서 $\mathbf{w}_2$를 구하고 $-\mathbf{B}^T\mathbf{(m,x)}$를 곱하면 얻어진다. 따라서 $\mathbf{J\cdot v}$ 및 $\mathbf{J}^T\mathbf{\cdot v}$의 계산량은 대략 모델링 두 번 정도에 불과하다.