PUBLICATIONS OF THE KOREAN ASTRONOMICAL SOCIETY
**19**: 1 ~ 10, 2004

# 건드림된 프리이드만 시공간 속의 각지름 거리: 중력파의 효과
# ANGULAR DIAMETER DISTANCE IN PERTURBED FRIEDMANN SPACETIME: EFFECTS OF GRAVITATIONAL WAVES

송 두 종
한국천문연구원, 대전 305-348
D. J. SONG
Korea Astronomy Observatory, 305-348, Daejeon
*E-mail: djsong@kao.re.kr*

*(Received December 15, 2004; Accepted December 28, 2004)*

**ABSTRACT**

On the framework of a linearly perturbed Friedmann-Robertson-Walker spacetime, we derive an expression for the cosmological angular diameter distance affected by scalar and tensor perturbations. Our expression is applicable in linear order to distances in general FRW models. We study the effect of a stocastic gravitaional wave background on the two-point correlation function of the angular diameter distance fluctuations and, on the basis of this, we also derive an expression for the power spectrum of the angular diameter distance fluctuations.

*Keywords*: Linear perturbation theory; Gravitational waves; Gravitational lensing; Cosmological distances.

## 1. 서론

천체관측은 천체물리학적 천체로부터 나온 광자들을 측정함으로써 이루어진다. 마지막 산란표면 혹은 먼 천체에서 나온 광자들은 관측지점까지 도달하는 동안, 건드림된 시공간의 영향을 받아서 에너지가 바뀌고 빛살의 경로가 쏠림을 받는다.

선형건드림이론에 따르면, 시공간의 건드림은 스칼라 방식, 벡타 방식 및 텐서 방식 건드림으로 분해할 수 있고, [Bardeen 1980; Hwang 1991; Noh & Hwang 1995] 건드림된 프리이드만 시공간에 대한 빛형측지선 방정식의 해를 구함으로써 많은 학자들이 광자의 에너지 편이와 중력쏠림을 연구하였다. [Panek 1985; Pyne & Birkinshaw 1993; Durrer 1994] 그 중에서도 관심을 가지는 영역은 중력파동으로 대표되는 텐서건드림의 영향이다. [Linder 1988a,b; Bar-Kana 1996; Pyne et al. 1996; Kaiser & Jaffe 1997; Mollerach 1998; Jaffe 2004]

중력파동은 시공간의 잔 물결로써 빛의 속도로 전파되는 것으로 일반상대성이론의 자연스러운 결과로 존재한다. 중력파동을 내비치는 샘의 물리학적 특성에 따라 우주론적인 것과 천체물리학적인 것으로 크게 나눌 수 있다. 우주론적 중력파는 초기 인플레이션 시기의 양자론적 흔들림에 의해 생겨난다는 것이 알려져 있고, [Kosowsky et al. 1992; Liddle & Lyth 1992; Liddle & Lyth 2000; Dodelson 2003] 그 대표적 특성은 확률론적 중력파뒷마당을 형성하고, 그 멱빛띠는 척도-독립이다. 천체물리학적 중력파동의 샘은 매우 다양한데, 대표적인 것은 초신성 폭발, 은하의 중심부에 존재할 것으로 믿어지는 무거운 블랙홀 쌍성계와 같은 밀집성들의 격렬한 시간적 변화에 따라 발생되는 것이다. [MTW 1973; Muller & Janka, 1997; Cutler & Thorne 2002]

이 논문에서는 확률론적 중력파동 뒷마당이 빛살에 미치는 영향으로 문제를 국한하고, 우주의 확률론적 중력파동 뒷마당이 광자들의 빛살에 미치는 영향을 계산함으로써, 우주론적 각지름 거리의 변화량을 정성적으로 계산해본다.

이 논문의 구성은 제2장에서 선형건드림된 시공간으로 건드림된 시공간을 선택하고, 적절한 게이지 조건을 도입함으로써 스칼라 및 텐서건드림을 정의한다. 이 바탕 위에서 빛다발 속에 간격벡타를 도입한 빛형측지선 벗어나기 방정식을 기술함으로써 그 미분방정식의 해를 재조명하고, 제3장에서는 영사막 위에서 빛다발의 자름넓이(cross section)를 정의하고 각지름거리에 대한 공식을 스칼라 건드림 및 텐서건드림으로 나누

어 정의한다. 제4장에서는 확률론적인 중력파동의 뒷마당에 바탕을 두고, 각지름거리 흔들림의 상관관계함수를 계산하고, 여기서 얻어지는 각지름거리 흔들림의 멱빛띠에 대한 공식을 텐서건드림의 영향을 중심으로 기술한다.

앞으로의 계산에 $c = G = 1$로 두었다.

## 2. 빛형 측지선 벗어나기 방정식과 간격벡타

우리는 먼 천체에서 나온 빛이 관측자에게 도달하는 동안 여행하는 우주론적 시공간으로 선형 건드림된 FRW 시공간 모형을 선택하고, 그 시공간의 계량을

$$ds^2 = a^2(\eta)\{-(1+2\varphi)d\eta^2 + [(1-2\varphi)\gamma_{ij} + C_{ij}^{(t)}]dx^i dx^j]\} \quad (1)$$

처럼 도입한다. 여기서 $a$는 우주의 크기인자, $\eta$는 한꼴시간으로 $dt = a(\eta)d\eta$를 만족하고, $\varphi$는 스칼라 포텐셜, 그리고 $C_{ij}^{(t)}$는 텐서형 건드림을 나타낸다. 텐서형 건드림은 가로-흔적없음 (TT) 게이지, $C_{ij}^{(t)|j} = 0 = C_j^{(t)j}$가 만족되도록 선택되었다. [Sachs & Wolfe 1967; Bardeen 1980; Noh & Hwang 1995] 뒷마당 프리이드만 시공간에 대한 계량으로 잘 알려진 꼴, $\gamma_{ij} = \gamma^{-2}\delta_{ij}$을 택하였다. 이 경우에 $\gamma(r) = 1 + \frac{\kappa r^2}{4}$이고, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$이며, $\kappa$는 곡률을 나타내는 인자이다. [Mcvitte 1964; Anile & Motta 1976]

이 논문에서 $a, b = 0, 1, 2, 3$으로 그리고 $i, j = 1, 2, 3$으로 나누어 쓴다.

건드림된 시공간을 여행하는 빛살의 변화를 살펴보기 위해, 먼 천체에서 나와 관측자까지 도달하는 빛형 측지선 $x^a(\lambda)$로 구성된 무한소 빛다발을 생각한다. 빛다발 속의 한 빛형 측지선을 택하여 기준 측지선으로 삼고, 이 위에서 관측자의 위치는 아핀맺음변수 $\lambda_O$으로, 샘의 위치는 $\lambda_S$으로 표시한다. 기준 측지선 상의 한 점 $\lambda_q$에서 결정되는 접선벡타를 $k^a$로 나타내면, 빛형 측지선 방정식 $k^a_{;b}k^b = 0$ 의 해가 되고, 빛형 조건 $k_b k^b = 0$ 를 만족한다.

기준 빛형 측지선, $x_R$ 상의 한 점 $\lambda_q$에서 결정된 접선벡타 $k^a$에 수직한 공간을 설정한다. 이 공간 상에서 기준 빛형측지선과 이웃하는 측지선 사이의 간격은

$$Y^a = x^a - x^a_R$$

가 되는데, 이것을 간격벡타라 부르고, 빛형측지선 벗어나기 방정식

$$\frac{D^2 Y^a}{d\lambda^2} = -R^a{}_{bcd}k^b k^d Y^c \quad (2)$$

의 해가 된다. 이렇게 결정되는 간격벡타는 빛살의 진행방향에 수직하는 영사막 위에 놓여있게 된다.

영사막을 설정하기 위해, 무한소 빛다발로 연결된 샘과 관측자를 생각하자. 샘 또는 관측자의 4차원 속도를 $u^a$라 하면, 무한소 빛다발 속의 기준 빛형 측지선 $x_R$ 상의 한 점 $\lambda_q$에서의 빛형 접선벡타 $k^a$와 4차원 속도 $u^a$에 수직한 초곡면을 잘라낼 수 있다. 이 초곡면 상에, 위에서 도입한 간격 벡타 $Y^a$를 정의하면, Hawking(1973)과 Schneider et al. (1992)에 따르면, 점 $\lambda_q$에서 접선벡타와 4차원 속도에 수직한, 영이 아닌 간격 벡타의 공간 성분을 가진 초곡면이 영사막이 된다.

샘에서 나온 빛다발은 관측지점에서 한 점에 모이고, 이 점에서 간격벡타는 영이 된다: $Y^a(\lambda_O) = 0$. 따라서 빛다발의 자름넓이도 영이 된다. 그렇지만 간격벡타의 아핀맺음변수에 대한 도함수의 값은 영이 아니다. 그것을 $\frac{DY^a}{d\lambda}|_O = \dot{Y}^a(\lambda_o)$ 로 나타내면, 영사막 위에서 다음을 만족시킨다:

$(k_a \dot{Y}^a)(\lambda_O) = 0$ : 동위상성

$(u_a \dot{Y}^a)(\lambda_O) = 0$ : 동시성

이것이 뜻하는 것은 샘에서 같은 시간에 같은 위상을 가지고 출발한 빛은 관측자에게 같은 시간에 같은 위상을 가지고 도달한다는 것을 보장해주고, 영사막의 중요한 특성이 된다.

Hawking (1973)에 따르면, 빛형측지선 조건 $k_b k^b = 0$은 기저 $e_0^a = k^a$가 되도록 영사막 위에 유사직교맞춤 기저를 선택할 수 있게 한다. 여기에 더하여 기저 $e_3^a$를 $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$, $\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_3 = -1$처럼 택하면, 빛다발의 서로 이웃하는 두 점을 연결하는 간격벡타의 성분을

$$Y^a = e_m^a \xi^m + e_0^a \xi^0$$

처럼 분해할 수 있다. 여기서 $m = 1, 2$이다. 이것은 영사막 위에서 간격벡타의 성분으로 $\xi^m$만을 택하면 충분하다는 것을 알려준다. 그러면 식 (2)에 주어진 빛형측지선 벗어나기 방정식은 $\xi^m$에 대한 보통미분방정식으로 바뀌고,

$$\frac{d^2\xi^m}{d\lambda^2} = -T_{mn}\xi^n \quad (3)$$

처럼 쓰여질 수 있다. 여기서 광학적 조석힘 행렬 $T_{mn}$는 리이만텐서를 사용하여

$$T_{mn} = e_m^a R_{abcd} k^b k^d e_n^c = W_{mn} + \frac{1}{2}\delta_{mn} R \quad (4)$$

로 정의되었고, $W_{mn}$과 $R$은 각각 Weyl 초점맞추기 텐서와 리치 초점맞추기 스칼라라고 부르는데, 리이만 텐서 $R_{abcd}$를 리치 텐서 $R_{ab}$와 Weyl 텐서 $C_{abcd}$로 분해하면, 각각

$$W_{mn} = e_m^a C_{abcd} k^b k^d e_n^c, \quad R = R_{ab} k^a k^b \quad (5)$$

처럼 정의된다. Weyl 텐서의 특성에서 흔적없음 조건 $W_n^n = 0$과 대칭조건 $W_{mn} = W_{nm}$이 성립한다는 것을 알 수 있다.

선형 건드림된 프리이드만 시공간의 계량 식 (1)을 이용하면, 광학적 조석힘 행렬의 성분을 뒷마당 시공간 부분과 건드림된 시공간 부분으로 나누어 기술할 수 있다. 앞으로 뒷마당 시공간 성분을 부호 (0)를 사용하여 나타낸다.

건드림된 FRW 시공간에서 빛형 접선벡타 $k^a$ 및 영사막 위의 간격벡타 성분 $\xi^m$을 다음과 같이 어림 잡는다:

$$k^a = k^0_{(0)}[n^a_{(0)} + \delta n^a], \quad \xi^m = \xi^m_{(0)} + \Xi^m$$

여기서 $n^a_{(0)}$는 $k^0_{(0)}$로 틀맞춤되었고, 그 성분을 $n^a_{(0)} = (1,0,0,\gamma)$로 택하였다. 그러면 아핀맺음변수 $\lambda$는 $k^0_{(0)}$를 매개로 새로운 맺음변수 $y$를 $dy = k^0_{(0)}d\lambda$처럼 택할 수 있고, 유사직교맞춤기저의 공간 성분을 조건 $e^j_m n_{(0)j} = 0$이 되도록 선택하면, 그 성분은 우리가 선택한 FRW 뒷마당 시공간에서 $e^j_m = \gamma\delta^j_m$가 된다.

그러면 선형건드림된 프리이드만 방정식의 뒷마당 시공간과 건드림된 시공간에 대한 각각의 빛형측지선 벗어나기 미분방정식

$$\frac{d^2\xi^m_{(0)}}{dy^2} = -\frac{1}{2}T_{(0)mn}\xi^n_{(0)}, \tag{6}$$

$$\frac{d^2\Xi^m}{dy^2} + \kappa\gamma_{mn}\Xi^n = -\delta T_{mn}\xi^n_{(0)} \tag{7}$$

을 얻고, 미분방정식의 구동력을 구성하는 행렬 $T_{(0)mn}$ 및 $\delta T_{mn}$은 각각 다음과 같다:

$$\begin{aligned}
T_{(0)mn} &= 2\kappa\gamma_{mn}\\
\delta T_{mn} &= W_{mn} + \frac{1}{2}\delta R\gamma_{mn}\\
\delta R &= 4\kappa(\gamma_{kl}n^k_{(0)}\delta n^l) + 2\varphi|^l_{|k} - 2\varphi_{,00} - 4\varphi_{,0|k}n^k_{(0)}\\
&\quad + \frac{1}{2}(C^{(t)}_{kl,00} - C^{(t)|m}_{kl|m})n^k_{(0)}n^l_{(0)},\\
W_{mn} &= 2e^i_m\varphi_{|ij}e^j_n - \gamma_{mn}(\gamma^{kl} - n^k_{(0)}n^l_{(0)})\varphi_{|kl}\\
&\quad + \frac{1}{2}e^i_m[-\frac{d^2}{dy^2}C^{(t)}_{ij} + 2\frac{d}{dy}C^{(t)}_{ij} - C^{(t)}_{kl|ij}n^k_{(0)}n^l_{(0)}]e^j_n\\
&\quad - \frac{1}{4}\gamma_{mn}[(C^{(t)}_{kl,00} - C^{(t)|r}_{kl|r})n^k_{(0)}n^l_{(0)}].
\end{aligned} \tag{8}$$

여기서 $\kappa$는 시공간의 곡률인자이고, $\gamma_{kl}n^k_{(0)}\delta n^l$는 빛형 접선벡타의 조건에서

$$n_{(0)k}\delta n^k = \delta n^0 + 2\varphi - \frac{1}{2}C^{(t)}_{kl}n^k_{(0)}n^l_{(0)} \tag{9}$$

이 됨을 알 수 있다.

식 (6)과 (7)에 주어진 미분방정식을 풀어서 영사막 위의 간격벡타를 알아보자. 간격벡타의 맺음변수 $y$에 대한 일차미분을 각각 $N^m_{(0)} = \frac{dxi^m_{(0)}}{dy}$ 및 $N^m = \frac{d\Xi^m}{dy}$처럼 정의하고, 구동력을 $f^m = -\delta T_{mn}\xi^n_{(0)}$으로 나타내면, 빛형 벗어나기 방정식의 뒷마당에 대한 미분방정식과 건드림 부분에 대한 미분방정식은 각각 변수 $(\xi^m_{(0)}, N^m_{(0)})$과 $(\Xi^m, N^m)$에 대한 행렬미분방정식이 된다.

식 (6)의 해는 곡률인자가 $\kappa$인 굽은 FRW 뒷마당 시공간 속을 여행하는 빛다발의 영사막 위의 간격벡타를 제공한다. 빛다발 속의 기준 빛형측지선 상의 한 꼭지점 $y_q$에서 영사막 위의 간격벡타는 영이 된다. 따라서 이 지점에서 $\xi^m_{(0)}(y_q) = 0$ 및 $N^m_{(0)}(y_q) = \theta^m$으로 택하면, 기준 빛형측지선 위의 임의의 한 점에서 간격벡타와 상응하는 접선벡타는 각각 다음과 같다: [Perko 1991; Pyne & Birkinshaw 1993; Song 2000]

$$\begin{aligned}
\xi^m_{(0)}(y) &= \frac{\sinh[\sqrt{-\kappa}(y-y_q)]}{\sqrt{-\kappa}}\theta^m,\\
N^m_{(0)}(y) &= \cosh[\sqrt{-\kappa}(y-y_q)]\theta^m.
\end{aligned} \tag{10}$$

식 (10)에서 뒷마당 시공간의 각지름 거리가

$$d_{(0)}(y) = \frac{\sinh[\sqrt{-\kappa}(y-y_q)]}{\sqrt{-\kappa}}$$

가 됨을 알 수 있고, 시공간의 곡률인자가 영이 되면, $d_{(0)}(y) \to y - y_q$가 된다.

건드림된 부분에 대한 미분방정식 (7)의 해에 대한 초기조건으로 기준 빛형측지선 상의 꼭지점 $y_q$에서 영사막 위의 간격벡타를 $\Xi^m(y_q) = 0$ 그리고 상응하는 접선벡타를 $N^m(y_q) = \delta\theta^m$와 같이 선택하면, 간격벡타와 접선벡타의 건드림된 부분은 각각 다음과 같다:

$$\begin{aligned}
\Xi^m(y) &= d_{(0)}(y-y_q)[\delta\theta^m - \delta M_{mn}(y-y_q)\theta^n],\\
N^m(y) &= \cosh[\sqrt{-\kappa}(y-y_q)]\delta\theta^m\\
&\quad - \int_{y_q}^{y}\cosh[\sqrt{-\kappa}(y-\tau)]\, d_{(0)}(\tau-y_q)\delta T_{mn}(\tau)\theta^n d\tau.
\end{aligned} \tag{11}$$

식 (11)을 완성하기 위해 $\xi^n_{(0)} = d_{(0)}(y-y_q)\theta^n$을 대입하였고, $\delta M_{mn}(y-y_q)$은

$$\delta M_{mn}(y-y_q) = \int_{y_q}^{y} D_{(0)}(y-y_q,\tau)\delta T_{mn}(\tau)d\tau \tag{12}$$

으로 정의되었는데, 소위 말하는 렌즈확대행렬 $M_{mn}$의 건드림된 부분이고, $\delta T_{mn}$은 식 (8)에서 계산할 수 있으며, $D_{(0)}(y-y_q,\tau) = \frac{d_{(0)}(y-\tau)d_{(0)}(\tau-y_q)}{d_{(0)}(y-y_q)}$로 정의되었다. [Seitz et al. 1994; Tomita et al. 1999]

참고로, 한 영사막 위에서 간격벡타와 각도 사이의 본뜨기 관계식은, 식 (10)와 (11)의 첫번째 관계식을 합

하면

$$\begin{aligned}\xi_m(y) &= \xi_{(0)m}(y) + \Xi_m(y) \\ &= d_{(0)}(y-y_q)\theta_m(\delta_{mn} + \delta M_{mn}(y-y_q)\end{aligned} \tag{13}$$

가 됨을 알 수 있고, 이것의 일차도함수는, 식 (10)과 (11)의 두번째 관계식을 더한

$$\frac{d\xi_m}{dy}(y) = E_{(0)}(y-y_q)\left\{\theta_m - \frac{1}{E_{(0)}(y-y_q)} \times \left[\int_{y_q}^{y} E_{(0)}(y-\tau)d_{(0)}(\tau-y_q)\delta T_{mn}(\tau)d\tau\right]\theta_n\right\} \tag{14}$$

가 된다. 여기서 $\frac{d}{dy}d_{(0)}(y-y_q) = \cosh[\sqrt{-\kappa}(y-y_q)] = E_{(0)}(y-y_q)$ 로 정의되었다. 이렇게 얻어진 두 관계식을 이용하면 쏠림각과 렌즈각을 쉽게 정의할 수 있다.

빛형 측지선의 쏠림은 광자의 진행방향과 수직한 성분의 구동력의 작용을 받아서 일어난다. 샘에서 출발하여 관측자까지 도달한 하나의 작은 빛다발을 생각하자. 빛다발 속의 기준측지선 위에서 샘의 위치에 해당하는 $y_S$과 관측자의 위치에 해당하는 $y_O$을 정해주면, 관측자에서 샘까지의 고유거리는 $d_{(0)}^{SO} = d_{(0)}(y_O - y_S)$로 표시할 수 있다. 그러면 샘에서 관측자까지 도달하는 한 광자의 빛형접선벡타의 변화량으로부터 빛살이 쏠림되는 정도는 각도

$$\begin{aligned}\alpha_m(y_S) &= \frac{1}{E_{(0)}^{SO}}\frac{d\xi_m}{dy}(y_S) \\ &= \theta_m - \frac{\left[\int_O^S E_{(0)}(y_S-\tau)d_{(0)}(\tau-y_O)\delta T_{mn}(\tau)d\tau\right]\theta_n}{E_{(0)}^{SO}}\end{aligned} \tag{15}$$

로 나타낼 수 있고, 이것을 빛살의 쏠림각이라 정의한다. [Futamase 1995; Pyne & Birkinshaw 1996]

한편 샘에서 출발하여 관측가까지 도달하는 동안 빛다발을 이루는 빛살들의 광자가 천구 상에서 왔다갔다 하는 정도는 빛살들이 천구 상에서 기준측지선과 만드는 간격벡타를 뒷마당 시공간의 고유거리로 나눈 값으로 평가할 수 있고, 그것은

$$\begin{aligned}\beta_m &= \frac{1}{d_{(0)}^{SO}}\xi_m(y_S) \\ &= M_{mn}\theta_n = \theta_m + \delta M_{mn}(y_S - y_O)\theta_n\end{aligned} \tag{16}$$

로 나타내어진다. [Martinez-Gonzalez & Sanz 1997] 이것을 렌즈벡타 또는 렌즈방정식이라 부른다. 특히 $M_{mn} = I_{mn} + \delta M_{mn}$을 렌즈확대행렬이라고 부르고, 빛다발 자름넓이의 확대와 축소및 찌그러짐을 기술하고 있다.

## 3. 빛다발의 자름넓이와 각지름거리

지금까지 우리는 건드림된 시공간을 여행하는 하나의 빛형 측지선(광선)을 대상으로 아핀맺음변수에 따른 진화를 살펴보았다. 이제, 샘에서 방출된 광자들의 빛형 측지선들 중에서 하나의 빛다발을 정의하여 우리의 연구 대상으로 삼기로 하자. 샘에서 퍼져나오는 빛다발은 관측지점까지 여행하는 동안에 건드림된 시공간의 영향을 받아서 변형될 것이고, 변형 현상은 자름넓이의 확대 및 축소, 비틀림과 지향성의 진화를 통해서 공부할 수있다. 빛다발의 자름넓이는 빛형 측지선의 진행 방향과 수직한 공간 상에서 빛다발을 구성하는 빛형 측지선(광선)들 사이의 간격 벡타의 스칼라곱으로 얻어지는 양으로 결정된다는 것이 알려져 있다. 여기서는 빛다발의 자름넓이를 고려하여 샘까지의 각지름거리 결정에 초점을 맞춘다.

### 3.1. *자름넓이*

샘에서 퍼져나오는 하나의 빛다발을 생각해보자. 빛다발은 빛형 측지선들을 원소로 하고 있는 하나의 집합이다. 관측지점에서 자름넓이가 영이 되는 한 빛다발은 샘의 위치에서 자름넓이 $dA_S$를 가진다. 영사막 위에서 빛다발의 간격벡타를 생각해보면, 관측지점에서 그 크기는 영이 되고 ($\xi_m(y_O) = 0$), 그 도함수의 값은 영이 아니다 ($N_m(y_O) \neq 0$). 이 간격벡타를 빛다발 속의 한 기준빛형측지선을 따라 관측지점에서 샘의 위치까지 옮기면 샘의 위치에서 자름넓이를 계산할 수 있다. 이 자름넓이 $dA_S$와 관측지점에서 퍼져나오는 입체각 $d\Omega_O$ 사이에는 각지름거리 $d_A$를 매개로 하여

$$dA_S = d_A(S,O)d\Omega_O$$

와 같은 관계식이 성립한다는 것이 알려져 있다. (Schneider et al. 1992)

먼저 앞에서 계산한, 영사막 위에서 동시성과 동위상성을 만족하는, 간격벡타를 이용하면, 한끌계량에서 기준빛살 위의 한 점에서 정의된 영사막 위의 빛다발의 자름넓이는

$$dA = \pi d_{(0)}^2\sqrt{\det g_{mn}}\det M_{mn}$$

처럼 표현된다. [Christian & Sachs 1965; Schneider et al. 1992; Pyne & Birkinshaw 1996] 여기서 $M_{mn}$은 렌즈확대행렬이다.

다음 관측지점에서 영사막 위의 간격벡타 $\xi_m$의 도함수를 이용하면, 관측지점에서의 입체각 $d\Omega_O$가

$$d\Omega_O = \pi\frac{(g_{ab}e^ae^b)|_O}{g_{ab}u^an_{(0)}^b)^2|_O}$$

이 된다는 것을 알고 있다. 여기서 $e^a$는 영사막 위의 간격벡타의 도함수를 $N_\perp^a = (N_\perp^1,\ N_\perp^2,\ 0,\ 0) = \gamma\epsilon e^a$로

정의할 때의 기저벡타이고, $\epsilon$은 빛다발의 무한소 반지름을 나타낸다. 또한 관측자와 샘의 4차원 속도를 각각 $u^a_O$와 $u^a_S$로 나타내었다.

계산해낸 자름넓이 $dA$와 입체각 $d\Omega_O$에서 $\pi$를 제거하면, 샘의 위치에서 자름넓이는

$$dA_S = \left[\frac{(g_{ab}u^a n^b_{(0)})^2|_O}{(g_{ab}e^a e^b)|_O}(d^2_{(0)}\sqrt{\det g_{mn}}\det M_{mn})|_S\right]d\Omega_O \tag{17}$$

가 됨을 알 수 있다. 방출지점과 관측지점에서의 빛다발의 자름넓이의 크기를 비교함으로써 빛형 측지선을 따른 빛다발 자름넓이의 진화를 살펴볼 수 있고, 여기에 따른 각지름거리의 변화를 살펴볼 수 있다.

### 3.2. *각지름거리*

두 가지 방법으로 정의된 샘의 위치에서 빛다발의 자름넓이 $dA_S$를 비교하면, 관측지점에서 샘까지의 각지름거리에 관한 공식

$$d^2_A(S,O) = d^2_{(0)}(S,O)\frac{(g_{ab}u^a n^b_{(0)})^2|_O}{(g_{ab}e^a e^b)|_O}(\sqrt{\det g_{mn}}\det M_{mn})|_S \tag{18}$$

을 유도할 수 있다. 이것은 한꼴계량에서 정의된 각지름거리이다. 건드림이 없어지면 윗 식은 잘 알려진 프리이드만 뒷마당 시공간의 각지름거리, $d_{(0)}(S,O)$에 점근한다. 한꼴 계량이 아닌 팽창하는 계량에서의 각거리는 윗 식에 단순히 $\frac{a_S}{a_O}$을 곱하면 얻어진다. 참고로 광도거리 $d_L$과 각지름거리 사이에는 잘 알려진 공식 $d_A(z) = (1+z)^{-2}d_L(z)$이 성립한다. [Sasaki 1987; Pyne & Birkinshaw 2004]

건드림된 프리이드만 시공간에서 샘및 관측자의 4차원 속도는 $u^a = a^{-1}(1-\varphi, v^i)$로 주어지고, 영사막 위의 간격벡타의 도함수에서 결정되는 기저벡타를 $e^a = (0, \sin\alpha, \cos\alpha, 0)$로 둔다면, 관측지점에서

$$\frac{(g_{ab}u^a n^b_{(0)})^2|_O}{(g_{ab}e^a e^b)|_O} \simeq (1 + 4\varphi + \gamma v_3 - C^{(t)}_{ij}e^i e^j)|_O$$

으로 어림잡을 수 있고, 더 나아가 관측지점에서 시공간의 건드림을 무시하면 도플러효과 항만 살아남는다. 한편 영사막 위의 시공간 계량 행렬의 결정자도, 선형어림만을 고려하면, $\det g_{mn} \simeq 1 - 4\varphi + C^{(t)}_{mn}$가 되고, 영사막 위의 기저벡타의 작용에 의해

$$C^{(t)}_{mn} = (e^i)_m C^{(t)}_{ij}(e^j)_m$$

정의되었다.

한편 확대행렬 $M_{mn} = I_{mn} + \delta M_{mn}$의 결정자는

$$\det M_{mn} \simeq 1 + tr\delta M_{mn} + \det\delta M_{mn}$$

과 같이 어림잡을 수 있고, 여기서 $tr\delta M_{mn} = \delta M_{11} + \delta M_{22}$ 및 $\det\delta M_{mn} = \delta M_{11}\delta M_{22} - \delta M_{12}\delta M_{21}$이다. [Seitz et al. 1994; Tomita et al. 1999]

### 3.3. *각지름거리 흔들림*

지금까지 지금까지 건드림된 시공간에서 계산된 윗 두 양을 식 (18)에 대입하고, 선형어림을 택하면, 각지름거리에 대한 공식은 $d_A(S,O) \simeq d_{(0)}(S,O)[1+\Delta_A]$가 되고, 여기서 각지름거리 흔들림에 대한 표현꼴은

$$\Delta_A = \frac{1}{2}v_3|_O - \varphi|_S + \frac{1}{2}(C^{(t)}_{11} + C^{(t)}_{22})|_S + \frac{1}{2}(\delta M_{11} + \delta M_{22})|_S \tag{19}$$

가 된다. [Pyne & Birkinshaw 1996; Pyne & Birkinshaw 2004] 이 공식은 건드림된 FRW 시공간의 스칼라형 건드림 $\varphi$와 텐서형 건드림 $C^{(t)}_{ij}$를 명확히 하고, 이것들에 의해 결정되는 렌즈확대행렬의 건드림 부분 $\delta M_{mn}$을 명확히 기술하면 해결할 수 있다. 렌즈확대행렬의 건드림부분은 광학적 조석힘 행렬의 건드림 부분 사이에 식 (12)와 같은 관계가 성립함을 빛형 측지선 벗어나기 방정식의 해에서 알 수 있다. 앞으로의 전개를 위해 광학적 조석힘텐서를 식 (8)에 주어진 리치 초점맞추기 스칼라 $R$과 봐일 초점맞추기 텐서 $W_{mn}$을 이용하여 나타내보면

$$\begin{aligned}\delta T_{mn} = {} & \gamma_{mn}\left[2\frac{d^2}{dy^2}\varphi + \varphi_{|kl}n^k_{(0)}n^l_{(0)}\right] \\ & - \frac{1}{2}e^i_m\left[\frac{d^2}{dy^2}C^{(t)}_{ij} - 2\frac{d}{dy}(C^{(t)}_{ij|j}n^l_{(0)}) \right. \\ & \left. + C^{(t)}_{kl|ij}n^k_{(0)}n^l_{(0)}\right]e^j_n\end{aligned} \tag{20}$$

와 같다.

한편 샘과 관측자의 위치에서 시공간 건드림을 무시하고, 샘에서 나와 관측자까지 도달하는 빛다발이 여행 중에 만나는 시공간 건드림만을 고려하면, 그것은 광학적 변형 텐서의 건드림 양으로 주어진다. 이것만을 고려하면, 건드림된 시공간에서 각지름거리는 $d_A \simeq d_{(0)}\left[1 + \frac{1}{2}tr\delta M + \frac{1}{2}\det\delta M\right]$ 에서 계산할 수 있다. 참고로 $\det\delta M$는 시공간 건드림의 제곱으로 표현되기 때문에, 선형어림만을 고려할 경우 사라진다. 이것은 각지름거리 계산에 있어서 렌즈확대행렬의 비대칭 성분이 기여하지 않는다는 것을 의미하고, 텐서 건드림에 있어서 + 편극 성분만이 기여한다는 것을 볼 수 있을 것이다.

각지름거리의 흔들림에 미치는 스칼라 건드림의 영향을 살펴본다. 관측지점에서 도플러효과를 무시하면,

$v_3|_O = 0$이 되고, 스칼라 건드림만이 기여하는 각지름 거리의 흔들림은 공식은 식 (18), (19) 및 (20)에서

$$\Delta_A \simeq -\varphi|_S + 2\int_O^S D_{(0)}(y_S - y_O, \tau)\frac{d^2}{d\tau^2}\varphi(\tau)d\tau - \int_O^S D_{(0)}(y_S - y_O, \tau)(\varphi_{|kl} n^k_{(0)} n^l_{(0)})(\tau)d\tau \tag{21}$$

과 같음을 알 수 있다.

텐서 건드림의 영향은 그것이 편극되어 있음을 염두에 두고 계산하여야 한다. 건드림된 프리이드만 시공간에 텐서건드림에 대한 해를

$$C^{(t)}_{jk}(\mathbf{x}, \eta) = \epsilon^\sigma_{jk}(\hat{x}) G_\sigma(\mathbf{x}, \eta) \tag{22}$$

와 같이 분해하고, 이것을 식 (18), (19) 및 (20)을 통해 정리하면, 텐서 건드림만이 기여하는 각지름거리의 흔들림에 관한 공식은

$$\begin{aligned}\Delta_A \simeq\ & \frac{1}{2}E^\sigma_{(I)}(\hat{q}) G_\sigma(\mathbf{x}, y_S) \\ & -\frac{1}{4}E^\sigma_{(I)}(\hat{q}) \int_O^S D_{(0)}(y_S - y_O, \tau)\frac{d^2}{d\tau^2}G_\sigma(\mathbf{x}, \tau)d\tau \\ & +\frac{1}{2}\ iq\ E^\sigma_{(II)}(\hat{q}) \int_O^S D_{(0)}(y_S - y_O, \tau)\frac{d}{d\tau}G_\sigma(\mathbf{x}, \tau)d\tau \\ & +\frac{1}{4}\ q^2\ E^\sigma_{(III)}(\hat{q}) \int_O^S D_{(0)}(y_S - y_O, \tau) G_\sigma(\mathbf{x}, \tau)d\tau\end{aligned} \tag{23}$$

과 같이 표현됨을 보일 수 있다. 여기서

$$\begin{aligned}E^\sigma_{(I)}(\hat{q}) &= E^{(I)\sigma}_{11}(\hat{q}) + E^{(I)\sigma}_{22}(\hat{q}) \\ E^\sigma_{(II)}(\hat{q}) &= E^{(II)\sigma}_{11}(\hat{q}) + E^{(II)\sigma}_{22}(\hat{q}) \\ E^\sigma_{(III)}(\hat{q}) &= E^{(III)\sigma}_{11}(\hat{q}) + E^{(III)\sigma}_{22}(\hat{q})\end{aligned} \tag{24}$$

로 정의되었고, 이것들은 행렬

$$\begin{aligned}E^{(I)\sigma}_{mn}(\hat{q}) &= \epsilon^\sigma_{ij}(\hat{q}) e^i_m e^j_n \\ E^{(II)\sigma}_{mn}(\hat{q}) &= [e^i_m \epsilon^\sigma_{il}(\hat{q}) n^l_{(0)}](\hat{q}_j e^j_n) \\ E^{(III)\sigma}_{mn}(\hat{q}) &= (e^i_m \hat{q}_i \hat{q}_j e^j_n)[\epsilon^\sigma_{kl}(\hat{q}) n^k_{(0)} n^l_{(0)}]\end{aligned} \tag{25}$$

의 성분들이고, $\sigma$는 중력파의 두 편극 +, ×를 대표하고, $e^i_m = \gamma\delta^i_m$로 정의된 영사막 위의 기저벡타, $n^i_{(0)} = \gamma e^i_\gamma$로 선택된 기준 빛형측지선의 진행 방향을 나타내는 단위벡타이고, $\hat{q}_i$는 $q^i = q\gamma\hat{q}_i$로 선택된 텐서 건드림의 파동벡타를 따른 단위 벡타이다.

한편 편극 텐서 $\epsilon^\sigma_{ij}(\hat{q})$는 중력파동을 발생시키는 샘의 좌표틀과 샘과 관측자를 연결하는 광자의 좌표틀 사이의 좌표 변환 관계에 의해 결정된다. 중력파동 좌표틀에서 광자 좌표틀로의 회전 행렬을 $R$이라 하고, 중력파동 좌표틀에서의 두 편극을 $e^\sigma$라 하면, 편극텐서 $\epsilon^\sigma_{ij}(\hat{q})$는

$$\epsilon^\sigma_{ij}(\hat{q}) = (Re^\sigma R^T)_{jk} \tag{26}$$

에서 정해진다. $R^T$는 행렬 $R$의 자리바꿈 행렬이다.

## 4. 각지름거리 흔들림의 상관관계함수와 멱빛띠

### *4.1. 상관관계함수*

우리는 이제 일반적인 멋대로 흔들림된 계량의 뒷마당을 통과하는 빛다발 자름넓이에서 유도된 각지름거리의 통계학적 특성을 살펴보기로 한다. 말하자면 영사막 위의 빛다발의 간격벡타의 흔들림을 살펴서 그 각지름거리의 흔들림을 평가한다. 여기서 부터는 관심을 가지는 중력파동이 빛살의 전파에 미치는 영향을 중점적으로 살펴보기 위해 텐서 건드림이 기여하는 부분으로 문제를 국한한다.

건드림된 프리이드만 시공간의 텐서건드림에 대한 해 식 (22)의 $G_\sigma(\mathbf{x}, \eta)$를

$$G_\sigma(\mathbf{x}, \eta) = h_\sigma(\mathbf{x}) H(q\eta) \tag{27}$$

와 같이 분해하면, $h_\sigma(\mathbf{x})$를

$$h_\sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3q\ h_\sigma(\mathbf{q})\ e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \tag{28}$$

로 나타낼 수 있고, 텐서건드림의 시간적 변화를 나타내는 $H(q\eta)$는 건드림된 프리이드만 시공간의 텐서건드림에 대한 미분방정식의 해로서

$$H(q\eta) = (q\eta)^{-3/2} J_{\frac{3}{2}}(q\eta)$$

로 주어진다. [Noh & Hwang 1995; 송두종 2003; Dodelson 2003]

앞으로의 계산을 위하여 빛다발 속의 기준 빛살의 진행 방향이 관측자 좌표틀의 $z$-축을 따르고 있다고 생각하면, $n^i_{(0)} = \gamma(0,\ 0,\ 1)$처럼 택할 수 있다. 나아가 텐서 건드림의 파동의 단위벡타를

$$\hat{q}_i = (\sqrt{1-\mu^2}\cos\phi, \sqrt{1-\mu^2}\sin\phi, \mu)$$

로 선택한다. 여기서 $\mu = \cos\theta$로 정의되었다. 그러면, $\varphi_{|kl} n^k_{(0)} n^l_{(0)} = -\mu^2 q^2$가 되고, $\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} = qx\mu$가 된다. 여기서 $x$는 고유거리로, 뒷마당 프리이드만 시공간에서 $x(y) = d_{(0)}(y)$와 같다.

이것들을 식 식 (23)에 대입하고 정리하면, 텐서건드림에 의한 각지름거리의 흔들림 $\Delta_A$는

$$\Delta_A(\mathbf{x}) \simeq \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d^3q\ E^\sigma_{(I)}(\hat{q})\ h_\sigma(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_S} H(qy_S)$$

$$-\frac{1}{4(2\pi)^3}\int d^3q\int_O^S dz\ \tilde{I}_{(2)}(z,z_S-z_O)E^\sigma_{(I)}(\hat{q})\ h_\sigma(\mathbf{q})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$$
$$+\frac{1}{2(2\pi)^3}\ i\int d^3q\int_O^S dz\ \tilde{I}_{(1)}(z,z_S-z_O)E^\sigma_{(II)}(\hat{q})\ h_\sigma(\mathbf{q})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$$
$$+\frac{1}{4(2\pi)^3}\int d^3q\int_O^S dz\ \tilde{I}_{(0)}(z,z_S-z_O)E^\sigma_{(III)}(\hat{q})\ h_\sigma(\mathbf{q})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \quad (29)$$

와 같고, 여기서

$$\tilde{I}_{(0)}(z,z_S-z_O)=\tilde{D}_{(0)}(z_S-z_O,z)H(z)$$
$$\tilde{I}_{(1)}(z,z_S-z_O)=\tilde{D}_{(0)}(z_S-z_O,z)\frac{d}{dz}H(z)$$
$$\tilde{I}_{(2)}(z,z_S-z_O)=\tilde{D}_{(0)}(z_S-z_O,z)\frac{d^2}{dz^2}H(z), \quad (30)$$

$\tilde{D}_{(0)}(z_S-z_O,z)=\frac{(z_S-z)(z-z_O)}{(z_S-z_O)}$, $z=q\tau$로 정의되었다.

문제를 단순화하기 위해, 샘의 위치 $\mathbf{x}_S$와 위치 $\mathbf{x}$에서의 건드림들 사이에는 아무런 상관관계가 없다고 생각한다. 그러면, 식 (23)의 첫번째 항과 나머지 항들 사이의 상관관계는 무시할 수 있다. 한편 파동의 진행 방향과 위치 벡타들 사이의 스칼라곱을 $\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}_S-\mathbf{x}'_S)=-\mu_S q r_S$ 및 $\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=-\mu q r$로 정의하면, 각지름거리의 흔들림 $\Delta_A(\mathbf{x})$의 두점상관관계함수 $\xi_h(r)=<\Delta_A(\mathbf{x})\Delta^*_A(\mathbf{x}')>$는

$$\xi_h(r)=\frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty dq\ q^2\ P^\sigma_h(q)\Psi^\sigma_{(HH)}(q)$$
$$+\frac{1}{32\pi^2}\int_0^\infty dq\ q^2\ P^\sigma_h(q)\Psi^\sigma_{(00)}(q)$$
$$+\frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty dq\ q^2\ P^\sigma_h(q)\Psi^\sigma_{(11)}(q)$$
$$+\frac{1}{32\pi^2}\int_0^\infty dq\ q^2\ P^\sigma_h(q)\Psi^\sigma_{(22)}(q)$$
$$-\frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty dq\ q^2\ P^\sigma_h(q)\Psi^\sigma_{(20)}(q) \quad (31)$$

에서 계산할 수 있고, 이 계산을 위해 관계식

$$<h_\sigma(\mathbf{q})h^*_{\sigma'}(\mathbf{q}')>=(2\pi)^3P_h(q)\delta_{\sigma\sigma'}\delta^3(\mathbf{q}-\mathbf{q}')$$

을 도입하였고, 적분 속의 각도와 경로의 적분에 의존하는 양들은

$$\Psi^\sigma_{(HH)}(q)=\frac{1}{4\pi}|H(qy_S)|^2\int d\Omega\ |E^\sigma_{(I)}(\hat{q})|^2e^{-i\mu_S q r_S}$$
$$\Psi^\sigma_{(00)}(q,z_S-z_O)=\frac{1}{4\pi}\int d\Omega\ |E^\sigma_{(III)}(\hat{q})|^2$$
$$[\int_O^S dz\ \tilde{I}_{(0)}(z,z_S-z_O)\int_O^S dz\ \tilde{I}_{(0)}(z,z_S-z_O)e^{-i\mu q r}]$$
$$\Psi^\sigma_{(11)}(q,z_S-z_O)=\frac{1}{4\pi}\int d\Omega\ |E^\sigma_{(II)}(\hat{q})|^2$$
$$[\int_O^S dz\ \tilde{I}_{(1)}(z,z_S-z_O)\int_O^S dz\ \tilde{I}_{(1)}(z,z_S-z_O)e^{-i\mu q r}]$$
$$\Psi^\sigma_{(22)}(q,z_S-z_O)=\frac{1}{4\pi}\int d\Omega\ |E^\sigma_{(I)}(\hat{q})|^2$$
$$[\int_O^S dz\ \tilde{I}_{(2)}(z,z_S-z_O)\int_O^S dz\ \tilde{I}_{(2)}(z,z_S-z_O)e^{-i\mu q r}]$$
$$\Psi^\sigma_{(20)}(q,z_S-z_O)=\frac{1}{4\pi}\int d\Omega\ [E^\sigma_{(I)}(\hat{q})E^\sigma_{(III)}(\hat{q})]$$
$$[\int_O^S dz\ \tilde{I}_{(2)}(z,z_S-z_O)\int_O^S dz\ \tilde{I}_{(0)}(z,z_S-z_O)e^{-i\mu q r}] \quad (32)$$

로 정의되었다. 식 (32) 속의 $r$은 뒷마당 시공간에서 천구상에 나타나는 두 점 사이의 간격으로 그 사이각을 $\alpha$라 하면, $r\sim d_{(0)}(y)\alpha$와 같은 어림을 가지고 있다.

### 4.2. 각지름거리 흔들림의 멱빛띠

Kaiser & Jaffe (1997)에 따르면, 스칼라건드림에 의한 각지름거리 흔들림 $\Delta_A$의 멱빛띠 $P_{\Delta_A}$는 두점상관관계함수를 이용한 공식 $P(q)=\int d^3r\xi_h(r)e^{iqr}$에서 텐서건드림이 기여하는 각지름거리 흔들림의 멱빛띠를 계산할 수 있다. 이 계산에 있어서 샘의 위치에서 시공간 건드림이 기여하는 부분은 제외하고, 샘에서 출발하여 관측자까지 까지 여행하는 도중의 시공간 건드림 영향만을 고려에 넣는다. 그러면 식 (31)에서 그 멱빛띠에 대한 표현 꼴이

$$P_{\Delta_A}(q)=\frac{1}{16\pi}\int_0^\infty dq'\ q'\ P^\sigma_h(q')\bar{\Psi}^\sigma_{(00)}(q,q')$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty dq'\ q'\ P^\sigma_h(q')\bar{\Psi}^\sigma_{(11)}(q,q')$$
$$+\frac{1}{16\pi}\int_0^\infty dq'\ q'\ P^\sigma_h(q')\bar{\Psi}^\sigma_{(22)}(q,q')$$
$$-\frac{1}{8\pi}\int_0^\infty dq'\ q'\ P^\sigma_h(q')\bar{\Psi}^\sigma_{(20)}(q,q') \quad (33)$$

가 됨을 알 수 있고, $\bar{\Psi}^\sigma_{()()}$는 식 (32)의 거리 $r$에 대한 적분으로

$$\bar{\Psi}^\sigma_{()()}(q,q')=\frac{1}{2\pi}q'\int dr\ \Psi^\sigma_{()()}(q')e^{iqr} \quad (34)$$

으로 정의되었다.

식 (33)에 주어진 텐서건드림이 기여하는 각지름거리 흔드림의 멱빛띠를 좀 더 구체적으로 살펴보기로 하자. 문제를 단순화하기 위해, 시공간은 $\kappa=0$인 편평한 FRW 시공간으로 한정한다. 그러면 공변거리는 단순하게 $d_{(0)}(y)=y-y_O$가 된다.

식 (33)에서 볼 수 있는 것과 같이, 텐서 건드림의 영향을 평가하기 위해서는 먼저 편극텐서 $E^{()\sigma}_{jk}$의 성분을 계산해야만 한다. 이를 위해 빛다발 속의 기준 빛살의 진행 방향이 관측자 좌표틀의 $z$-축을 따르고 있다고 생각한다. 그러면 $n^i_{(0)} = \gamma(0,\ 0,\ 1)$처럼 택할 수 있다. 나아가 중력파동의 단위벡타를

$$\hat{q}_i = (\sqrt{1-\mu^2}\cos\phi, \sqrt{1-\mu^2}\sin\phi, \mu)$$

로 선택한다. 여기서 $\mu = \cos\theta$ 로 정의되었다. 이렇게 선택된 좌표틀 위에서 식 (26)에 들어있는 중력파동 좌표틀에서 광자 좌표틀로의 회전 행렬 $R$을

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \sin\phi & \mu\cos\phi & \sqrt{1-\mu^2}\cos\phi \\ -\cos\phi & \mu\sin\phi & \sqrt{1-\mu^2}\sin\phi \\ 0 & -\sqrt{1-\mu^2} & \mu \end{pmatrix} \quad (35)$$

처럼 택하고, [Pyne etal. 1996] 중력파동 좌표틀에서의 두 편극 텐서를

$$e^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^\times = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

와 같이 선택한다.

그러면 식 (35)와 (36)을 식 (26)에 대입하여 $\epsilon^\sigma_{jk}(\hat{q})$를 계산해 낼 수 있고, 이것을 다시 우리가 택한 좌표틀에서 선택한 $e^i_m$, $\hat{q}_i$, 및 $n^i_{(0)}$와 함께 식 (25)에 대입하면, 중력파의 편극에 따른 편극텐서의 성분을 각각 계산해 낼 수 있는데, 그 결과로 얻어진 식 (24)에 나타난 성분들은 각각 다음과 같다:

$$\begin{aligned}
[E^{(I)\sigma}_{11}(\hat{q}) + E^{(I)\sigma}_{22}(\hat{q})] &= (\,1-\mu^2 \quad 0\,) \\
[E^{(II)\sigma}_{11}(\hat{q}) + E^{(II)\sigma}_{22}(\hat{q})] &= (1-\mu^2)\,(\,\mu \quad 0\,) \\
[E^{(III)\sigma}_{11}(\hat{q}) + E^{(III)\sigma}_{22}(\hat{q})] &= -(1-\mu^2)^2\,(\,1 \quad 0\,)\,.
\end{aligned} \quad (37)$$

식 (37)에 주어진 행렬들의 첫번째 항은 중력파의 +-편극에, 두번째 항은 ×-편극에 해당한다. 따라서 텐서 건드림의 선형어림에서 ×-편극이 각지름거리의 흔들림에 기여하는 바는 없다는 것을 알 수 있다.

식 (37)을 식 (32)를 거쳐서 식 (34)에 대입하면, 적분 $\bar{\Psi}^\sigma_{()()}(q,q')$를 계산할 수 있다. 식 (37)의 편극텐서 성분은 $\mu$에만 의존하고 있으므로, 적분들 속의 $d\Omega = 2\pi d\mu$가 된다. 우리가 선택한 빛살들의 방향을 도입하면, 파동의 진행 방향과 위치 벡타들 사이의 스칼라곱은 $\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}_S - \mathbf{x}'_S) = -\mu_S q r_S$ 및 $\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = -\mu q r$로 나타낼 수 있어서, 식 (34)의 적분들은 계산하여 식 (33)에 대입하고 정리하면

$$\begin{aligned}
P_{\Delta_A}(q) &= \frac{1}{16\pi}\int_0^\infty dq'\ q'\ P_h^+(q')\bar{\Phi}^+_{(00)}(q,q')|J_{(0)}(z_S - z_O)|^2 \\
&+ \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty dq'\ q'\ P_h^+(q')\bar{\Phi}^+_{(11)}(q,q')|J_{(1)}(z_S - z_O)|^2 \\
&+ \frac{1}{16\pi}\int_0^\infty dq'\ q'\ P_h^+(q')\bar{\Phi}^+_{(22)}(q,q')|J_{(2)}(z, z_S - z_O)|^2 \\
&- \frac{1}{8\pi}\int_0^\infty dq'\ q'\ P_h^+(q')\bar{\Phi}^+_{(20)}(q,q') \\
&\qquad \times |J_{(2)}(z_S - z_O)J_{(0)}(z_S - z_O)|
\end{aligned} \quad (38)$$

을 얻는다. 여기서 $\bar{\Phi}^+_{()()}$들을

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}^+_{(00)}(q,q') &= \frac{1}{2}\left[1 - 4\left(\frac{q}{q'}\right)^2 + 6\left(\frac{q}{q'}\right)^4 - 4\left(\frac{q}{q'}\right)^6 + \left(\frac{q}{q'}\right)^8\right] \\
\bar{\Phi}^+_{(11)}(q,q') &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{q}{q'}\right)^2 - 2\left(\frac{q}{q'}\right)^4 + \left(\frac{q}{q'}\right)^6\right] \\
\bar{\Phi}^+_{(22)}(q,q') &= \frac{1}{2}\left[1 - 2\left(\frac{q}{q'}\right)^2 + \left(\frac{q}{q'}\right)^4\right] \\
\bar{\Phi}^+_{(20)}(q,q') &= -\frac{1}{2}\left[1 - 3\left(\frac{q}{q'}\right)^2 + 3\left(\frac{q}{q'}\right)^4 - \left(\frac{q}{q'}\right)^6\right]
\end{aligned} \quad (39)$$

와 같이 주어졌고, 경로에 대한 적분 $J_{()}(z_S - z_O)$는

$$\begin{aligned}
J_{(0)}(z_S - z_O) &= \int_O^S dz\ \tilde{I}_{(0)}(z, z_S - z_O) \\
J_{(1)}(z_S - z_O) &= \int_O^S dz\ \tilde{I}_{(1)}(z, z_S - z_O) \\
J_{(2)}(z_S - z_O) &= \int_O^S dz\ \tilde{I}_{(2)}(z, z_S - z_O)
\end{aligned} \quad (40)$$

로 정의되었다. 식 (34)의 계산에 관계식 $\int dr e^{iq'r(\mu - \frac{q}{q'})} = 2\pi(q')^{-1}\delta(\mu - \frac{q}{q'})$을 이용하였다.

### 4.3. *각지름거리 흔들림의 제곱평균과 멱빛띠의 어림 관계식*

확률론적 중력파동의 채워진 건드림된 시공간을 여행하는 빛살에 기인한 각지름거리 흔들림에 대한 식 (31)에 주어진 두점상관계함수에서 $r=0$이 되는 상관계함수의 값에서 각지름거리 흔들림 $\Delta_A$의 제곱평균제곱근을 구할 수 있다. 이를 위해 식 (40)에 주어진 빛살의 경로에 대한 적분을 이용하고, 식 (37)을 이용하여 입체각에 대한 적분 식 (32)를 계산하여 식 (31)에 대

입하면,

$$
\begin{aligned}
< |\Delta_A|^2 > &= \\
&\frac{1}{35\pi^2}\int_0^\infty dq\ q^2\ P_h^+(q)[\frac{1}{36}|J_{(0)}(z, z_S - z_O)|^2 \\
&\quad + \frac{7}{12}|J_{(1)}(z, z_S - z_O)|^2 \\
&\quad + \frac{7}{12}|J_{(2)}(z, z_S - z_O)|^2 \\
&\quad + |J_{(2)}(z, z_S - z_O)J_{(0)}(z, z_S - z_O)|] \qquad (41)
\end{aligned}
$$

을 얻는다.

식 (41)은 식 (30)에 포함된 편평한 프리이드만 시공간에서 중력파동의 시간 진화를 알려주는 $H(z)$에 대한 점근식을 $q\tau$에 대해 $q\tau << 1$ 처럼 어림되는 경우(짧은 파장 어림)와 $q\tau >> 1$인 경우(긴 파장 어림)으로 나누어서 평가할 수 있다.

$q\tau >> 1$인 경우 (파동의 자외선 한계 또는 짧은 파장 어림), $H(z)$를 이루는 베셀함수는 떨기 항이 지배하고 있으므로, $H(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ z^{-2}e^{iz}$에 점근하고, 이 한계에서 중력파동은 평면파동처럼 다룰 수 있다. 이것을 식 (30)을 통하여 식 (40)을 편평한 FRW 시공간에서 계산하면 $|J_{(0)}|^2 = |J_{(1)}|^2 = |J_{(2)}|^2 = J_{(0)}J^*_{(2)}$ 임을 알 수가 있고, 따라서 식 (41)은

$$
< |\Delta_A|^2 > \sim \frac{79}{1260\pi^2}|J_{(0)}(y_S - y_O)|^2 \int_0^\infty dq\ q\ P_h^+(q) \qquad (42)
$$

가 된다. 여기서 $J_{(0)}(y_S - y_O)$는

$$
|J_{(0)}(y_S - y_O)|^2 = \int_O^S \left[\frac{(y_S - y)(y - y_O)}{y_S - y_O}\right]^2 y^{-4} dy \qquad (43)
$$

이다.

한편 $q\tau << 1$인 경우 (파동의 적외선 한계 또는 긴 파장 어림), $H(z)$는 $H(z) \sim \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$에 점근하고, 이것을 식 (40)에 대입하고, 편평한 FRW 시공간에서 $\tilde{D}_{(0)}(y_S - y_O, \tau)$를 이용하여 정리하면, $J_{(0)}(q, y_S - y_O) \sim \frac{1}{18}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ q^2\ d^2_{(0)}(y_S)$ 가 되고, $J_{(1)}(q, y_S - y_O)$ 및 $J_{(2)}(q, y_S - y_O)$는 영에 점근한다. 이 결과를 이용하면, 식 (41)은

$$
< |\Delta_A|^2 > \sim \frac{1}{181440\pi^3}\ d^4_{(0)}(y_S) \int_0^\infty dq\ q^6\ P_h^+(q) \qquad (44)
$$

처럼 어림잡을 수 있다.

각지름거리 흔들림의 멱빛띠도, 편평한 프리이드만 시공간에서 중력파동의 시간 진화를 알려주는 $H(z)$에 대한 점근식을 $q\tau$에 대해 $q\tau << 1$ 처럼 어림되는 경우(짧은 파장 어림)와 $q\tau >> 1$인 경우(긴 파장 어림)으로 나누어서 살펴볼 수 있는데, 먼저 $q\tau >> 1$인 경우 $H(z)$를 이루는 베셀함수는 떨기 항이 지배하고 있으므로, 이 한계에서 중력파동은 평면파동처럼 다룰 수 있다. 이것을 식 (40)에 대입하고, 편평한 FRW 시공간에서 계산하면 $|J_{(0)}|^2 = |J_{(1)}|^2 = |J_{(2)}|^2 = J_{(0)}J^*_{(2)}$ 임을 알 수가 있다. 이 결과와 식 (39)를 식 (38)에 대입하고 정리하면, 어림 관계식

$$
P_{\Delta_A}(q) \sim \frac{1}{2\pi}\ |J_{(0)}(y_S - y_O)|^2 \int_0^\infty dq'\ P_h^+(q')\ \Phi_{q\tau>1}(q, q') \qquad (45)
$$

를 얻는다. 여기서 $J_{(0)}(y_S - y_O)$는 식 (43)에 주어졌고, $\Phi_{q\tau>1}(q, q')$는

$$
\Phi_{q\tau>1}(q, q') = 1 - 2\left(\frac{q}{q'}\right)^2 + \frac{5}{4}\left(\frac{q}{q'}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{q}{q'}\right)^6 + \frac{1}{4}\left(\frac{q}{q'}\right)^8 \qquad (46)
$$

이다.

한편 $q\tau << 1$인 경우, $H(z)$는 $H(z) \sim \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ 에 점근하므로, 이것의 시간에 대한 미분들을 무시하면, 식 (40)에서 편평한 시공간의 $\tilde{D}_{(0)}(y_S - y_O, \tau)$를 이용하여 정리하면, $J_{(0)}(q, y_S - y_O) \sim \frac{1}{18}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ q^2\ d^2_{(0)}(y_S)$ 가 되고, $J_{(1)}(q, y_S - y_O)$ 및 $J_{(2)}(q, y_S - y_O)$는 무시할 수 있다. 이 결과를 계산된 $\bar{\Phi}^+_{()()}(q, q')$에 대한 식 (39)와 함께 식 (38)에 대입하고 정리하면,

$$
\begin{aligned}
P_{\Delta_A}(q) &= \frac{1}{144\pi^2}\ d^4_{(0)}(y_S) \\
&\times \int_0^\infty dq'\ q'^5\ P_h^+(q')\Phi_{q\tau<1}(q, q') \qquad (47)
\end{aligned}
$$

를 얻는다. 여기서 $\Phi_{q\tau<1}(q, q') = 2\bar{\Phi}_{(00)}(q, q')$이다.

## 5. 결론

결론으로 선형건드림된 프리이드만 시공간에서 빛다발의 간격벡타를 지배하는 빛형측지선 벗어나기 방정식의 해를 구함으로써, 영사막 위에서 빛다발의 자름넓이를 바탕으로 정의된 각지름거리의 흔들림에 대한 공식을, 선형건드림의 한계 안에서 계산하였다.

우주의 확률론적 중력파동 뒷마당이 각지름거리 흔들림에 미치는 영향을, 두점상관관계함수 방법을 통하여 계산하였고, 그 멱빛띠에 관한 공식을 보였고, 중력파동의 짧은 파장 어림과 긴 파장어림에 대한 빛띠의 어림 관계식을 살펴보았다.

## ACKNOWLEDGEMENTS

본 연구는 한국천문연구원 기본연구비 지원을 통해 수행된 결과입니다.

## 참고문헌

송두종 2003, PKAS, 18, 1
Anile, A. M. & Motta, S., 1976, ApJ, 207, 685
Bardeen, J. M., 1980, PRD, 22, 1882
Bar-kana, M. S., 1996, PRD, 54, 7138
Christian, J. & Sachs, R. K., 1965, ApJ, 143, 379
Cutler, C. & Thorne, K. S., 2002, gr-qc/**0204090**
Dodelson, S., 2003, *Modern Cosmology*, Academic Press
Durrer, R., 1994, PRL, 72, 3301
Futamase, T., 1995, Prog. Theor. Phys., 93, 647
Hawking, S. W. & Ellis, G. F. R., 1973, *The Large Scale Structure of Spacetime*, Cambridge University Press
Hwang, J.-C., 1991, ApJ, 375, 443
Jaffe, A. H., 2004, astro-ph/0409637
Kaiser, N. & Jaffe, A., 1997, ApJ, 484, 545
Kosowsky, A., Turner, M. S. & Watkins, R., 1992, PRL, 69, 2026
Liddle, A. L. & Lyth, D. H., 1992, Phys. Lett. B, 291, 391
Liddle, A. L. & Lyth, D. H., 2003, *Cosmological Inflation and Large Scale Structure*, Cambridge University Press
Linder, E. V., 1988a, A&A, 204, L11
Linder, E. V., 1988b, ApJ, 328, 77
Lucchin, F., Mattarese, S. & Mollerach, S., 1992, ApJ, 401, L49
Martinez-Gonzalez, E. & Sanz, J. L., 1997, ApJ, 484, 1
McVitte, G. C., 1964, *General Relativity and Cosmology*, 2nd ed., Chapman & Hall, London
Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A., 1973, *Gravitation*, Freeman, San Francisco
Mollerach, S., 1988, PRD, 57, 1303
Muller, E. & Janka, H.-T., 1997, A&A, 317, 140
Noh, H. & Hwang, J.-C., 1995, PRD, 52, 1970
Panek, M., 1985, PRD 34, 416
Perko, L., 1991, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York
Pyne, T. & Birkinshaw, M., 1993, ApJ, 415, 459
Pyne, T. & Birkinshaw, M., 1996, PRD, 53, 2920
Pyne, T. & Birkinshaw, M., 2004, MNRAS, 348, 581
Pyne, T., Gwinn, C. R., Birkinshaw, M., Marshall Eubanks, T. & Matsakis, D. N. 1996, ApJ, 465, 566
Sachs, R. K. & Wolfe, A. M., 1967, ApJ, 147, 73
Sasaki, M., 1987, MNRAS, 228, 653
Schneider, P., Ehlers, J, & Falco, E. E., 1992, *Gravitational Lenses*, Springer-Verlag, Berlin
Seitz, S., Schneider, P., & Ehlers, 1994, Class. Quant. Grav., 11, 2345
Song, D. J., 2000, Nuovo Cimento 115B, 1025
Tomita, K., Asada, H., & Hamana, T., 1999, Prog. Theo. Phys. Suppl., 133, 155