

## MT 법의 3차원 모델링 개관

김희준<sup>1)</sup> · 남명진<sup>2)</sup> · 송윤호<sup>3)</sup> · 서정희<sup>2)</sup>

### Review on the Three-Dimensional Magnetotelluric Modeling

Hee Joon Kim<sup>1)</sup>, Myung Jin Nam<sup>2)</sup>, Yoonho Song<sup>3)</sup> and Jung Hee Suh<sup>2)</sup>

**요약** : 자기지전류(MT)법의 3차원 모델링에 대해 소개한다. 3차원 MT 모델링은 MT 반응의 물리적 특성의 이해뿐만 아니라 지하의 3차원적 전기비저항 구조를 재구성하기 위한 역산법의 개발에도 필수적이다. 지난 20년 동안 3차원 모델링에 관한 여러 수치기법들이 개발되었으나 그 실용성에는 많은 한계가 있었다. 그러나 최근에는 컴퓨터의 급속한 발전과 대형 연립방정식에 대한 반복해법의 발전에 힘입어 이전에는 어려웠던 복잡한 3차원 구조에 대한 MT 반응을 효율적으로 모델링할 수 있게 되었다. 유한차분법에서는 자기 flux와 전류의 보존법칙을 만족하면서 전기장의 불연속을 표현할 수 있는 staggered 격자의 사용이 보편화되었다. 대형 연립방정식에 대한 수치해의 수렴성은 Krylov 부분공간법, 적당한 전처리 기술 및 정적 발산보정법을 채택함으로써 크게 향상된다. 변요소를 사용하는 벡터 유한요소법으로도 전기장의 불연속 문제를 해결할 수 있으며, 이 방법이 가진 기하학적 유연성은 불규칙한 지표기복을 포함한 복잡한 구조를 모델링할 때 특히 유용하다.

**주요어** : 3차원, MT, 모델링, staggered 격자, 변요소

**Abstract** : This article reviews the development of three-dimensional (3-D) magnetotelluric (MT) modeling. The 3-D modeling of electromagnetic fields is essential in understanding the physics of MT soundings, and in implementing an inversion method to reconstruct a 3-D resistivity image. Although various numerical schemes have been developed over the last two decades, practical methods have been quite limited. However, the recent rapid improvement in computer speed and memory, as well as the advance in iterative solution algorithms for a large system of equations, makes it possible to model the MT responses of complex 3-D structures, which have been very difficult to simulate before. The use of staggered grids in finite difference method has become popular, conserving a magnetic flux and an electric current and allowing for realistic discontinuous fields. The convergence of numerical solutions has been greatly accelerated by adopting Krylov subspace methods, proper preconditioning techniques, and static divergence corrections. The vector finite-element method using edge elements is also free from the discontinuity problem, and seems a natural choice for modeling complex structures including irregular topography because its flexibility allows one to capture full geometric complexity.

**Keywords** : three-dimensional, magnetotelluric, modeling, staggered grid, edge element

## 서론

자기지전류(magnetotelluric; MT) 탐사법의 신뢰성을 높이기 위해서는 지하의 전기비저항 분포를 3차원적으로 고려하여 해석할 필요가 있다. 이러한 3차원 해석의 기초가 되는 3차원 모델링에 대한 연구는 70년대부터 이루어졌으며, 그 결과 여러 가지 수치 모델링 기법이 개발되었다. 잘 알려진 것으로는 적분방정식법(integral equation method, IEM), 유한차분법(finite difference method, FDM), 유한요소법(finite-element method, FEM), 하이브리드(hybrid)법 등이 있다.

IEM은 일반적으로 수치해의 정확도가 가장 높고 계산시간

도 비교적 짧은 것으로 알려져 있다. 그러나 계산할 수 있는 모델이 층서구조 내에 작은 불균질체가 존재하는 경우와 같이 단순한 모델에만 한정되고(Wannamaker, 1991), 복잡한 구조를 가진 모델에는 적합하지 않다. IEM과 FEM을 혼합한 방법인 하이브리드법(Lee *et al.*, 1981) 또한 IEM과 마찬가지로 복잡한 구조의 모델링에는 적합하지 않다. 한편 FDM과 FEM은 편미분방정식에 기초를 둔 방법으로 모델 전체를 이산화하기 때문에 복잡한 구조의 모델링에 유리하다. 비록 과거에는 계산시간이 많이 걸린다는 제약이 있었으나, 최근에는 컴퓨터의 비약적 성능향상에 힘입어 이들 방법을 이용한 실용적인 3차원 모델링 기법들이 개발되고 있다. 또한 이들 모델링을 이용한 역산

\*2004년 3월 31일 접수

1) 부경대학교 환경탐사공학과(Department of Environmental Exploration Engineering, Pukyong National University)  
2) 서울대학교 지구환경시스템공학부(School of Urban, Civil & Geosystem Engineering, Seoul National University)  
3) 한국지질자원연구원(Korea Institute of Geoscience and Mineral Resources)

해석에 대한 연구도 많이 진행되고 있다.

FEM은 복잡한 모양이나 경계를 비교적 손쉽게 다룰 수 있기 때문에 전과공학을 포함한 많은 분야에서 편리한 모델링 기술로 사용되고 있다. 그러나 대지와 같은 전도성 매질을 대상으로 하는 경우에는 전기장의 연속성을 가정해야 할 문제점이 예부터 지적되어 왔다(Reddy *et al.*, 1977; Pridmore *et al.*, 1981). 전기전도도가 서로 다른 매질의 경계에서 전류밀도의 수직성분은 연속하여야 하며, 이로 인해 전기장의 수직성분은 경계면에서 불연속하게 변화하게 된다. 요소의 절점에 전기장의 3성분을 할당하는 보통의 FEM에서는 전기장의 각 성분은 경계면에서 연속이 되어 앞서 말한 내부경계조건을 만족하지 못하게 된다. 이러한 전기장의 불연속 문제를 해결하는 방법으로서 변요소(edge element)를 이용하는 방법이 제안되었다(edge-element or vector FE method, EFE). 이는 요소의 모서리에 전기장의 각 성분을 할당하는 것으로 경계면에서 전기장 수직성분의 불연속을 구현할 수 있다는 장점이 있다. 전과공학에서는 EFE에 대한 연구가 많이 있었으나 물리탐사분야에서는 최근에야 적용하기 시작했다(Sugeng *et al.*, 1999; 손정술 등, 2002).

FDM에서는 staggered 격자망(Yee, 1966)을 채택하여(staggered-grid FD method, SFD) 전기장의 불연속 문제를 해결할 수 있다. Wang and Hohmann(1993), Mackie *et al.*(1994), Druskin and Knizhnerman(1994), Smith(1996) 등은 모두 이러한 SFD를 이용하여 IEM과 거의 비슷한 정확도를 가진 수치해를 구하였다. 그러나 SFD의 경우 지표기록을 표현하는데 어려움이 예상된다.

여기서는 EFE와 SFD를 중심으로 MT법의 3차원 모델링에 대해 소개한다. 이들 방법은 전기전도도가 서로 다른 경계면에서의 전기장 불연속 문제를 해결할 수 있다. 그리고 Krylov 부분공간(subspace)법, 적절한 전처리(pre-conditioning)기법, 발산보정(static divergence correction) 등을 통해 수치해의 수렴성은 크게 향상될 수 있다.

### 기초방정식

시간 의존성을  $\exp(i\omega t)$ 라 하고 변위전류를 무시할 수 있을 때 주파수영역에서 Maxwell의 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathbf{H}, \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}_s, \tag{2}$$

여기서  $\mathbf{E}$ 는 전기장,  $\mathbf{H}$ 는 자기장,  $\mathbf{J}_s$ 는 전류원의 전류밀도,  $\omega$ 는 각주파수,  $\mu_0$ 는 진공에서의 투자율 ( $4\pi \times 10^{-7}$  H/m),  $\sigma$ 는 전기전도도이다. 평면파를 가정하는 MT법에서는 전류원을 생각할 필요가 없으므로  $\mathbf{J}_s=0$ 이다. 따라서 (1)식과 (2)식으로부터

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0\sigma\mathbf{E}, \tag{3}$$

$$\nabla \times (\sigma^{-1}\nabla \times \mathbf{H}) = -i\omega\mu_0\mathbf{H}, \tag{4}$$

를 얻을 수 있다. 그런데 전류원이 없을 때 (2)식에 발산을 취하면

$$\nabla \cdot \sigma\mathbf{E} = 0, \tag{5}$$

이 얻어지며 이는 어떤 주파수에서도 전류의 보존법칙이 성립함을 나타낸다. 특히 직류의 경우 전기장은 전기포텐셜  $\phi$ 를 써서  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ 로 나타낼 수 있으므로

$$\nabla \cdot (\sigma\nabla\phi) = 0, \tag{6}$$

이다.

만약 쌍극자원과 같은 인공전류원이 존재한다면 전류원 근처에서 전기장이 급격히 변화하므로 (3)식으로는 높은 정확도의 수치해를 구하기 힘들 것이다(특히 FDM에서). 전기장을 균질 반무한 공간에서의 1차장  $\mathbf{E}_p$ 와 불균질체에 의한 2차장  $\mathbf{E}_s$ 로 나누면

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s + i\omega\mu_0\sigma\mathbf{E}_s = -i\omega\mu_0(\sigma - \sigma_p)\mathbf{E}_p, \tag{7}$$

이다. 여기서  $\sigma_p$ 는 배경매질의 전기전도도이며  $\mathbf{E}_p$ 는 해석적으로 구해진다. (7)식은 전류원에서 특이점이 나타나지 않으며  $\mathbf{E}_s$ 는 그 근처에서 완만하게 변한다. 그리고 전기장  $\mathbf{E}$ 는  $\mathbf{E}_p$ 와  $\mathbf{E}_s$ 의 합으로 구해진다.

FEM이나 FDM에서는 (1)식과 (2)식을 기초로 전기장과 자기장을 동시에 구하는 경우는 드물고 대부분은 (3)식을 기초로 하고 있으나 Mackie *et al.*(1994)은 (4)식을 기초로 하였다. Siripunvaraporn *et al.*(2002)은 FDM에서 (3)식을 기초로 한 모델링이 (4)식에 기초할 때에 비해 격자간격이 충분치 않을 때, 보다 안정된 수치해를 준다고 하였는데, 이는 전기전도도가 변화하는 구간에서 (4)식 좌변에 포함된  $\nabla(1/\sigma)$ 이 수치적으로 불안하기 때문이다.

### 유한요소법

FEM에는 절점에 기초를 둔 보통의 방법(Mogi, 1996; Ratz, 1999)과 변요소를 사용하는 방법(Sugeng *et al.*, 1999; 손정술 등, 2002)이 있다. 이들에 대해 여기서는 직육면체요소를 사용한 경우에 대해 설명한다.

#### 절점 FEM

모델 전체를 8개의 절점으로 된 많은 직육면체요소로 분할하면 각 요소내의 전기장은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E_x = \sum_{i=1}^8 N_i E_{xi}. \tag{8}$$

여기서  $N_i$ 는 절점  $i$ 에서의 형상함수,  $E_{xi}$ 는 절점  $i$ 에서의 전기

장의  $x$ 성분을 나타낸다.  $y$  및  $z$ 성분에 대해서도 같은 형상함수를 써서 나타낼 수 있다. 형상함수  $N_i$ 는 좌표  $x, y, z$ 에 관한 함수이며, 보통 절점  $i$ 에서 1, 그 밖에 절점에서는 0이 되도록 선택된다. (8)식을 (3)식에 대입하고 Galerkin법으로 이산화하면, 예를 들어  $x$ 성분에 대해서는 다음과 같이 유도된다.

$$\sum_{i=1}^8 \left\{ \int_V \left[ \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} + i\omega\mu_0\sigma N_i N_i \right) E_{xi} - \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} E_{yi} - \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial x} E_{zi} \right] dV \right\} - \int_S N_j \left( \frac{\partial N_j}{\partial y} E_{xi} - \frac{\partial N_j}{\partial x} E_{yi} \right) dx dz - \int_S N_j \left( \frac{\partial N_j}{\partial z} E_{xi} - \frac{\partial N_j}{\partial x} E_{zi} \right) dx dy = 0, \quad j=1, 2, \dots, 8. \quad (9)$$

위 식의 면적분은 경계면 양측에 나오기 때문에 각 전기장 성분이 요소 경계에서 연속이라고 가정하면 서로 상쇄된다.  $y$  및  $z$ 성분에 대해서도 같은 요소방정식을 얻을 수 있다. 이들 요소방정식을 모두 모으면 연립방정식을 구성할 수 있다.

이러한 FEM에서는 한 절점에 전기장의 3성분을 할당하므로 인접한 요소간에서 전기장은 연속이다. 그러나 전기비저항의 경계에서는 전기장의 수직성분은 불연속이므로 경계면에서 물리적 모순이 생긴다. 이와 같이 수치계산으로는 정확하게 구해졌다 하더라도 물리적으로는 부적절한 해를 거짓해 (spurious solution)라 한다.

**EFE**

변요소는 거짓해가 생기지 않는 것으로 제안되었다(Nedelec, 1980). Fig. 1과 같이 직육면체요소의 모서리 1-5, 3-7, 2-6, 4-8에 전기장의  $x$ 성분, 1-3, 5-7, 2-4, 6-8에  $y$ 성분 그리고 1-2, 3-4, 5-6, 7-8에  $z$ 성분을 정의하고 각 성분은 해당 모서리에서 일정하다고 가정한다. 전기장  $x$ 성분을  $E_1 \sim E_4$ ,  $y$ 성분을  $E_5 \sim E_8$ , 그리고  $z$ 성분을  $E_9 \sim E_{12}$ 로 나타내면 요소 내에서 전기장의 근사해는 앞의 형상함수를 써서

$$\begin{aligned} E_x &= M_1 E_1 + M_2 E_2 + M_3 E_3 + M_4 E_4, \\ E_y &= M_5 E_5 + M_6 E_6 + M_7 E_7 + M_8 E_8, \\ E_z &= M_9 E_9 + M_{10} E_{10} + M_{11} E_{11} + M_{12} E_{12}, \end{aligned} \quad (10)$$

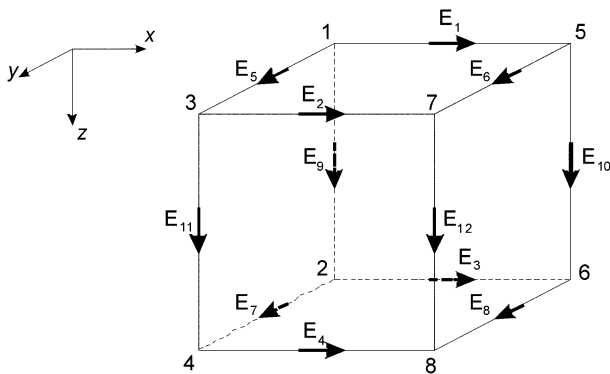


Fig. 1. An edge element.

라고 나타낼 수 있다. 여기서  $M_1=N_1+N_3, M_2=N_5+N_7, M_3=N_2+N_4, M_4=N_6+N_8, M_5=N_1+N_5, M_6=N_3+N_7, M_7=N_2+N_6, M_8=N_4+N_8, M_9=N_1+N_2, M_{10}=N_5+N_6, M_{11}=N_3+N_4$ , 그리고  $M_{12}=N_7+N_8$ 이다. 이렇게 모서리에 대해 정의된 전기장은 인접 요소 사이의 경계면에 접하고 있으므로 접선성분의 연속성은 만족하고 수직성분의 불연속은 허용된다. 또한 변요소의 경우에는  $\partial E_x / \partial x = \partial E_y / \partial y = \partial E_z / \partial z = 0$ 이기 때문에 요소 내에서는  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 가 성립한다는 특징이 있다.

(10)식을 (3)식에 대입하여 Galerkin법을 적용하면 전기장의  $x$ 성분에 관해

$$\sum_{i=1}^4 \int_V \left( \frac{\partial M_i}{\partial y} \frac{\partial M_i}{\partial y} + \frac{\partial M_i}{\partial z} \frac{\partial M_i}{\partial z} + i\omega\mu_0\sigma M_i M_i \right) E_i dV - \sum_{i=5}^8 \int_V \frac{\partial M_i}{\partial y} \frac{\partial M_i}{\partial x} E_i dV - \sum_{i=9}^{12} \int_V \frac{\partial M_i}{\partial z} \frac{\partial M_i}{\partial x} E_i dV = 0, \quad j=1, 2, 3, 4, \quad (11)$$

를 얻는다. 이 밖에도 EFE의 경우 형상함수의 정의에는 다양한 방법이 있다.

**SFD**

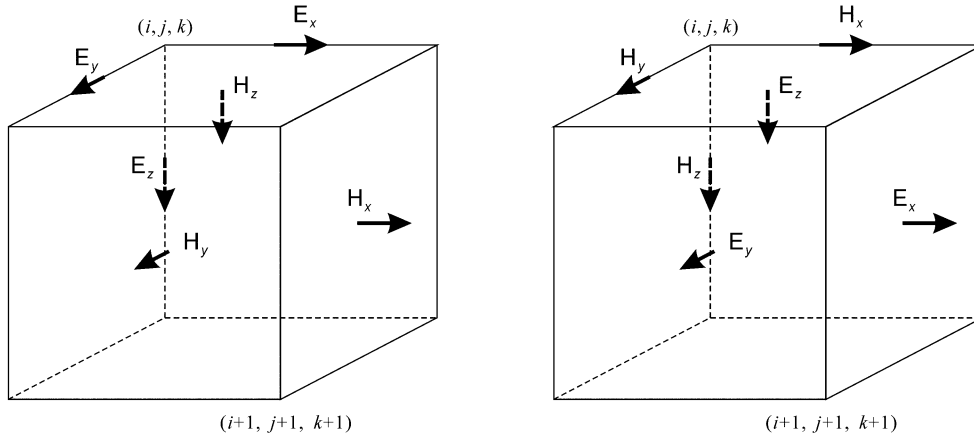
Staggered grid(Yee, 1966)에는 두 가지 형이 있다(Fig. 2). 제 1형은 전기장의 각 성분을 모서리에 자기장을 면에 할당하는 방법이고 제 2형은 전기장을 면에 자기장을 모서리에 할당하는 방법이다. 이 두 가지 형에 공통적으로 절점  $(i, j, k)$ 에서의 좌표를  $(x_i, y_j, z_k)$ 라 하고, 이 요소의 전기전도도를  $\sigma_{ijk}$ 라 하고 하자. 예를 들어  $x$ 방향과 평행한 모서리의 중심점을  $(i+1/2, j, k)$ , 그 좌표를  $(x_{i+1/2}, y_j, z_k)$ 라 하면, 그곳에서 제 1형은 전기장  $E_{x(i+1/2,j,k)}$ 가 그리고 제 2형에서는 자기장  $H_{x(i+1/2,j,k)}$ 가 정의된다.

제 1형에서는 요소의 경계에서 전기장의 접선성분이 정의되므로 연속조건이 자동적으로 만족된다. 예를 들어  $x$ 방향과 평행한 모서리에서의 전기전도도를 그 모서리 주변 4개 요소가 병렬로 접했을 때의 합성 전기전도도로 구하면 다음과 같다.

$$\bar{\sigma}_{i+1/2,j,k} = \frac{\sigma_{ijk} \Delta y_j \Delta z_k + \sigma_{i,j-1,k} \Delta y_{j-1} \Delta z_k + \sigma_{i,j,k-1} \Delta y_j \Delta z_{k-1} + \sigma_{i,j-1,k-1} \Delta y_{j-1} \Delta z_{k-1}}{(\Delta y_j + \Delta y_{j-1})(\Delta z_k + \Delta z_{k-1})} \quad (12)$$

여기서  $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j, \Delta z_k = z_{k+1} - z_k$ 이다.

제 2형에서는 요소의 경계면에서 전기장의 수직성분이 정의되므로 이대로는 경계조건이 만족되지 않는다. 그래서 이 경우에는 전류밀도의 수직성분이 경계면에서 연속인 점을 이용하여 이 면에서 물리적으로 모순이 생기지 않는 등가 전기장 수직성분을 구하여야 한다. 이를 위해서 경계면에서의 전기전도도로서 직렬회로에서와 같이, 인접하는 두 요소의 등가 평균 전기전도도를 구하여야 한다. 즉



**Fig. 2.** Two types of staggered grid. In type 1 (left) the electric field is sampled at the center of cell edge, while in type 2 (right) it is sampled at the center of cell face.

$$\bar{\sigma}_{i,j+1/2,k+1/2} = \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}{\Delta x_i / \sigma_{i,j,k} + \Delta x_{i-1} / \sigma_{i-1,j,k}}, \quad (13)$$

이다. 경계면 양측의 전기장을  $E_1$  및  $E_2$ 라 하면 전류밀도의 연속조건에 의해

$$\bar{\sigma}_{i,j+1/2,k+1/2} E_{x(i,j+1/2,k+1/2)} = \sigma_{i-1,j,k} E_1 = \sigma_{i,j,k} E_2, \quad (14)$$

가 되므로  $E_1$  및  $E_2$ 는  $E_{x(i,j+1/2,k+1/2)}$ 로부터 계산된다.

모서리나 경계면에서 평균 전기전도도가 주어지면 편미분방정식에 대응하는 차분식은 쉽게 구할 수 있다. 예를 들면 제 1형의 모서리 중심점  $(i+1/2, j, k)$ 에서의  $x$ 성분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & [(E_{y(i+1,j+1/2,k)} - E_{y(i,j+1/2,k)}) / \Delta x_i - (E_{x(i+1/2,j+1,k)} - E_{x(i+1/2,j,k)}) / \Delta y_j \\ & - (E_{y(i+1,j-1/2,k)} - E_{y(i,j-1/2,k)}) / \Delta x_i + (E_{x(i+1/2,j,k)} - E_{x(i+1/2,j-1,k)}) / \Delta y_{j-1}] / \Delta' y_j \\ & + [(E_{z(i+1,j,k+1/2)} - E_{z(i,j,k+1/2)}) / \Delta x_i - (E_{x(i+1/2,j,k+1)} - E_{x(i+1/2,j,k)}) / \Delta z_k \\ & - (E_{z(i+1,j,k-1/2)} - E_{z(i,j,k-1/2)}) / \Delta x_i + (E_{x(i+1/2,j,k)} - E_{x(i+1/2,j,k-1)}) / \Delta z_{k-1}] / \Delta' z_k \\ & + i\omega\mu\bar{\sigma}_{i+1/2,j,k} E_{x(i+1/2,j,k)} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

여기서  $\Delta' y_j = (\Delta y_j + \Delta y_{j-1}) / 2$ ,  $\Delta' z_k = (\Delta z_k + \Delta z_{k-1}) / 2$ 이다. 단 최종적인 계수행렬은 (15)식 양변에  $\Delta x_i \Delta' y_j \Delta' z_k$ 를 곱해 대칭으로 만드는 것이 유리하다(Newman and Alumbaugh, 1995).  $y$  및  $z$ 성분에 대해서도 각각 점  $(i, j+1/2, k)$  및  $(i, j, k+1/2)$ 을 중심으로 한 차분식이 얻어지며, 이들을 모두 모으면 전기장에 대한 연립방정식이 얻어진다. 그 계수행렬에서 0이 아닌 성분은 한 행당 최대 13개이다. Sasaki(1999)는 제 1형과 제 2형에서 계산효율의 차이는 별로 없다고 하였다.

### 연립방정식의 해법

EFE나 SFD에 의한 모델링은 결국 다음과 같은 연립방정식을 푸는 문제로 귀착된다.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (16)$$

여기서  $\mathbf{x}$ 는 구해야 할 전기장의 3성분에 관한 벡터,  $\mathbf{b}$ 는 소스항을 나타내는 벡터,  $\mathbf{A}$ 는 대칭인 복소행렬이다. (16)식의 해법으로 CG(conjugate gradient)법 계열의 반복법이 일반적으로 사용된다. ICCG(incomplete Cholesky CG)법은 가장 대표적인 방법이지만 전자기장의 3차원 문제는  $\mathbf{A}$ 가 positive definite 행렬이 아니므로 적용할 수 없다. 대칭이지만 positive definite가 아닌 행렬에 대해서는 보통 ICBCG(IC Bi-CG)법이 적용된다.

행렬  $\mathbf{A}$ 는 Hermitian 행렬이 아니므로 CG법을 적용하기 위해서는 정규방정식  $\mathbf{A}^h \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^h \mathbf{b}$ 으로 변환해야 한다. 여기서 위첨자  $h$ 는 conjugate transpose를 나타낸다. 그러나 이는 조건수(condition number)의 증대를 초래하게 되며, 풀어야 하는 행렬식은 (16)식보다 더욱 악조건이 된다. 이에 비해 BCG법은 non-Hermitian 행렬을 직접 취급할 수 있으므로 CG법 보다 수렴이 빨라서 효율적이다. 특히 (16)식처럼 대칭 복소행렬의 경우에는 통상의 CG법에서  $h$ 를 단순한 transpose  $t$ 로 치환한 알고리즘과 같아진다(Smith, 1996). 그 결과 실수의 열립방정식에 사용되는 보통의 CG법 프로그램을 복소수용으로 고쳐 쓴 것을 기본적으로는 사용할 수 있다.

### 전처리

반복해법의 수렴성은  $\mathbf{A}$ 의 조건수에 의존하며 조건수가 크면 클수록 수렴은 늦어진다. 행렬  $\mathbf{A}$ 의 조건수는 통상  $10^7$ - $10^{14}$ 인 것으로 알려져 있다. 따라서 (16)식을 안정하게 풀기 위해서는 다음과 같은 전처리가 필수적이다.

$$(\mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{AK}_2^{-1})(\mathbf{K}_2 \mathbf{x}) = \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{b}, \quad (17)$$

Smith(1996) 등이 사용한 불완전 Cholesky 분해법에서는  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2 = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{U}$ 라고 놓았다. 여기서  $\mathbf{D}$ 는 대각행렬,  $\mathbf{U}$ 는 상삼각행렬을 나타낸다. 한편 Haber *et al.*(2000)이 사용한 불완전 LU 분해법에서는  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{K}_2 = (\mathbf{D} + \mathbf{L}) \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{D} + \mathbf{U})$ 라고 놓았다. 여기서  $\mathbf{I}$ 는 단위행렬,  $\mathbf{L}$ 은 하삼각행렬이다. 이러한 전처리를 통해 행렬

$\mathbf{A}$ 의 조건수는 보통  $10^3$  정도로 떨어지게 된다.

### 발산보정

전자기장의 3차원문제에서는 주파수가 낮아질수록 조건수가 커지고 수치해의 정확도가 떨어지게 된다. 이는 (3)식에서  $\omega \rightarrow 0$ 의 극한을 취할 경우, 전기전도도를 나타내는 항이 없어지게 되므로 이 식이 풀리지 않게 된다는 점에서 쉽게 이해할 수 있다. 직류의 경우에는 전하의 보존법칙인 (6)식을 명시할 필요가 있다. 이론상으로는,  $\omega$ 가 아무리 작을 지라도 0이 아닌 경우, (3)식의 양변에 발산을 취하면 (6)식이 자동적으로 성립한다. 그러나 이산화된 근사방정식에서는  $\omega$ 를 포함한 항이 다른 항에 비해서 작을 경우 잔차  $\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|^2$ 가 충분히 작아진다고 해도 수치오차로 인해서 (6)식이 성립되지 않을 수 있다. 따라서 이러한 경우에는 (16)식을 풀 때 (6)식을 제한조건으로 추가해야 한다.

이를 위한 방법 중 하나가 Smith(1996)에 의해 제안된 발산보정이다. (16)식의 반복해가 (6)식을 만족하는지 여부는 대지 내의 각 격자점에서 전류밀도의 발산  $\phi_e$ 를 실제로 계산해보면 알 수 있다. 만일 이 값이 0이 아니면 그 격자점에는 가짜 전류원이 존재하는 것이 된다. 따라서 (16)식을 만족하기 위해서는 그 격자점에 부호를 반대로 하는 전류원을 상정하여 그로 인해 생기는 전기장을 보정값으로 주면 된다. 전기장의 보정값을 구하는 문제는 다음의 Poisson 방정식을 푸는 문제로 귀착된다.

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = -\phi_e, \quad (18)$$

공기층에서는  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 이어야 하므로 공기층의 각 격자점에서 전기장의 발산인  $\phi_a$ 를 구해  $\nabla \cdot \nabla \phi = -\phi_a$ 를 풀면 된다. 단 지표면에서는 전기장의 접선성분이 연속이 되도록 (18)식에서 구해지는 전기포텐셜  $\phi$ 를 경계조건으로 준다. 전기포텐셜  $\phi$ 는 보통의 전기비저항 3차원 모델링(e.g., Dey and Morrison, 1979)으로 구해지며 연립방정식의 해법으로는 ICCG법을 쓸 수 있다. 다만 전류항이 복소수이므로 실수부와 허수부에 대해 따로따로 구해야 한다는 것과 공기층에 대해서도 전기포텐셜을 구해야 한다는 점에 주의해야 한다.

발산보정을 적용하면 반복해는 대지에서는 전류밀도의 보존법칙을, 공기층에서는  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 을 만족한다. 그리고

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \nabla \phi) = \nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mu_0 \mathbf{H}, \quad (19)$$

로부터 알 수 있듯이 전기장을 보정해도 (1)식으로 계산되는 자기장에는 변화가 없다. 발산보정은 ICBCG법의 반복계산 도중 (2~20회 마다) 실시한다. 보정값의 정확도는 그렇게 높을 필요가 없으므로 ICCG법의 반복 회수는 10~20회 정도면 충분하다. Sasaki(1999)는 SFD에서 발산보정을 쓰면 지형을 포함한 모델에서도 전기장이 안정적으로 구해진다고 하였다.

### 포텐셜 방정식

모델링에 사용되는 지배방정식을 (3)식 또는 (4)식과 같이 전자기장에 대해 직접 유도하게 되면 공기층에서 특이성(singularity) 문제가 생긴다. 이를 피하기 위해서는 공기의 전기전도도를 0이 아닌 유한의 작은 값으로 근사하면 되지만 이 경우 앞서 말한 발산보정이 필수적으로 요구된다. 이러한 특이성 문제를 근본적으로 피할 수 있는 방안으로는 전자기장을 스칼라 및 벡터 포텐셜로 나타내는 방법이 있다. 이는 전파공학에서는 많이 쓰이는 방법으로 물리탐사분야에서는 최근에 적용되기 시작하였다(Haber *et al.*, 2000; Mitsuhashi and Uchida, 2004).

Haber *et al.*(2000)은 전기장을 Helmholtz분해하여 자기 벡터 포텐셜  $\mathbf{A}$ 와 전기 스칼라 포텐셜  $\phi$ 로

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} + \nabla \phi, \quad (20)$$

와 같이 나타내는 방법을 제시하였다. 여기에 Coulomb gauge 조건인  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 을 적용하면 공기층에서의 특이성 문제는 해결될 수 있다. 한편 Mitsuhashi and Uchida(2004)는 자기장을 전기 벡터 포텐셜  $\mathbf{T}$ 와 자기 스칼라 포텐셜  $\Omega$ 로 분해하는 방법을 소개하였다. 이 때 Coulomb gauge 조건은  $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ 이다.

이러한  $\mathbf{A}-\phi$ 법 또는  $\mathbf{T}-\Omega$ 법은 무발산(divergence free) 조건을 엄밀하게 만족한다는 점에서 바람직한 방법이지만 풀어야 할 계수행렬의 띠틈(bandwidth)이 커지는 문제를 해결할 필요성이 있다. 한 예로 Mitsuhashi and Uchida(2004)는  $\mathbf{T}-\Omega$ 법을 FEM로 풀 때 그 띠틈은 51로 FDM의 13에 비해 월등히 많고 하였다.

### SLDM법

Druskin and Khnizhnerman(1994)는 차분행렬의 스펙트럴전개를 이용하여 많은 주파수에 대한 답을 한번에 구하는 Spectral Lanczos Decomposition Method(SLDM)을 제안하였다. 이 방법에서는 풀어야 할 계수행렬을 먼저 주파수에 의존하는 부분과 그렇지 않는 부분으로 나눈 다음 후자를 특이치 분해(singular value decomposition)하는 순서로 진행된다.

Druskin and Khnizhnerman(1994)에 의하면 SFD로 이산화된 Maxwell의 방정식은

$$(\mathbf{A} + i\omega \mathbf{I})\mathbf{E} = i\omega \phi, \quad (21)$$

라는 형태로 바꾸어 쓸 수 있다. 여기서  $\mathbf{A}$ 는 공간 미분( $\sigma^{-1} \nabla \times \nabla \times$ )를 차분 근사한 행렬이다. 이를 풀어 전기장을 구하는 것은

$$\mathbf{E} = (\mathbf{A} + i\omega \mathbf{I})^{-1} i\omega \phi, \quad (22)$$

를 계산하는 것과 같다. SLDM은 다중주파수의 경우 이 역행렬  $(\mathbf{A} + i\omega \mathbf{I})^{-1}$ 를 효율적으로 구하기 위해 개발된 방법이다.

계수행렬의 역행렬을 구하기 위해서는  $\mathbf{A}$ 를

$$\mathbf{A}=\mathbf{V}'\mathbf{A}\mathbf{V}, \quad \mathbf{V}'\mathbf{V}=\mathbf{I}, \quad \mathbf{\Lambda}=\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m), \quad (23)$$

와 같이 특이치 분해하는 것이 유리하다. 왜냐하면 직교행렬의 역행렬은 전치행렬이기 때문이다. 그러나  $\mathbf{A}$ 의 크기는 절점수의 3배이므로 3차원의 경우 보통의 특이치 분해로는 안 된다. SLDM에서는 Lanczos의 방법을 쓴다. 즉, 먼저  $\mathbf{A}$ 를 직교변환에 의해

$$\mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{T}, \quad (24)$$

와 같이 3중 대각화한다. 여기서

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \beta_2 & \alpha_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_{m-1} \\ & & & \beta_{m-1} & \alpha_m \end{bmatrix}, \quad (25)$$

이다. 행렬  $\mathbf{Q}$ 의 각 열 성분은

$$\beta_k \mathbf{q}_{k+1}=\mathbf{A}\mathbf{q}_k-\beta_{k-1}\mathbf{q}_{k-1}-\alpha_k \mathbf{q}_k, \quad (26)$$

라는 순환식(recursive formula)으로 구해진다. 그리고  $\mathbf{T}$ 의 성분은

$$\alpha_k=\mathbf{q}_k' \mathbf{A}\mathbf{q}_k, \quad \beta_k=|\mathbf{A}\mathbf{q}_k-\beta_{k-1}\mathbf{q}_{k-1}-\alpha_k \mathbf{q}_k|, \quad (27)$$

라는 간단한 순환식으로 구해지며, 초기 값은

$$\beta_0 \mathbf{q}_0=0, \quad \mathbf{q}_1=\boldsymbol{\varphi}/\|\boldsymbol{\varphi}\|, \quad (28)$$

이다. 이 일련의 조작을 Lanczos recursion이라 하며, 수학적으로는  $\mathbf{Q}$ 의 각 열이 서로 수직이라고 알려져 있다. 만일 마무리 오차가 없을 경우  $\mathbf{Q}$ 의 각 열은  $\mathbf{A}$ 의 Krylov 부분공간

$$K(\mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})=\text{span}\{\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\boldsymbol{\varphi}\}, \quad (29)$$

의 기저(basis)를 이룬다.

$\mathbf{T}$ 의 특이치 분해가

$$\mathbf{T}=\mathbf{Y}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Y}', \quad (30)$$

와 같이 구해지면  $\mathbf{A}$ 는

$$\mathbf{A}=\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}'=\mathbf{Q}\mathbf{Y}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Y}'\mathbf{Q}', \quad (31)$$

가 된다. 따라서 계수행렬의 역행렬은

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}+i\omega\mathbf{I})^{-1} &= (\mathbf{Q}\mathbf{Y}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Y}'\mathbf{Q}'+i\omega\mathbf{I})^{-1} = \mathbf{Y}'\mathbf{Q}'(\mathbf{A}+i\omega\mathbf{I})^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{Y} \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Q}' \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1+i\omega} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{\lambda_m+i\omega} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \mathbf{Q}\mathbf{Y}, \end{aligned} \quad (32)$$

와 같이 구해진다. 이 중 주파수에 관련된 부분은 대각항의  $i\omega$  뿐이다. 따라서 어떤 주파수에 대한 반응을 한번 계산한 이후에는 다른 주파수에 대한 계산량은 거의 무시할 수 있다. 이렇게 SLDM은 다중주파수 문제에 적합한 방법이다. 그러나 행렬  $\mathbf{Q}$ 의 직교성이 보장되지 않으면(이를 직교성의 파탄이라 함) 수치해의 정확도는 크게 떨어진다.

### 마지막으로

SFD나 EFM의 도입으로 전기비저항이 서로 다른 요소의 경계면에서 전기장의 불연속 문제는 해결되었다. 이들은 복잡한 지하구조를 표현하는 데 적합하다. 특히 EFM은 요소의 변형이 용이하므로(Sugeng *et al.*, 1999), 구조의 표현이라는 점에서는 SFD보다 유리하다. 그러나 EFM은 SFD에 비해 메모리에 저장해야 할 양이 두 배 정도 많아(Fomenko and Mogi, 2001), 계산상의 어려움이 가중된다. 일반적으로 격자점이나 요소수를 늘리면 수치해의 정도는 올라가지만 이로 인해 풀어야 할 행렬은 커진다. 결국 이러한 대형 행렬을 어떻게 풀기 쉬운 형태로 바꾸고 효율적인 solver를 쓰느냐가 수치해의 정확도를 결정하는 열쇠인 셈이다.

### 사 사

이 연구의 일부는 2004년도 한국지질자원연구원의 일반사업 심부 지열에너지 개발 사업의 연구비 및 한국과학재단의 연구비(R05-2004-000-12529-0) 지원으로 수행되었다.

### 참고문헌

손정술, 송윤호, 정승환, 서정희, 2002, 벡터 유한 요소를 이용한 고주파 3차원 전자탐사 모델링, 물리탐사, **5**, 280-290.  
 Dey, A., and Morrison, H. F., 1979, Resistivity modeling for arbitrarily shaped three-dimensional structures, *Geophysics*, **44**, 753-780.  
 Druskin, V., and Knizhnerman, L., 1994, A spectral approach to solving three-dimensional diffusion Maxwell's equation in the time and frequency domains, *Radio Science*, **29**, 937-953.  
 Fomenko, E. Y., and Mogi, T., 2001, Advances in 3D EM modeling using the staggered grid, *Proc. 105th SEGJ Conf.*, 32-35. (in Japanese)  
 Haber, E., Ascher, U. M., Aruliah, D. A., and Oldenburg, D. W., 2000, Fast simulation of 3D electromagnetic problems using potentials, *J. Comp. Phys.*, **163**, 150-171.  
 Lee, K. H., Pridmore, D. F., and Morrison, H. F., 1981, A hybrid three-dimensional electromagnetic modeling scheme, *Geophysics*, **46**, 796-805.  
 Mackie, R. L., Smith, J. T., and Madden, T. R., 1994, Three-dimensional electromagnetic modeling using finite difference equations: The magnetotelluric example, *Radio Science*, **29**,

- 923-935.
- Mitsuhata, Y., and Uchida, T., 2004, 3-D magnetotelluric modeling using the T- $\Omega$  finite-element method, *Geophysics*, **69**, 108-119.
- Mogi, T., 1996, Three-dimensional modeling of magnetotelluric data using finite element method, *J. Applied Geophys.*, **35**, 185-189.
- Nedelec, J. C., 1980, Mixed finite elements in R3, *Numer. Math.*, **35**, 315-341.
- Newman, G. A., and Alumbaugh, D. L., 1995, Frequency-domain modeling of airborne electromagnetic responses using staggered finite difference, *Geophys. Prosp.*, **43**, 1021-1042.
- Pridmore, D. F., Hohmann, G. W., Ward, S. H., and Sill, W. R., 1981, An investigation of finite-element method, *Geophysics*, **46**, 1009-1024.
- Ratz, S., 1999, A 3D finite element code for modeling of electromagnetic responses, *Proc. 3-D EM*, 33-36.
- Reddy, I. K., Rankin, D., and Phillips, R. J., 1977, Three-dimensional modeling in magnetotelluric and magnetic variational sounding, *Geophys. J. Roy. astr. Soc.*, **51**, 313-325.
- Sasaki, Y., 1999, Three-dimensional frequency-domain electromagnetic modeling using the finite-difference method, *Butsuri-Tansa*, **52**, 421-431. (in Japanese)
- Siripunvaraporn, W., Egbert, G., and Lenbury, Y., 2002, Numerical accuracy of magnetotelluric modeling: A comparison of finite difference approximations, *Earth Planets Space*, **54**, 721-725.
- Smith, J. T., 1996, Conservative modeling of 3-D electromagnetic fields, Part II: Biconjugate gradient solution and an accelerator, *Geophysics*, **61**, 1319-1324.
- Sugeng, F., Raiche, A., and Xiong, Z., 1999, An edge-element approach to model the 3D EM response of complex structures with high contrasts, *Proc. 2nd Symp. on 3-D EM*, 25-28.
- Wang, T., and Hohmann, G. W., 1993, A finite difference time-domain solutions for three-dimensional magnetotelluric response, *Geophysics*, **58**, 797-809.
- Wannamaker, P. E., 1991, Advances in three-dimensional magnetotelluric modeling using integral equations, *Geophysics*, **56**, 1716-1728.
- Yee, K. S., 1966, Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equation in isotropic media, *IEEE Trans. Anten. Prop.*, **AP-14**, 302-307.