

## 기울어진 예혼합 평면화염의 안정성

이대근\* · 김문언\*\* · 신현동\*\*

### Stability of Inclined Premixed Planar Flames

Dae Keun Lee\*, Moon-Uhn Kim\*\* and Hyun Dong Shin\*\*

#### ABSTRACT

Stability of laminar premixed planar flames inclined in the gravitational field is asymptotically examined. The flame structure is resolved by a large activation energy asymptotics and a long wave approximation. The coupling between hydrodynamics and diffusion processes is included and near-unity Lewis number is assumed. The results show that as the flame is more inclined from the horizontal plane it becomes more unstable due to not only the decrease of stabilizing effect of gravity but also the increase of destabilizing effect of rotational flow. The obtained dispersion relation involves the Prandtl number and shows the destabilizing effect of viscosity. The analysis predicts that the phase velocity of unstable flame wave depends on not only the flame angle but also the Lewis number. For relatively short wave disturbances, still much larger than flame thickness, the most unstable wavelength is nearly independent on the flame angle and the flame can be stabilized by gravity and diffusion mechanism.

**Key Words** : Premixed flame, stability, asymptotic analysis, viscous effect, phase velocity, neutral stability

#### 기 호 설 명

<p><math>c</math> Phase velocity</p> <p><math>d</math> Flame thickness</p> <p><math>D_{th}</math> Thermal diffusivity</p> <p><math>D_{mol}</math> Mass diffusivity</p> <p><math>K, k</math> Dimensionless wavenumber</p> <p><math>Le</math> Lewis number</p> <p><math>le</math> Reduced Lewis number</p> <p><math>p</math> Dimensionless pressure</p> <p><math>Pr</math> Prandtl number</p> <p><math>r</math> Density ratio</p> <p><math>(u, v)</math> Velocity vector</p> <p><math>U_L</math> Laminar burning velocity</p>	<p>Greek letters</p> <p><math>\beta</math> Activation energy parameter</p> <p><math>\gamma</math> Thermal expansion parameter</p> <p><math>\varepsilon</math> Ratio of the flame thickness to the characteristic wavelength</p> <p><math>\Theta</math> Dimensionless temperature</p> <p><math>\rho</math> Density</p> <p><math>\Sigma, \sigma</math> Dimensionless growth rate</p> <p><math>\phi</math> Dimensionless mass fraction</p> <p><math>\phi_f</math> Flame angle from the horizontal plane</p> <p><math>\omega_b</math> Flame-generated vorticity</p>
---	---

### 1. 서 론

층류 예혼합 화염의 안정성에 관해서는 많은

연구자들에 의해 연구된 바 있으며, 그 결과로서 열 팽창에 의해 수반되는 Darrieus-Landau 불안정성과 열확산과 물질확산의 차이로 인해 발생하는 확산 불안정성(diffusive-thermal instability) 그리고 중력에 의한 Rayleigh-Taylor 불안정성이 대표적으로 잘 알려져 있다. 그러나 기존의 연구들[2, 5, 7, 15, 18]은 모두 균일하게 흐르는

\* 한국에너지기술연구원

\*\* 한국과학기술원 기계공학과

† 연락처, dkleee@kier.re.kr

미연가스의 유동 방향에 대해 평면화염이 수직하게 형성되어 전파하는 수직평면화염에 관한 것으로 한정되므로 유동장의 영향이 최소화된 조건 하에서의 연구라 할 수 있다. 달리 말하면 일반적으로 관찰되는 층류 곡면화염의 경우에 유동장은 균일 유동으로부터 상당히 벗어나 있으며 따라서 유동 자체의 불안정성이 화염의 안정성에 영향을 줄 여지가 있다. 여기서 유동장을 표현하는 대표적인 물리량으로서 와도를 생각할 때 와동과 화염의 상호작용은 수학적으로 매우 복잡한 문제이다. 일반적으로 화염은 유동장 내에서 여러 가지 요인에 의해 와동을 생성시키는 것으로 알려져 있으며[6, 16], 이 와도는 유동을 따라 화염의 하류로 대류되므로 화염대를 가로질러 와도장의 분포는 상·하류에서 서로 다르게 나타난다. 또한 화염은 작지만 유한한 두께를 가지므로 와도장의 차이는 화염대를 가로질러 접선방향 속도의 불연속성을 유발할 여지를 가진다[8].

본 연구에서는 와도 생성을 수반하는 가장 간단한 화염으로서 중력장 하에서 기울어진 평면화염의 기본 유동장을 구하고 그것의 안정성을 해석함으로써 유동장이 화염의 안정성에 미치는 영향을 해석적으로 알아보았다. 수학적인 방법으로는 반응을 위해 필요한 활성화 에너지가 매우 크다는 사실로부터 활성화 에너지 접근법을 사용하였고, 실험을 통해 관찰되는 셀 구조 혹은 불안정한 화염의 주름의 특성 길이  $\Lambda$ 가 화염대의 두께  $d$ 에 비해 충분히 크다는 사실( $\epsilon=d/\Lambda \ll 1$ )로부터 장파장 근사를 사용하였다. 이러한 해석 방법은 Clavin & Williams[3]에 의해 처음으로 사용되었으며 Pelce & Clavin[14]에 의해 평면화염의 안정성을 해석하는데 사용되었다.

2절에서는 기울어진 평면화염에 관한 문제를 정의하고 지배 방정식을 간단히 기술한다. 3절에서는 기본 유동장을 결정하고, 안정성 해석의 과정은 4절에서 기술한다. 5절에서는 안정성 해석에서 얻은 결과를 기술하고 6절에서는 그 결과를 요약하고 그것이 의미하는 바를 간단히 생각해본다.

### 2. 문제의 정의와 지배 방정식

중력장 하에서 기울어져 있는 정상 상태의 1차원 평면 화염이 Fig. 1과 같이 반중력 방향으로 흐르는 밀도  $\rho_u$ 의 균일한 유동장 내에서 수평방향에 대해  $\phi_f$ 의 각도를 가지고 기울어져 있는 경우를 생각한다. 먼저 화염의 수직, 수평 방향을 향하는 2차원 좌표계  $(x, y)$ 를 잡고 각 방향으로의 속도 성분은  $(u, v)$ 라 하자. 이때  $y$ 축은 화염대 내부의 반응대에 놓이도록 하고 특성 길이로는 화염대의 두께  $d = \rho D_{th} / \rho_u D_{mol}$  특성

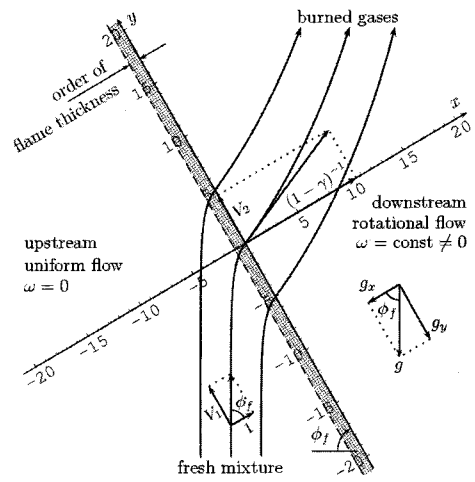


Fig. 1 중력장 하에서 기울어진 평면화염. 그림의 유선은 다음의 조건에 대해 엄밀하게 그려진 것이다:  $\phi_f = 60^\circ$ ,  $\gamma = 0.8$ ,  $d = 0.022\text{cm}$ ,  $U_L = 10\text{cm/s}$ ,  $Pr_1 = 0.75$

속도는 평면화염의 연소 속도  $U_L$ , 특성 시간은  $d/U_L$ 을 택한다. 여기서  $D_{th}$ ,  $D_{mol}$ 은 각각 열과 물질 확산 계수이며 그 비가 Lewis 수  $Le = D_{th}/D_{mol}$ 이다. 무한 상류(far upstream)에서의 접선방향 무차원 속도를  $V_1$ 이라 하고 화염면에 수직, 수평 방향의 중력항을 각각  $g_x$ ,  $g_y$ 라 놓으면 다음과 같이 표현된다.

$$V_1 = \tan \phi_f, \quad g_x = g \cos \phi_f, \quad g_y = g \sin \phi_f$$

또한 Fig. 1과 같이 반응대에서의 접선방향 속도를  $V_2$ 라 하자. 밀도와 온도가 각각  $\rho_u$ ,  $T_u$ 인 미연가스가 연소하여  $\rho_f$ ,  $T_f$ 인 기연가스가 되었다고 할 때 열팽창을 나타내는 파라미터  $\gamma$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\gamma = 1 - \rho_f / \rho_u = 1 - T_u / T_f, \quad 0 < \gamma < 1$$

여기서 두 번째 등식은 등압과정의 가정을 사용한다. 기존의 확산 모델에서는 수학적 어려움으로 인해  $\gamma \ll 1$ 의 가정을 사용하여 유동과 화염대 내부에서의 확산을 분리하였으나 본 연구에서는 열팽창에 관한 아무런 가정도 사용하지 않는다. 화학 반응에 대해서는 일단계 반응(one-step overall reaction)을 가정하여 연료와 산화제 중에서 반응 후 완전히 소모되는 성분만을 다룰 수 있도록 한다. 따라서 앞서 정의된  $D_{mol}$ 은 완전 소모되는 성분의 물질 확산계수를 뜻한다. 밀도와 농도는 각각 무한 상류에서의 값으로 무차원

화하여  $r$ ,  $\phi$ 라 하고 무차원 온도는

$$\Theta = (T - T_u)/(T_f - T_u)$$

로 정의한다.

4절에서 수행하게 될 안정성 해석에서는 화염에 작은 섭동을 가하게 되므로 고정된 좌표계인  $(x, y, t)$ 를 사용하는 것보다 화염에 부착되어 움직이는 좌표계를 사용하는 것이 편리하므로 다음과 같이 새로운 좌표계  $(\xi, \eta, \tau)$ 를 정의한다.

$$\xi = x - a(y, t), \quad \eta = y, \quad \tau = t$$

여기서  $a$ 는 반응대의 위치를 나타낸다. 그러면 지배 방정식은 아래의 식 (1)-(6)과 같이 쓸 수 있다(자세한 과정은 [3, 8, 9, 14]를 참조). 여기서 무차원 압력  $p$ 는 무한 상류의 압력과 차를  $\rho_u U_L^2$ 으로 나눈 것이며 동점성계수  $\mu$ 와 부피점성계수(bulk viscosity)  $\kappa$ 에 대한 Prandtl 수는 각각  $Pr_1 = \mu/\rho D_{th}$ ,  $Pr_2 = (\kappa + \mu/3)/\rho D_{th}$ 로 정의된다.  $s$ 는 새로운 좌표계에서 본  $\xi$ -방향 무차원 질량유속이며 미분 연산자  $\Delta'$ 과 무차원 Arrhenius 반응률  $F$ 를

$$s = r \left( u - \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} - v \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \right) \quad (7)$$

$$\Delta' = \left[ 1 + (\partial \alpha / \partial \eta)^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$F(\theta, \phi) = \beta^2 \phi \exp \{ -\beta(1 - \theta) / [1 - \gamma(1 - \theta)] \}$$

$$\beta = (T_u / T_f) [(T_f - T_u) / T_f]$$

와 같이 정의하면  $\Lambda_L$ 은 연소율을 나타내는 고유치이다.

### 3. 기본 유동장

이제 지배 방정식으로부터 정상상태의 기울어진 평면화염에 대한 해를 구하도록 한다. 정상상

태의 1차원 화염이므로  $\partial/\partial \eta = \partial/\partial \tau = 0$ ,  $a = 0$ 이다. 그러나 중력의 방향이 화염에 수직하지 않고 평행한 성분을 가지고 있으므로 압력만은  $(\xi, \eta)$ 의 함수로 놓는다. 이러한 고려로부터 지배 방정식 (1)-(6)이 단순화된다. 무차원화 과정을 고려하면 온도와 농도의 경계조건은  $\xi \rightarrow -\infty$ 일 때  $\Theta = 0$ ,  $\phi = 1$ 이고  $\xi = 0^+$ 일 때  $\Theta = 1$ ,  $\phi = 0$ 이다. 따라서 (4), (5)으로부터 반응대 외부 ( $F = 0$ )에서

온도장과 농도장이 결정되고 이를 상태방정식 (6)과 연속방정식 (1)에 대입하면  $r$ 과  $u$ 가 결정된다.

$$\bar{\theta} = \begin{cases} e^\xi & (\xi < 0) \\ 1 & (\xi > 0) \end{cases}, \quad \bar{\phi} = \begin{cases} 1 - e^{Le\xi} & (\xi < 0) \\ 0 & (\xi > 0) \end{cases} \quad (8)$$

$$\bar{u} = \bar{r}^{-1} = \begin{cases} 1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} e^\xi & (\xi < 0) \\ (1-\gamma)^{-1} & (\xi > 0) \end{cases} \quad (9)$$

이것은 수직평면화염의 경우에 대해 잘 알려진 해이며 여기서 윗줄( $\bar{\quad}$ )은 정상상태 물리량을 뜻한다. 이제 운동량 방정식 (2), (3)으로부터 접선 방향 속도  $v$ 와 압력  $p$ 를 결정한다. 식 (2), (3)에 curl을 취하여 압력을 소거한 후

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ Pr_1 \frac{d^2 v}{d\xi^2} - \frac{dv}{d\xi} - \frac{g_y d}{U_L^2} r \right\} = 0 \quad (10)$$

$\xi \rightarrow -\infty$ 일 때  $v = V_1$ 을 고려하면

$$Pr_1 \frac{d^2 v}{d\xi^2} - \frac{dv}{d\xi} = -\frac{g_y d}{U_L^2} (1-r) \quad (11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = -\frac{g_y d}{U_L^2} \quad (12)$$

을 얻는다. 식 (3)과 (12)을 이용하면 압력이 결정되므로 식 (11)을 이용하여  $v$ 를 결정한다. 경계조건으로는  $v(0^+) = V_2$ 와 함께 식 (11)을 반

$$\frac{\partial r}{\partial \tau} + \frac{\partial s}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} (rv) = 0 \quad (1)$$

$$r \frac{\partial u}{\partial \tau} + \left( s + Pr_1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} + rv \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial p}{\partial \xi} + Pr_1 \Delta' u + Pr_2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{s}{r} \right) + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] - \frac{g_x d}{U_L^2} r \quad (2)$$

$$r \frac{\partial v}{\partial \tau} + \left( s + Pr_1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial v}{\partial \xi} + rv \frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \frac{\partial p}{\partial \xi} + Pr_1 \Delta' v + Pr_2 \left( \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{s}{r} \right) + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] - \frac{g_y d}{U_L^2} r \quad (3)$$

$$r \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \left( s + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + rv \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \Delta' \theta + \Lambda_L F(\theta, \phi) \quad (4)$$

$$r \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \left( s + Le^{-1} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + rv \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = Le^{-1} \Delta' \phi - \Lambda_L F(\theta, \phi) \quad (5)$$

$$r = [1 + \gamma/(1 - \gamma)\theta]^{-1} \quad (6)$$

응대에 걸쳐 적분함으로써 다음을 얻는다.

$$[v]_{\pm}^{\pm} = [dv/d\xi]_{\pm}^{\pm} = 0$$

여기서  $[ ]_{\pm}^{\pm}$ 는 반응대 전후에 걸친 물리량의 차이를 뜻한다. 따라서 윗식은 반응대를 가로질러 접선 방향속도와 그것의 미분치인 와도가 연속임을 뜻한다. 이로부터 다음과 같이  $v$ 가 결정된다.

$$\bar{v} = \begin{cases} V_1 + \frac{g_y d}{U_L^2} \gamma \left\{ [Pr_1 + H(\xi)] e^{\xi/Pr_1} \right. \\ \left. + \frac{1}{\gamma} \ln \left( 1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} e^{\xi} \right) \right\} & (\xi < 0) \\ V_2 + \frac{g_y d}{U_L^2} \gamma \xi & (\xi > 0) \end{cases} \quad (13)$$

여기서

$$H(\xi) = \int_{\xi}^0 \frac{e^{(1-1/Pr_1)z}}{1-\gamma+\gamma e^z} dz$$

$$V_2 = V_1 + \frac{g_y d}{U_L^2} \gamma \left( Pr_1 + \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{1-\gamma} \right) \quad (14)$$

이다.

식 (9), (13)으로부터 기본 유동장이 결정되었으므로 그 특성을 살펴보자. 먼저  $\xi \rightarrow -\infty$ 의 극한을 취하면 속도 벡터는  $(1, V_1)$ 이 되며 화염대 외부의 상류 유동장에서는 균일한 유동이 형성된다. 식 (13)에서 보면 접선방향속도는 화염대에서 지수적으로 증가하다가 화염대 하류 유동장 ( $\xi > 0$ )에서는 선형적으로 증가한다. 반면에 하류 유동장에서  $\bar{u}$ 는 상수이고 본 문제에서 와도는  $\bar{\omega} = d\bar{v}/d\xi$ 이므로 하류 유동장은 일정한 와도  $(g_y d/U_L^2)\gamma$ 를 가지는 유동이 된다. 이로부터 유선을 그려보면 Fig. 1과 같이 상류에서는 평행한 직선을 이루다가 화염대를 지나면서 점점 격이게 되고 하류에서는 2차의 포물선 형태를 가지게 된다.

하류에 형성되는 일정 와도장은 화염대에서 생성되는 와도에 의한 것이다. 와도 생성의 매커니즘을 파악하기 위해 식 (2), (3)에 curl을 취한 와도 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\bar{u} \frac{d\bar{\omega}}{d\xi} - Pr_1 \frac{1}{\bar{r}} \frac{d^2 \bar{\omega}}{d\xi^2}$$

$$= -\frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{\bar{r}} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \bar{\omega} \frac{d\bar{u}}{d\xi} + Pr_1 \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{\bar{r}} \right) \frac{d^2 \bar{v}}{d\xi^2} \quad (15)$$

$$= -\bar{r} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{\bar{r}} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \eta} \quad (16)$$

식 (15)의 세 항은 와도의 생성 또는 소멸을 나타내는데 차례대로 baroclinic torque에 의한 와도 생성원, 압축성 효과에 의한 와도 소멸원 (sink), 점성과 열팽창에 의한 와도 생성원을 뜻

한다. 그리고 식 (16)은 (10)을 이용하여 얻어지는데 세 가지 생성원의 합은 결국 baroclinic torque에 비례함을 보여준다.

## 4. 안정성 해석

유동장을 상류와 하류의 외부 유동장과 반응대, 그리고 예열대(preheat zone)의 네 영역으로 나누어 각각을 따로 해석한다. 외부 유동장 각각을 해석하면 지배방정식이 2차의 미분방정식이고 화염면과 접하는 경계에서의 경계조건이 결정되어 있지 않으므로 각각의 물리량이 미정 상수를 하나씩 포함하게 된다. 점근법을 사용하여 화염대를 해석하면 화염대를 가로지르는 각 물리량들의 불연속량(jump)을 알 수 있으므로 이로부터 미정 상수를 결정하게 된다. 이 미정 상수를 결정하는 과정에서 분산 방정식(dispersion relation)을 얻게 된다.

### 4.1 섭동의 지배 방정식

이제 각각의 물리량을 정상상태 물리량과 작은 크기의 섭동의 합으로 다음과 같이 나타낸 후

$$\begin{aligned} r &= \bar{r}(\xi) + r'(\xi, \eta, \tau), & \theta &= \bar{\theta}(\xi) + \theta'(\xi, \eta, \tau) \\ u &= \bar{u}(\xi) + u'(\xi, \eta, \tau), & \phi &= \bar{\phi}(\xi) + \phi'(\xi, \eta, \tau) \\ v &= \bar{v}(\xi) + v'(\xi, \eta, \tau), & s &= 1 + s'(\xi, \eta, \tau) \\ p &= \bar{p}(\xi) + p'(\xi, \eta, \tau), & \alpha &= 0 + \alpha(\eta, \tau) \end{aligned}$$

지배 방정식 (1)-(7)에 대입하고 작은 섭동에 대해 선형화하면 반응대를 제외한 전 영역에서 성립하는 섭동의 지배 방정식을 얻게 되고 그 결과는 다음 페이지의 식 (17)-(23)과 같다.

본 연구의 관심은 화염의 내재적인 안정성 (intrinsic stability)이므로 섭동의 크기는 무한 경계 ( $\xi \rightarrow \pm\infty$ )에서 0이 되어야 한다. 미분 방정식 (17)-(21)이 동차(homogeneous)이고 동차의 경계조건을 가지므로 안정성 해석의 문제는 결국 고유치 문제(eigenvalue problem)가 되고 non-trivial한 해를 갖도록 하는 조건으로부터 화염에 가해진 섭동의 파장에 대한 섭동의 증가율의 관계식, 즉 분산 방정식을 얻는다.

### 4.2 외부 유동장의 해석

좌표계  $(\xi, \eta, \tau)$ 는 화염대의 두께 정도의 특성 길이를 가지고 미연가스가 화염대를 거쳐가는데 걸리는 시간 정도에 일어나는 현상을 기술하는데 적합하다. 한편 화염면에  $\Delta$ 정도의 파장을 가진 섭동을 가하면 그 섭동은 직접적으로 외부 유동장의 변화를 가져오게 되고 유선의 모양이 바뀌게 된다. 따라서 외부 유동의 특성 길

$$\frac{\partial r'}{\partial \tau} + \frac{\partial s'}{\partial \xi} + \bar{r} \frac{\partial v'}{\partial \eta} + \bar{v} \frac{\partial r'}{\partial \eta} = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \bar{r} \frac{\partial u'}{\partial \tau} + \left( s' + Pr_1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta^2} \right) \frac{d\bar{u}}{d\xi} + \frac{\partial u'}{\partial \xi} + \bar{r} \bar{v} \frac{\partial u'}{\partial \eta} \\ = -\frac{\partial p'}{\partial \xi} + Pr_1 \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} \right) + Pr_2 \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \frac{d^2 \bar{v}}{d\xi^2} \right) - \frac{g_x d}{U_L^2} r' \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \bar{r} \frac{\partial v'}{\partial \tau} + \left( s' + Pr_1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta^2} \right) \frac{d\bar{v}}{d\xi} + \frac{\partial v'}{\partial \xi} + \bar{r} \bar{v} \frac{\partial v'}{\partial \eta} \\ = -\frac{\partial p'}{\partial \eta} + \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \frac{d\bar{p}}{d\xi} + Pr_1 \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial \eta^2} \right) + Pr_2 \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v'}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \frac{d^2 \bar{u}}{d\xi^2} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta^2} \frac{d\bar{v}}{d\xi} \right) - \frac{g_y d}{U_L^2} r' \end{aligned} \quad (19)$$

$$\bar{r} \frac{\partial \theta'}{\partial \tau} + \left( s' + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta^2} \right) \frac{d\bar{\theta}}{d\xi} + \frac{\partial \theta'}{\partial \xi} + \bar{r} \bar{v} \frac{\partial \theta'}{\partial \eta} = \left( \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \eta^2} \right) \quad (20)$$

$$\bar{r} \frac{\partial \phi'}{\partial \tau} + \left( s' + Le^{-1} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta^2} \right) \frac{d\bar{\phi}}{d\xi} + \frac{\partial \phi'}{\partial \xi} + \bar{r} \bar{v} \frac{\partial \phi'}{\partial \eta} = Le^{-1} \left( \frac{\partial^2 \phi'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial \eta^2} \right) \quad (21)$$

$$r' = -\frac{\gamma}{1-\gamma} \bar{r}^2 \theta' \quad (22)$$

$$s' = \bar{r} \left( u' - \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} - \bar{v} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \right) + r' \bar{u} \quad (23)$$

이는  $\Lambda$  정도의 크기를 가질 것이므로 좌표계  $(\xi, \eta, \tau)$ 는 외부 유동장을 기술하기에 적합하지 못하다. 외부 유동장을 해석하기 위해 작은 파라미터  $\varepsilon$ 로부터 큰 스케일의 좌표계

$$(X, Y, T) = (\varepsilon \xi, \varepsilon \eta, \varepsilon \tau), \quad \varepsilon = d/\Lambda \quad (24)$$

를 잡고 물리량들은 다음과 같이 놓는다.

$$\begin{aligned} u'^{\pm} &= \varepsilon U^{\pm}(X, Y, T), & v'^{\pm} &= \varepsilon V^{\pm}(X, Y, T) \\ p'^{\pm} &= \varepsilon P^{\pm}(X, Y, T), & s'^{\pm} &= \varepsilon S^{\pm}(X, Y, T) \end{aligned} \quad (25)$$

여기서 위첨자  $\pm$ 는 각각 화염대 외부의 하류와 상류의 유동장을 뜻하고 대분자의 물리량은 각각  $O(1)$ 의 크기이다. 이제 식 (25)를 (17)–(23)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\frac{\partial U^{\pm}}{\partial X} + \frac{\partial V^{\pm}}{\partial Y} = \frac{\partial \alpha}{\partial Y} \frac{\partial \bar{v}^{\pm}}{\partial X} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \bar{r}^{\pm} \frac{\partial U^{\pm}}{\partial T} + \frac{\partial U^{\pm}}{\partial X} + \bar{r}^{\pm} \bar{v}^{\pm} \frac{\partial U^{\pm}}{\partial Y} \\ = -\frac{\partial P^{\pm}}{\partial X} + \varepsilon Pr_1 \left( \frac{\partial^2 U^{\pm}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U^{\pm}}{\partial Y^2} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \bar{r}^{\pm} \frac{\partial V^{\pm}}{\partial T} + \left( S^{\pm} + \varepsilon Pr_1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial Y^2} \right) \frac{\partial \bar{v}^{\pm}}{\partial X} + \frac{\partial V^{\pm}}{\partial X} + \bar{r}^{\pm} \bar{v}^{\pm} \frac{\partial V^{\pm}}{\partial Y} \\ = -\frac{\partial P^{\pm}}{\partial Y} + \varepsilon Pr_1 \left( \frac{\partial^2 V^{\pm}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V^{\pm}}{\partial Y^2} \right) - G_x \bar{r}^{\pm} \frac{\partial \alpha}{\partial Y} \end{aligned} \quad (28)$$

여기서

$$S^{\pm} = \bar{r}^{\pm} \left( U^{\pm} - \frac{\partial \alpha}{\partial T} - \bar{v}^{\pm} \frac{\partial \alpha}{\partial Y} \right) \quad (29)$$

이고, 수직 방향 중력항과 와도항은 각각

$$\frac{g_x d}{U_L^2} = \varepsilon G_x, \quad \frac{g_y d}{U_L^2} \gamma = \omega_b = \varepsilon \Omega_b \quad (30)$$

이며  $G_x, \Omega_b$ 는 모두  $O(1)$ 이다. 이제  $\varepsilon$ 에 의해 전개되는 식 (25)의 물리량들을 다음과 같이 정규 모드(normal mode)로 분해한다.

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ U^{\pm} \\ V^{\pm} \\ P^{\pm} + \bar{r}^{\pm} G_x \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C} \\ \mathcal{U}^{\pm}(X) \\ \mathcal{V}^{\pm}(X) \\ \mathcal{P}^{\pm}(X) \end{pmatrix} \exp(\Sigma T + iKY) \quad (31)$$

여기서 시간적으로 사라나는 섭동이 관심의 대상이므로  $Re(\Sigma) > 0$ 으로 가정한다.

이제 식 (31)을 (26)–(28)에 대입하여 화염대 상 하류 외부 유동장의 섭동의 해를 구한다. 먼저 상류 유동장에 대해서는 (27), (28)을 각각  $X, Y$ 에 대해 미분하고 (26)을 이용하면  $P^-$ 에 관한 Poisson 방정식을 얻게 되고 경계조건  $\mathcal{P}^-(-\infty) = 0$ 을 고려하면 압력이 결정된다. 이것을 (26), (27)에 대입하여  $\mathcal{U}^-, \mathcal{V}^-$ 를 결정하면[15]

$$\mathcal{P}^- = \mathcal{P}_0^- e^{KX} \quad (32)$$

$$\mathcal{U}^- = -\frac{K}{\Sigma + K + iV_1 K} \mathcal{P}_0^- e^{KX} \quad (33)$$

$$\mathcal{V}^- = -\frac{iK}{\Sigma + K + iV_1 K} \mathcal{P}_0^- e^{KX} \quad (34)$$

여기서  $\mathcal{P}_0^-$ 는 미정 상수이다.

다음으로 하류 유동장의 해를 얻는다. 식 (13)과 같이 접선방향 속도가  $X$ 에 선형적으로 증가하므로 지배 방정식 (26)–(28)을 상류 유동장의 해법과 같이 하여 해를 구할 수 없다. 따라서 2

차원 유동이라는 장점을 이용하여 와도와 유선 함수를 다음과 같이 도입한다.

$$U^+ = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad V^+ - \Omega_b a = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (35)$$

$$\Omega = \frac{\partial V^+}{\partial X} - \frac{\partial U^+}{\partial Y} = -\left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right) \quad (36)$$

식 (27)과 (28)로부터 압력을 소거하면 와도 방정식을 얻는다. 이제 와도와 유선 함수를 정규 모드로 분해하고

$$\begin{pmatrix} \Omega \\ \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega(X) \\ \psi(X) \end{pmatrix} \exp(\Sigma T + iKY) \quad (37)$$

와도 방정식과 (36)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\epsilon Pr_1 \frac{d^2 \omega}{dX^2} - \frac{d\omega}{dX} - (\tilde{A}X + \tilde{\Sigma} + \epsilon Pr_1 K^2) \omega = 0 \quad (38)$$

$$\frac{d^2 \psi}{dX^2} - K^2 \psi = -\omega(X) \quad (39)$$

여기서

$$\tilde{A} = i\Omega_b(1 - \gamma)K, \quad \tilde{\Sigma} = (1 - \gamma)(\Sigma + iV_2K) \quad (40)$$

이다. 식 (39)를 (38)에 대입하면 평행한 전단 흐름의 안정성에 관한 Orr-Sommerfeld 방정식[4]과 유사한 모양이 되며 차이점은 법선 방향으로 와도가 대류된다는 사실이다. 식 (38)은 변수 변환을 통해 Airy 방정식으로 변환이 가능하며[13] 이 해를 비동차항으로 해서 식 (39)를 풀면 복소평면에서의 경로 적분 형태로 해를 구할 수 있다. 그러나 그 과정에서 얻어지는 적분의 피적분 함수가 매우 좋지 않은 거동을 보이므로 엄밀해 를 구한 이득이 없다. 따라서 와도와 유선 함수를  $\varepsilon$ 의 지수승으로 전개하여 각각의 order별로 해를 구하는 것이 복잡한 계산을 포함한다 하더라도 보다 나은 해를 제공한다. 단 식 (38)은 최고 차항 미분의 계수가 매우 작으므로 경계층 형태의 미분방정식이지만 경계층은 생기지 않음에 주의하자[12]. 복잡한 계산에 의해 그 결과는 식 (41)-(43)과 같다. 여기서 도입된  $F_1(X)$ ,

$F_2(X)$ ,  $B$ ,  $C$ 의 정의는 다음과 같다.

$$F_1(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{A}}} \exp\left(\frac{(\tilde{\Sigma} + K)^2}{2\tilde{A}}\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\tilde{A}}{2}}X + \frac{\tilde{\Sigma} + K}{\sqrt{2\tilde{A}}}\right) e^{KX}$$

$$F_2(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{A}}} \exp\left(\frac{(\tilde{\Sigma} - K)^2}{2\tilde{A}}\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\tilde{A}}{2}}X + \frac{\tilde{\Sigma} - K}{\sqrt{2\tilde{A}}}\right) e^{-KX}$$

$$B = 1 + \epsilon Pr_1 \left( \tilde{\Sigma} - \frac{(\tilde{\Sigma} + K)^2(\tilde{\Sigma} - 2K)}{3\tilde{A}} \right)$$

$$C = 1 + \epsilon Pr_1 \left( \tilde{\Sigma} - \frac{(\tilde{\Sigma} - K)^2(\tilde{\Sigma} + 2K)}{3\tilde{A}} \right)$$

그리고  $\Omega_0 = \omega(0)$ ,  $\Psi_0 = \psi(0)$ 로서 미정 상수이다.

### 4.3 화염대의 해석

외부 유동장의 해석으로부터 4개의 미정상수  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{D}_0$ ,  $\Omega_0$ ,  $\Psi_0$ 를 포함하는 해를 얻었으며 상류 유동장과 하류 유동장은 화염대를 가로지르는 불연속 조건에 의해 연결된다. 반응대의 해석을 위해서는 활성화 에너지 점근법을 사용한다. 반응을 위한 활성화 에너지가 충분히 크므로  $\beta \gg 1$ 이고 반응대는  $O(\beta^{-1}d)$  정도로 충분히 얇다. 따라서 반응대는  $\beta^{-1}$ 를 전개 파라미터로 하여 점근적으로 해석한다. 자세한 과정은 [7]을 참고하고 그 결과만 기술하면 다음과 같다.

$$[\bar{p}]_{-}^{+} = (Pr_1 + Pr_2) \left[ \frac{d\bar{u}}{d\xi} \right]_{-}^{+} \quad (44)$$

$$[p']_{-}^{+} = (Pr_1 + Pr_2) \left[ \frac{\partial u'}{\partial \xi} \right]_{-}^{+} \quad (45)$$

$$\left[ \frac{\partial v'}{\partial \xi} \right]_{-}^{+} = -\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \left[ \frac{d\bar{u}}{d\xi} \right]_{-}^{+} \quad (46)$$

$$\left[ \frac{\partial \theta'}{\partial \xi} + Le^{-1} \frac{\partial \psi'}{\partial \xi} \right]_{-}^{+} = 0 \quad (47)$$

$$\left. \frac{\partial \theta'}{\partial \xi} \right|_{\xi=0^{-}} = \frac{1}{2} \beta \theta'(\xi=0) \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^+(X) = & iK \left( \Psi_0 + \epsilon Pr_1 \frac{\Omega_0}{3\tilde{A}} \tilde{\Sigma} \right) e^{-KX} - iK \epsilon Pr_1 \frac{\Omega_0}{3\tilde{A}} (\tilde{A}X + \tilde{\Sigma}) \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{A}X^2 - \tilde{\Sigma}X\right) \\ & + i\frac{\Omega_0}{2} \{ B [F_1(X) - F_1(0)e^{-KX}] - C [F_2(X) - F_2(0)e^{-KX}] \} \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^+(X) = & \Omega_b \mathcal{E} + K \left( \Psi_0 + \epsilon Pr_1 \frac{\Omega_0}{3\tilde{A}} \tilde{\Sigma} \right) e^{-KX} - \epsilon Pr_1 \frac{\Omega_0}{3\tilde{A}} \left[ (\tilde{A}X + \tilde{\Sigma})^2 - \tilde{A} - 2K^2 \right] \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{A}X^2 - \tilde{\Sigma}X\right) \\ & - \frac{\Omega_0}{2} \{ B [F_1(X) - F_1(0)e^{-KX}] + C [F_2(X) - F_2(0)e^{-KX}] \} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\mathcal{D}^+(X) = \frac{i}{K} \left\{ (\tilde{A}X + \tilde{\Sigma})(\mathcal{V}^+ - \Omega_b \mathcal{E}) + \frac{d\mathcal{V}^+}{dX} - i\frac{\tilde{A}}{K} \mathcal{U}^+ - \epsilon Pr_1 \frac{d\omega}{dX} \right\} \quad (43)$$

예열대는 반응이 거의 일어나지 않으므로 확산 작용과 유동이 서로 균형을 이루는 영역이다. 따라서 이 영역에서는 두 가지 스케일의 특성 길이가 존재한다. 즉 화염면의 모양에 영향을 주는 외부 유동의 특성 길이  $\Lambda$ 가 있으며 변화된 외부 유동의 조건에 따라 화염의 구조를 재편하는 확산의 특성 길이  $d$ 가 있다. 따라서 장과장의 근사에서는  $\varepsilon \ll 1$ 을 작은 파라미터로 하여 점근적으로 해석한다. 먼저 섭동을 다음과 같이  $\varepsilon$ 에 대해 전개한다.

$$\begin{aligned} u' &= \varepsilon U^-(X, Y, T) + \varepsilon \hat{u}_1(\xi, Y, T) + \varepsilon^2 \hat{u}_2(\xi, Y, T) + O(\varepsilon^3) \\ v' &= \varepsilon V^-(X, Y, T) + \varepsilon \hat{v}_1(\xi, Y, T) + \varepsilon^2 \hat{v}_2(\xi, Y, T) + O(\varepsilon^3) \\ p' &= \varepsilon P^-(X, Y, T) + \varepsilon \hat{p}_1(\xi, Y, T) + \varepsilon^2 \hat{p}_2(\xi, Y, T) + O(\varepsilon^3) \\ s' &= \varepsilon S^-(X, Y, T) + \varepsilon \hat{s}_1(\xi, Y, T) + \varepsilon^2 \hat{s}_2(\xi, Y, T) + O(\varepsilon^3) \\ \theta' &= \varepsilon^2 \hat{\theta}_2(\xi, Y, T) + O(\varepsilon^3) \\ \phi' &= \varepsilon^2 \hat{\phi}_2(\xi, Y, T) + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

여기서  $\xi \rightarrow -\infty$ 일 때 격쇠(\*)가 있는 물리량들이 모두 0으로 수렴하는 해를 구하면 상류 유동장과 예열대는 자연스럽게 연결된다. 화염의 위치  $a$ 도  $\varepsilon$ 에 대해 전개하고 지배방정식 (17)-(23)에 대입하여 각 order별로 정리하면 해를 구할 수 있다. 그 과정은 [15]와 유사한 계산이므로 생략하고 그 결과만을 기술한다.

$$\hat{u}_1(\xi) = \hat{p}_1(\xi) = 0, \quad \hat{v}_1(\xi) = -\frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\partial \alpha_0}{\partial Y} e^{\xi} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_2(0) &= \frac{\gamma}{1-\gamma} \left( \frac{\mathcal{L}}{d} - \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{1-\gamma} \right) \left( \frac{\partial U_0^-}{\partial X} \Big|_{X=0} - \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial Y^2} \right) \\ &+ \Omega_b \left( Pr_1 + \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{1-\gamma} \right) \frac{\partial \alpha_0}{\partial Y} \quad (50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{v}_2(0) &= -\frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{\partial \alpha_1}{\partial Y} + Pr_1 \left( \frac{\partial V_0^+}{\partial X} - \frac{\partial V_0^-}{\partial X} \right)_{X=0} \\ &+ \ln \frac{1}{1-\gamma} \left( \frac{\partial V_0^-}{\partial T} \Big|_{X=0} + \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial Y \partial T} + G_x \frac{\partial \alpha_0}{\partial Y} \right) \\ &- V_1 \ln \frac{1}{1-\gamma} \left( \frac{\partial U_0^-}{\partial X} \Big|_{X=0} - \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial Y^2} \right) \quad (51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{p}_2(0) &= \ln \frac{1}{1-\gamma} \frac{\partial U_0^-}{\partial T} \Big|_{X=0} + \frac{\gamma}{1-\gamma} (1 - Pr_1 - Pr_2) \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial Y^2} \\ &- \frac{2\gamma}{1-\gamma} \left( \frac{\mathcal{L}}{d} - \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{1-\gamma} \right) \left( \frac{\partial U_0^-}{\partial X} \Big|_{X=0} - \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial Y^2} \right) \\ &+ (Pr_1 + Pr_2) \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} + V_1 \ln \frac{1}{1-\gamma} \frac{\partial U_0^-}{\partial Y} \Big|_{X=0} \\ &- \Omega_b \left( Pr_1 + Pr_2 + \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{1-\gamma} \right) \frac{\partial \alpha_0}{\partial Y} \quad (52) \end{aligned}$$

여기서

$$\frac{\mathcal{L}}{d} = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{1-\gamma} + \frac{le}{2} \frac{1-\gamma}{\gamma} \int_0^{1-\frac{1}{\gamma}} z^{-1} \ln(1+z) dz$$

이며 Lewis 수는 다음과 같이 1 근처의 값으로 가정한다.

$$Le^{-1} = 1 - \beta^{-1} le, \quad le = O(1)$$

이제 (44)-(52)로부터 화염대 전체를 가로지르는 불연속 조건(jump condition)을 얻는다.

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^+(0) - \mathcal{U}^-(0) &= \varepsilon \frac{\gamma}{1-\gamma} \left( \frac{\mathcal{L}}{d} - \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{1-\gamma} \right) \\ &\times \left( \frac{d\mathcal{U}^-}{dX} \Big|_{X=0} + K^2 \mathcal{C} \right) + i\varepsilon \Omega_b \left( Pr_1 + \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{1-\gamma} \right) K \mathcal{C} \quad (53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^+(0) - \mathcal{V}^-(0) &= -i \frac{\gamma}{1-\gamma} K \mathcal{C} \\ &+ \varepsilon Pr_1 \left( \frac{d\mathcal{V}^+}{dX} - \frac{d\mathcal{V}^-}{dX} \right)_{X=0} \\ &+ \varepsilon \ln \frac{1}{1-\gamma} [\Sigma \mathcal{V}^-(0) + iK \Sigma \mathcal{C} + iK G_x \mathcal{C}] \\ &- \varepsilon V_1 \ln \frac{1}{1-\gamma} \left( \frac{d\mathcal{U}^-}{dX} \Big|_{X=0} + K^2 \mathcal{C} \right) \quad (54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^+(0) - \mathcal{P}^-(0) &= -\varepsilon \frac{2\gamma}{1-\gamma} \left( \frac{\mathcal{L}}{d} - \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{1-\gamma} \right) \\ &\times \left( \frac{d\mathcal{U}^-}{dX} \Big|_{X=0} + K^2 \mathcal{C} \right) \\ &- \varepsilon \frac{\gamma}{1-\gamma} (1 - Pr_1 - Pr_2) K^2 \mathcal{C} + \varepsilon \ln \frac{1}{1-\gamma} \Sigma \mathcal{U}^-(0) \\ &+ \varepsilon (Pr_1 + Pr_2) \left( \frac{d\mathcal{U}^+}{dX} - \frac{d\mathcal{U}^-}{dX} \right)_{X=0} \\ &+ i\varepsilon V_1 \ln \frac{1}{1-\gamma} K \mathcal{U}^-(0) \\ &- i\varepsilon \Omega_b \left( Pr_1 + Pr_2 + \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{1-\gamma} \right) K \mathcal{C} \quad (55) \end{aligned}$$

여기서  $\Omega_b, V_1$ 은 화염의 각도에 따라 결정되는 값이며  $\phi_f = 0$ 일 때 0이 된다. 이를 (53)-(55)에서 고려하면 윗 식들은 수직 평면화염에 관한 [15]의 결과와 완전하게 일치함을 확인할 수 있다.

## 5. 해석의 결과

식 (29)로부터 상류 유동장에 대해 다음이 성립하므로

$$\frac{\partial \alpha}{\partial T} + V_1 \frac{\partial \alpha}{\partial Y} = U^-(X=0) - S^-(X=0)$$

화염면의 거동은 다음을 만족한다.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + V_1 \frac{\partial \alpha}{\partial y} = u^-(X=0) - s^-(X=0) \quad (56)$$

$$s^-(X=0) = \frac{\mathcal{L}}{d} \left( \frac{\partial u^-}{\partial x} \Big|_{x=0} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \right) \quad (57)$$

이 결과는 접선방향 대류항인 식 (56)의 좌변 두 번째 항을 제외하면 수직 평면화염에 관한 [15]

의 결과와 같고 각각의 항들이 의미하는 바는 [15]에 자세히 기술되어 있으므로 생략한다.

이제 외부 유동장의 해석 결과와 화염대의 불연속 조건 그리고 화염의 거동에 대한 식을 이용하여 섬동의 진폭 증가율과 파장의 관계를 나타내는 분산 방정식을 구한다. 외부 유동장의 해에서 네 개의 미정 상수  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{P}_0$ ,  $\Omega_0$ ,  $\Psi_0$ 를 결정하기 위해 화염면의 거동을 나타내는 식 (56)과 화염대의 불연속 조건 (53)-(55)를 사용하면 네 개의 미정 상수에 대한 동차 연립방정식을 얻는다. 따라서 방정식이 non-trivial한 해를 갖기 위해 계수 행렬의 행렬식(determinant)이 0이 되어야 하며 이로부터  $\Sigma$ 와  $K$ 의 관계를 나타내는 방정식  $\Sigma = \Sigma(K)$ 를 얻는다. 그 결과로서 얻은 방정식은 편의상 부록에서 기술하였다. 4.2절의 외부 유동장 해석의 결과에서 예상할 수 있는 것처럼 그리고 부록의 결과식에서 보는 것처럼 분산방정식은 complementary error function을 포함하므로  $\Sigma = \Sigma(K)$ 의 해를  $K$ 에 대해 표현할 수 있는 해석적인 방법은 없다. 따라서 본 연구에서는 정량적인 결과를 얻기 위하여 Newton method를 통해 수치적으로 해를 구하였다. 정규모드의 분해로부터 주어진 파장  $K$ 에 대해  $Re(\Sigma) > 0$ 이면 화염은 불안정하다.

먼저 화염의 각도  $\phi_f$ 에 따른 화염 안정성의 변화를 Fig. 2에 도시하였으며 Lewis 수의 영향도 함께 고려되었다. 여기서 물리적인 상수들은 특별히 기술된 경우를 제외하고  $\gamma=0.8$ ,  $U_L=10\text{cm/s}$ ,  $D_{th}=0.22\text{cm}^2/\text{s}$ ,  $Pr_1=0.75$ 이다. 그림에서  $\sigma = \epsilon\Sigma$ ,  $k = \epsilon K$ 이며 연속된 곡선(solid line)이 수직 평면화염에 해당한다. 그림에서 보면 Lewis 수에 의한 영향은 수직 평면 화염에 대해 잘 알려진 바[15]와 같이 Lewis 수가 클수록 화염이 보다 안정함을 확인할 수 있다. 즉  $le$  값이 커지면 최대 증가율 값이 감소하고 불안정한 파수의 범위가 좁아진다. 화염 각도의 영향은 주어진 Lewis 수에 관계없이, 즉 열 및 물질 확산 효과와 관계없이 화염의 각도가 커지면 화염이 보다 불안정해짐을 알 수 있다. 이것은 두가지 요인에 의한 것으로 분류될 수 있다. 첫 번째로 화염의 각도가 커지면 화염의 수직방향을 작용하는 실질적인 중력(effective gravity)  $g_x$ 의 값이 감소한다. 아래(반중력) 방향으로 전파하는 화염은 무거운 미연가스가 아래에 있고 가벼워진 기연가스가 위에 있으므로 중력은 화염을 안정화시키는 역할을 한다. 따라서 화염의 각도가 커지면 중력에 의한 화염 안정화의 역할이 감소한다. 두 번째로 화염의 각도가 커지면 식 (13)에서 보

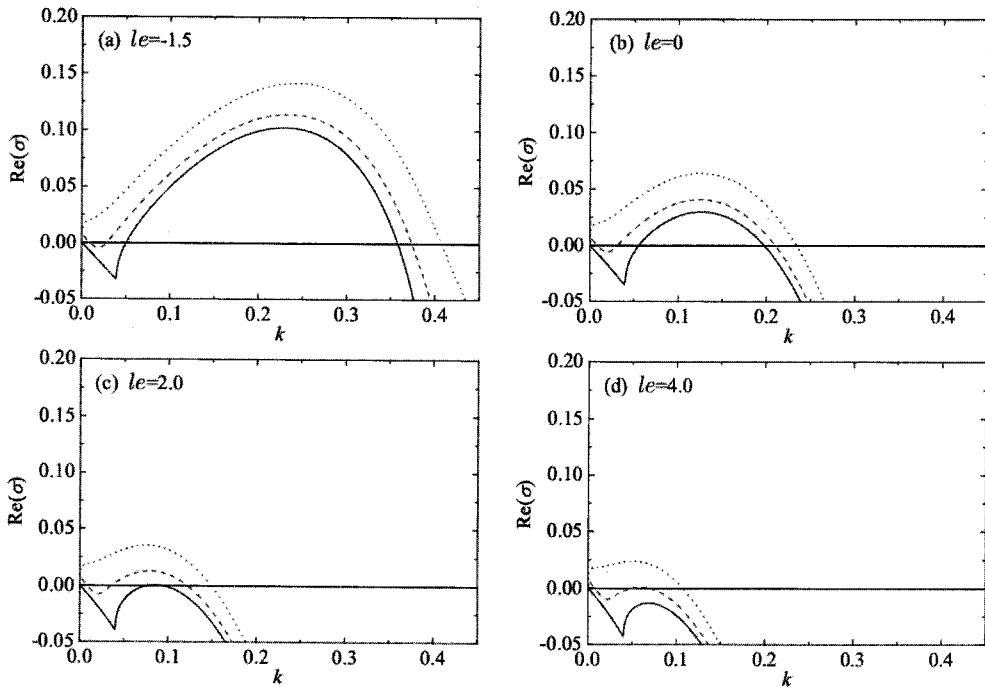


Fig. 2 화염의 각도와 Lewis 수에 따른 안정성의 변화; —:  $\phi_f = 0^\circ$ , ----:  $\phi_f = 30^\circ$ ; .....:  $\phi_f = 60^\circ$



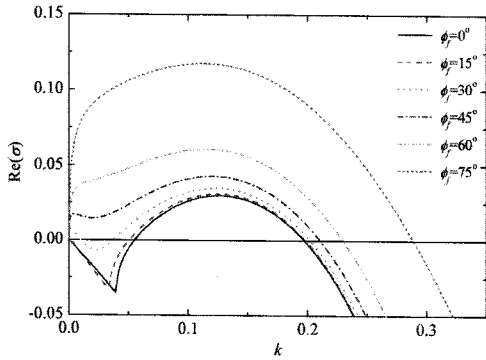


Fig. 3 중력의 영향을 고정시킨 상태에서 유동이 화염의 안정성에 미치는 영향;  $Fr=23.17, le=0$

는 것처럼 기본유동에서 화염의 하류에 형성되는 와도 ( $g_y d / U_L^2 \gamma$ )의 크기가 증가하므로 평행한 전단흐름에서와 같이 유동이 보다 불안정해진다. 또한 식 (14)로부터 화염대 전후의 점선 방향 속도의 불연속  $V_2 - V_1$ 의 크기가 증가함을 알 수 있는데 이것은 Kelvin-Helmholtz 불안정성의 영향이 커짐을 의미한다.

화염의 각도에 따른 불안정성의 증가 요인이 위의 두 가지와 같을 때 첫 번째 요인은 이미 잘 알려져 있는 바이고 본 연구에서 우리의 관심은 유동이 화염에 미치는 영향이다. 따라서 중력의 효과를 나타내는 파라미터  $Fr$  수를 아래와 같이 정의하고

$$Fr = \frac{U_L^2}{(1-\gamma)g_x d}$$

이 값을 일정하게 유지한 상태에서 화염의 각도를 바꾸어가며 안정성의 변화를 살펴보았으며 그 결과를 Fig. 3에 도시하였다. 그림에서 보면 관성력과 실질 중력의 비가 일정한 상태에서 화염의

각도가 커지면 화염이 보다 불안정해짐을 알 수 있다. 이로부터 각도에 따른 화염 불안정화 요인은 실질 중력의 감소뿐만 복잡해진 유동장의 요인이 크게 작용하고 있음을 알 수 있다.

다음으로 점성이 화염의 안정성에 미치는 영향을 살펴보자. 이에 관한 기존 연구로서 [5, 15]에 따르면 수직 평면화염의 경우에는 점성이 화염의 안정성에 아무런 영향을 미치지 못한다. 수직 평면 화염에 대해 점성항이 화염대 내부의 해를 비롯해 화염대 바깥의 외부 유동장의 해에서도 나타나지만 최종적으로 분산 방정식에는 나타나지 않는다. 이것은 각각에서의 점성의 역할이 서로 상쇄(counter-balance)되어 없어짐으로 인해 나타나는 결과이다[5]. 그러나 화염이 기울어져 있는 경우에 대해서 얻은 본 연구의 결과식(부록)은 동 점성 계수의 파라미터  $Pr_1$ 을 포함하고 있다. 즉 수직평면화염의 경우에는 나타나지 않던 점성의 영향이 화염이 기울어진 경우에는 나타난다는 것이다. 이것을 정량적으로 살펴보기 위해  $Pr_1$ 의 값을 달리하면서 화염 각도와  $le$ 의 값에 따른 안정화 특성을 살펴보았으며 Fig. 4에 도시하였다. 그림에서 보면  $Pr_1$ 의 값이 증가함에 따라 화염이 보다 불안정해짐을 알 수 있다. 점성의 효과는 짧은 파장(큰  $k$ )의 영역에서 상대적으로 크게 나타나며 불안정한 화염에 대해 예를 들면  $le = -1.5$ 의 경우에 대해 보다 두드러지게 나타나고 있음을 알 수 있다. 평면화염이 기울기를 가지게 되었을 때 점성의 효과가 나타난다는 것은 수직 평면화염이 보여 주었던 상쇄 작용에 일정 부분 차이가 생기고 그 만큼의 차가 그림과 같이 나타나게 됨을 의미한다. 점성의 영향과 관련하여 수직평면화염에 대해 안정성의 고유치 문제를 수치적인 방법을 사용하여 해결한 결과가 있다[18]. 그 결과에 따르면 점성의 효과는 매우 작지만 화염을 아주 조금 불안정화시키는 영향이

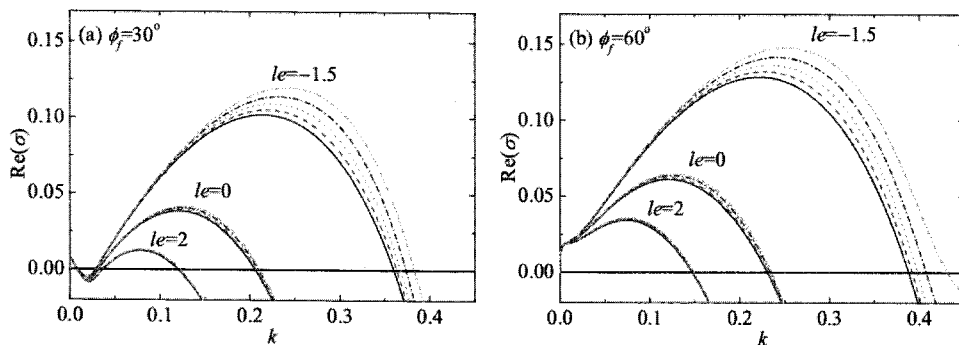


Fig. 4 점성 계수  $Pr_1$ 의 변화에 따른 화염 안정성의 변화; —:  $Pr_1=0$ , ---:  $Pr_1=0.25$ ; .....:  $Pr_1=0.5$ ; - · - ·:  $Pr_1=0.75$ ; — — —:  $Pr_1=1$

있음을 보여주고 있으며 이것은 수직평면화염에 대한 [5, 15]의 연구에서 무시되었던  $O(\epsilon^3)$ 의 항에 포함된 점성의 역할을 정량적으로 보여준 것이다. 그러나 화염이 점점 기울어지면 점성항의 크기가 점차적으로 커져서 무시될 수 없는 크기가 되고 결과적으로 부록과 같은 점근해에 나타나게 된다.

수직평면화염에 대한 기존의 결과[18]와 본 연구의 결과를 종합하면 점성은 평면화염을 불안정화시키는 역할을 한다. 그러나 의문의 여지는 아직도 남아 있다. 왜냐하면 점성의 온도 의존성을 고려하여 수직평면화염을 해석한 [2, 19]의 결과에 따르면 점성은 화염을 조금 안정화시키는 역할을 한다. 거칠게 생각해보면 화염이 기울어져 있을 때 점성에 의한 화염 불안정화의 특성은 상대적으로 크기 때문에 점성의 온도 의존성은 별로 중요치 않을 것이다. 그러나 한 가지 기억해야 할 점은 순수 유체역학적 문제에 있어서 점성은 유동을 안정화시키거나 혹은 불안정화시키는 두 가지의 가능성을 항상 가지고 있다는 사실이다. 따라서 복잡한 구성을 가지는 연소 문제에 있어서 점성의 역할을 단 한가지로서 주장하는 것은 무리가 따르는 일이라 생각된다. 단지 수직 평면화염이 아닌 기울어진 화염, 더 나아가 곡면화염과 같은 일반적인 경우에 점성이 화염의 안정성에 영향을 미친다는 사실만은 확실하다고 할 수 있겠다.

이제 화염의 위상 속도(phase velocity)에 대해 살펴보자. 수직평면화염에 대해서는 기본 유동과 중력이 모두 화염에 수직하므로 불안정한 화염의 섭동은 움직이지 않고 제자리에 멈춰 있다. 그러나 화염이 기울어지면 점선 방향의 유동이 존재하므로 화염의 파동은 정지해 있지 않고 점선 방향으로 움직이게 된다. 정규 모드의 정의로부터 화염면의 무차원 위상 속도는 다음과 같이 정의되며

$$c = -Im(\sigma)/k$$

화염에 가해지는 모든 파장의 섭동 중에서 가장 불안정한 섭동이 현상적으로 가장 먼저 관찰될 가능성을 가지므로  $Re(\sigma)$ 값이 최대값을 가지는  $k$ 를 조사하고 이 때의 위상속도를 도시하면 Fig. 5와 같다. 먼저 화염의 각도가 증가함에 따라 위상속도가 증가함은 물리적 직관에 따라 당연하다. 그러나 Lewis 수에 따라 위상속도가 달라진다는 것은 매우 주목할 만한 결과이다. 먼저  $le=0$ 이면, 즉  $Le=1$ 이면 위상 속도는 반응대에서의 점선방향 속도  $V_2$ 와 같다. 그리고  $Le > 1$ 이면  $c > V_2$ 이고  $Le < 1$ 이면  $c < V_2$ 이다. 이 결과는 동일한 각도와 연소 속도를 가지는 기울어진 두 화염이 있을 때 불안정한 화염 파동의 위상속도는 Lewis 수가 큰 화염에 대해 더 빠르다는 것을 의미한다.

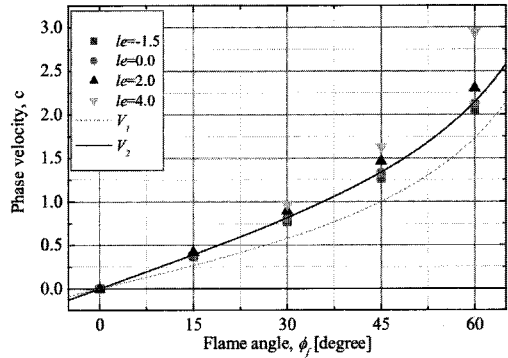


Fig. 5 화염의 각도와 Lewis 수에 따른 가장 불안정한 섭동의 위상 속도

마지막으로 화염 안정의 한계를 나타내는 중립 안정성 곡선은 Fig. 6에 도시하였다. 화염의 각도가 0인 경우 그림에서 보는 것처럼 임계 Lewis 수 이상의 경우에 화염은 항상 안정함을 알 수 있으며 화염의 각도가 점점 커짐에 따라 불안정 영역이 점점 증가함을 볼 수 있다. 따라서 기울어진 화염은 수평하게 놓인 화염보다 더 불안정하다. Fig. 6에는 또한 주어진 조건에서 가장 불안정한 섭동의 파장을 함께 도시하였다. 주목할만한 사실은 가장 빨리 자라나는 섭동의 파장은 화염의 각도에 거의 무관하며 오직 Lewis 수에만 관계된다는 것이다. 다시 말해서 수평한 화염이든 기울어진 화염이든 동일한 조건하에서 나타나는 불안정성이 보여주는 특성 길이는 같다는 것이다.

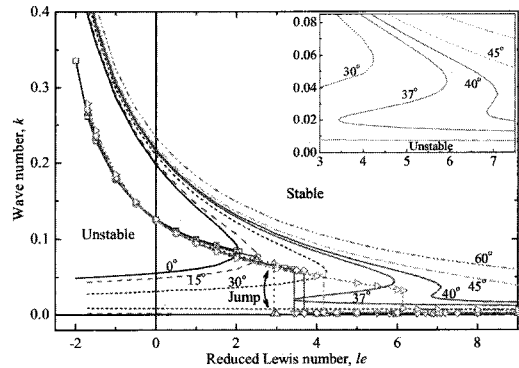


Fig. 6 화염 각도에 따른 중립 안정성 곡선. 곡선은 marginal wavenumber를 나타내며 도형은 가장 불안정한 파수를 나타낸다. □:  $\phi_f = 0^\circ$ ;  $\Delta$ :  $\phi_f = 30^\circ$ ;  $\nabla$ :  $\phi_f = 37^\circ$ ;  $\diamond$ :  $\phi_f = 40^\circ$ ;  $\triangleleft$ :  $\phi_f = 45^\circ$ ;  $\triangleright$ :  $\phi_f = 60^\circ$

### 6. 결론

지금까지 중력장 하에서 기울어진 평면화염을

기본 유동장으로 채택하여 그 안정성을 점근적으로 해석하였다. 저자들이 이전에 발표한 연구[14]에 따르면 본 연구의 기본 유동은 실제 화염을 정성적으로 잘 묘사하고 있으므로 본 연구의 결과가 가지는 물리적인 의미는 실제 수행된 실험으로 인해 어느 정도 뒷받침된다고 하겠다.

본 연구에서 주된 관심은 유동장의 영향, 특히 화염에 의해 생성된 와동이 화염의 안정성에 미치는 영향에 관한 것이었다. 화염의 각도가 커짐에 따라 화염은 더욱 불안정해지는데 이것은 화염에 수직한 방향의 중력의 감소뿐만 아니라 각도에 따라 하류에 형성되는 와도 유동이 화염을 불안정하게 만드는 것에 기인한다. 유체 점성이 안정성에 미치는 영향을 살펴보았으며 기울어진 평면 화염에 대해 화염을 불안정하게 만드는 것으로 파악되었다. Lewis 수의 역할은 기존에 알려진 바와 같이 불안정한 섭동의 증가율에 영향을 주는 것뿐만 아니라 섭동의 위상 속도를 변화시킨다는 사실을 최초로 밝혀내었으며 열과 물질 확산의 크기가 같다면 섭동의 위상 속도는 반응대에서의 점선방향 속도  $V_2$ 와 같은 크기를 가지며 Lewis 수가 커지면 위상 속도도 커진다.  $V_2$ 의 속도로 화염면을 따라가면서 움직이는 좌표계에서 생각하면 Lewis 수가 1보다 큰 화염과 작은 화염에 대해 섭동은 반대 방향으로 움직이게 된다. 이러한 선형 안정성 해석의 결과가 그 이후에 나타나게 될 비선형적 거동의 초기 조건을 형성하게 된다는 사실을 받아들인다면 위상 속도의 Lewis 수 의존성은 화염 형상의 차이를 유발하게 될 가능성이 있다.

본 연구에서 예측된 결과들을 실험적으로 밝히는 것은 흥미있는 실험이 될 것이다. 그러나 기울어진 평면 화염을 실험적으로 만드는 것은 매우 어려운 일이므로 그 대안으로서 저자들이 수행한 실험[14]과 같이 열선에 의해 붙잡혀 있는 V 화염을 만들어서 관찰함으로써 이에 대한 실험적인 증거를 찾을 수도 있을 것이다.

## 후 기

본 연구는 KAIST 연소기술연구센터(CERC)의 연구비 지원에 의해 수행되었습니다.

## 참고문헌

[1] Bychkov, V. V. and Liberman, M. A., "Dynamics and stability of premixed flames," *Physics Reports*, 325, 2000, pp.115-237.  
 [2] Clavin, P. and Garcia, P., "The influence of the temperature dependence of diffusivities on

the dynamics of flame fronts," *J. Mec. Theor. Appl.*, 2, 1983, pp.245.

[3] Clavin, P. and Williams, F. A., "Effects of molecular diffusion and of thermal expansion on the structure and dynamics of premixed flames in turbulent flows of large scale and low intensity," *J. Fluid Mech.*, 116, 1982, pp.251-282.

[4] Drazin, P. G. and Reid, W. H., "Hydrodynamic Stability," *Cambridge University Press*, 1981.

[5] Frankel, M. L. and Sivashinsky, G. I., "The effect of viscosity on hydrodynamic stability of a plane flame front," *Combust. Sci. and Tech.*, 29, 1982, pp.207-224.

[6] Hayes, W. D., "The vorticity jump across a gasdynamic discontinuity," *J. Fluid Mech.*, 2, 1959, pp.595-600.

[7] Joulin, G. and Clavin, P., "Linear stability analysis of nonadiabatic flames : Diffusional-thermal model," *Combust. Flame*, 35, 1979, pp.139-153.

[8] Lee, D. K., Kim, M-U. and Shin, H. D., "Stability of laminar premixed planar flame with tangential velocity discontinuity," *The 4th Asia-Pacific Conference on Combustion*, 2003, pp.160-164.

[9] Lee, D. K., Kim, M-U. and Shin, H. D., "Stability of inclined planar flames as a local approximation of weakly curved flames," *Combust. Theory Modelling, Submitted*, 2004.

[10] Lighthill, J., "Waves in fluids," *Cambridge University Press*, 1978.

[11] Matalon, M. and Matkowsky, B. J., "Flames as gasdynamic discontinuity," *J. Fluid Mech.*, 124, 1982, pp.239-259.

[12] Nayfeh, A. H., "Perturbation methods," *Wiley & Sons, Inc.*, 1973.

[13] Olver, F. W. J., "Introduction to asymptotics and special functions," *Academic press*, 1974.

[14] Park, J. H., Lee, D. K., Shin, H. D. and Kim, M-U., "Basic flow fields and stability characteristics of two dimensional V flames," *27th KOSCO Symposium*, 2003, pp.185-193.

[15] Pelce, P. and Clavin, P., "Influence of hydrodynamics and diffusion upon the stability limits of laminar premixed flames," *J. Fluid Mech.*, 124, 1982, pp.219-237.

[16] Pinder, M-Z. and Talbot, L., "Some fluid dynamic considerations in the modeling of flames," *Combust. Flame*, 73, 1988, pp.111-125.

[17] Saffman, P. G., "Vortex Dynamics," *Cambridge University Press*, 1992.

[18] Sharpe, G. J., "Linear stability of planar premixed flames: reactive Navier-Stokes equations with finite activation energy and arbitrary Lewis number," *Combust. Theory Modelling*, 7, 2003, pp.45-65

[19] Williams, F. A., "Combustion Theory," *Addison-Wesley*, 1985.

[20] Zel'dovich, Y. B., Barenblatt, G. I., Librovich, V. B. and Makhviladze, G. M., "The Mathematical Theory of Combustion and Explosions," *Consultants Bureau, New York*, 1985.

## 부 록

4절에서 수행한 해석의 결과로서 섭동의 분산 방정식(dispersion relation)을 얻을 수 있으나 그 결과가 complementary error function을 포함하고 있으므로  $\sigma$ 를  $k$ 로써 표현하는 해를 해석적으로 구할 수 없다. 따라서 편의에 따라 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$\mathcal{D}_D(\sigma, k) + \mathcal{D}_C(\sigma, k) + \mathcal{D}_Z(\sigma, k) = 0$$

여기서 각각의 항은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathcal{D}_D = \frac{Pr_1}{i3\omega_b} \gamma (1-\gamma)^2 \left( \sigma + \frac{1}{(1-\gamma)} k \right)^2 \left( \sigma - \frac{2}{(1-\gamma)} k \right) \left( \sigma^2 + k\sigma + \frac{1}{1-\gamma} \frac{1}{Fr} \right) \left\{ \frac{1}{(1-\gamma)\sigma + k} - f_1(\sigma, k) \right\}$$

$$\mathcal{D}_C = \mathcal{D}_{C0}(\sigma, k) + f_1(\sigma, k) \mathcal{D}_{C1}(\sigma, k)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{C0} = & \frac{4}{3} (1-\gamma)^2 Pr_1 Fr k \sigma^3 + \left\{ -\gamma (1-\gamma) Pr_1 Fr k^2 + \left[ \frac{2}{3} (6-5\gamma) Pr_1 + \ln \frac{1}{1-\gamma} \right] k \right\} \sigma^2 \\ & + \left\{ -\frac{2}{3} (3-\gamma) Pr_1 Fr k^3 + \left[ \frac{2}{3} (1-3\gamma) Pr_1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \left( \frac{\mathcal{L}}{d} - \ln \frac{1}{1-\gamma} \right) \right] k^2 + 2k \right\} \sigma \\ & - \frac{2}{3} Pr_1 Fr k^4 + \left\{ -\frac{1}{3} Pr_1 + \frac{1}{1-\gamma} \left( 2 \frac{\mathcal{L}}{d} - \ln \frac{1}{1-\gamma} \right) \right\} k^3 + \left\{ \frac{V_2}{V_1} - \frac{1}{1-\gamma} - \frac{\gamma}{3(1-\gamma)} \frac{Pr_1}{Fr} \right\} k^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{C1} = & -\frac{5}{3} (1-\gamma)^3 Pr_1 Fr k \sigma^4 + (1-\gamma) \left\{ -\frac{4}{3} (1-\gamma)^2 Pr_1 Fr k^2 + \gamma \left( Pr_1 - \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{1-\gamma} \right) k \right\} \sigma^3 \\ & + (1-\gamma) \left\{ 3 Pr_1 Fr k^3 - \left[ (1-2\gamma) Pr_1 + \frac{2-\gamma}{1-\gamma} \ln \frac{1}{1-\gamma} \right] k^2 + \frac{\gamma}{1-\gamma} k \right\} \sigma^2 \\ & + \left\{ \frac{2}{3} (5-3\gamma) Pr_1 Fr k^4 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \left( \frac{\mathcal{L}}{d} - \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{1-\gamma} \right) k^3 + \gamma \left[ 1 + \frac{1}{Fr} \left( Pr_1 - \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{1-\gamma} \right) \right] k^2 \right\} \sigma \\ & + \frac{2}{3} Pr_1 Fr k^5 + \left\{ Pr_1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} \left( \frac{\mathcal{L}}{d} - \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1}{1-\gamma} + 1 \right) \right\} k^4 - \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{1}{Fr} \left( \frac{\mathcal{L}}{d} k - 1 \right) k^2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_Z = \mathcal{D}_{Z0}(\sigma, k) + f_1(\sigma, k) \mathcal{D}_{Z1}(\sigma, k)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{Z0} = & i2V_1(1-\gamma)^2 Pr_1 Fr k^2 \sigma^2 \\ & + \frac{iV_1}{3} \left\{ \left( -\frac{3\gamma}{1-\gamma} + i4V_1 \right) (1-\gamma)^2 Pr_1 Fr k^3 + 2 \left[ 2(6-5\gamma) Pr_1 + 3 \ln \frac{1}{1-\gamma} \right] k^2 + 6\gamma \frac{Pr_1}{Fr} k \right\} \sigma \\ & - \frac{iV_1}{3} (1-\gamma) Pr_1 Fr \left\{ \frac{3-\gamma}{1-\gamma} + (1-\gamma) V_1^2 + iV_1 \gamma \right\} k^4 \\ & + \frac{iV_1}{3} \left\{ (1-\gamma) Pr_1 + \frac{3\gamma}{1-\gamma} \left( \frac{\mathcal{L}}{d} - \ln \frac{1}{1-\gamma} \right) - 2Pr_1 [2\gamma - iV_1(6-5\gamma)] + i3V_1 \ln \frac{1}{1-\gamma} \right\} k^3 \\ & + \left\{ -2V_1 \omega_b (1-\gamma) Pr_1 + i \left( V_1 + V_2 - \omega_b \frac{\mathcal{L}}{d} \right) \right\} k^2 + i\omega_b k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{Z1} = & -i\frac{10}{3}V_1(1-\gamma)^3Pr_1Frk^2\sigma^3 + \frac{iV_1}{3}(1-\gamma)\left\{-2(3+i5V_1)(1-\gamma)^2Pr_1Frk^3 + 9\gamma\left(Pr_1 - \frac{1}{\gamma}\ln\frac{1}{1-\gamma}\right)k^2\right\}\sigma^2 \\
& + iV_1\left\{\frac{1}{3}(1-\gamma)Pr_1Fr[9-iV_1(4+i5V_1)(1-\gamma)^2]k^4\right. \\
& \quad - (1-\gamma)\left[\left(1-3\gamma\right)Pr_1 + \frac{2(2-\gamma)}{1-\gamma}\ln\frac{1}{1-\gamma} - i3V_1\gamma\left(Pr_1 - \frac{1}{\gamma}\ln\frac{1}{1-\gamma}\right)\right]k^3 \\
& \quad \left. + \frac{\gamma}{1-\gamma}\frac{1}{Fr}\left[\frac{\mathcal{L}}{d} - \frac{1}{\gamma}\ln\frac{1}{1-\gamma} + (1-\gamma)(2Fr-Pr_1)\right]k^2\right\}\sigma \\
& + \frac{iV_1}{3}(1-\gamma)Pr_1Fr\left\{\frac{5-3\gamma}{1-\gamma} + i3V_1 + V_1^2(1+iV_1)(1-\gamma)^2\right\}k^5 \\
& + iV_1\left\{-\frac{iV_1}{3}(1-\gamma)^2Pr_1 + \frac{\gamma}{1-\gamma}\left[\frac{\mathcal{L}}{d} + iV_1(1+iV_1)(1-\gamma)^2Pr_1\right]\right. \\
& \quad \left.- \left[\frac{1}{1-\gamma} + iV_1(2-\gamma) - V_1^2(1-\gamma)\right]\ln\frac{1}{1-\gamma}\right\}k^4 \\
& + i\omega_b\left\{-iV_1(1-\gamma)Pr_1 + iV_1\left(\frac{\mathcal{L}}{d} - \frac{1}{\gamma}\ln\frac{1}{1-\gamma}\right) + \frac{\mathcal{L}}{d} - \frac{1-\gamma}{\gamma}\ln\frac{1}{1-\gamma} + (1-\gamma)(1+iV_1)Fr\right\}k^3
\end{aligned}$$

위 식들에서 사용된  $f_1(\sigma, k)$ 와  $\zeta$ 의 정의는 다음과 같다.

$$f_1(\sigma, k) = \epsilon^{-1}F_1(0) = \left(\frac{\pi}{i2\omega_b(1-\gamma)k}\right)^{1/2} e^{\zeta^2} \operatorname{erfc}(\zeta)$$

$$\zeta = \frac{(1-\gamma)(\sigma + iV_2k) + k}{\sqrt{i2\omega_b(1-\gamma)k}}$$