韓國數學教育學會誌 시리즈 C
<初等數學教育>
2004. 11. 제 8권, 제 2호, 97-113

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
Nov. 2004, Vol. 8, No. 2, 97-113

비형식적 지식을 이용한 대안적인 분수 나눗셈의 형식화 방안에 관한 연구

백 선 수 (대구와룡초등학교)

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

초등학생이 학교 수학에서 가장 이해할 수 없는 규칙들 중의 하나는 분수의 나눗셈에서 제수를 뒤집어서 곱하는 방법이다(Van de Walle, 2004). 만약 이러한 절차적 지식만을 학생들에게 가르친다면, 학생들은 수학이란 자신과는 무관하며 의미 없는 절차들을 외우는 것으로 인식하게 되고, 자신의 능력에 대해 불신하게 될 것이며, 결과적으로 수학에 대해 부정적인 성향을 가지게 될 것이다. 또한, 개념적 지식과 연결되지 못한 절차적 지식은 오류를 범하게 되고 관계적 이해를 하지 못하게 되어 새로운 문제해결에 유용하게 사용되지 못할 것이다. 반면에 이해를 통해 학습된 지식은 개념과 절차가 서로 연결되어 있어서 기억하기 쉽고, 잊혀졌을 때 재구성할 수 있다(Hiebert & Carpenter, 1992). 그렇다면 이해란 무엇인가? 이해란 정보들 사이의 연결을 의미하며, Baroody & Coslick(1998)은 이러한 연결의 유형을 5가지[1]로 세분화하였으며, 그 첫 번째로 학생이 가진 비형식적 지식과 형식적인 기호나 절차와의 연결을 손꼽았다. 여기서 비형식적 지식이란 특정한 수학 주제에 관하여 형식적인 지도를 받기 이전에 획득한 지식, 즉, 학생이 실생활 경험으로부터 자연스럽게 전수 받은 지식과 사전 지식, 그리고 스스로 발명한 지식을 의미한다(백선수, 2004).

NCTM(2000)에서는 학생들이 일상생활의 경험을 통해서 수, 패턴, 모양, 양, 자료, 크기 등에 관하여 상당히 복잡한 일련의 비형식적인 개념을 개발한다고 지적하면서, 그러한 개념들 가운데 많은 것이 옳고 견고하다고 한다. 그리고 교사는 학생들에게 비형식적 지식을 말하게 함으로써 자신들이 분명하게 인식하지 못했던 비형식적 지식을 깨닫도록 하고, 형식적 지식을 구성할 수 있도록 도울 수 있다고 한다. 따라서, 최근의 학자들(Baroody & Coslick, 1998; Van de Walle, 2004)도 분수의 나눗셈에서 형식적인 알고리즘을 지도하기에 앞서 비형식적인 탐구를 강조하고 있다.

하지만, 이러한 비형식적 지식은 형식적 지식과 충돌할 수 있는데, 이 두 지식들 사이에 아무런 연결이 없다면 학교에서의 교수·학습은 더욱 어려워질 것이다. 예를 들어, Nunes, Schliemann, & Carraher(1993)의 연구에서 길거리 노점상에서 과일을 파는 어린이들은 자신들의 비형식적 방법을 사용하여 능숙하고 정확하게 가격을 계산했음에도 불구하고, 학교에서 똑같은 구조의 문제를 수식으로 제시했을 때 제대로 계산하지 못했다. 그러한 주요 원인을 Whitney(1985)는 교사와 교사 교육자, 연구자, 교과서 집필자가 학생의 비형식적 수학을 인식하지 못하거나, 혹은 그들이 그것을 존중하지 않거나, 성인의 완성된 수학을 전수하려고 하기 때문이라고 지적한다.

따라서, 본 연구에서는 분수의 나눗셈을 형식화할 수 있는 방안을 학생들의 비형식적 지식의 관점에서 검토하고, 대안적인 분수 나눗셈의 형식화 방안을 모색하고자 한다.

2. 연구내용

본 연구에서는 위의 연구 목적에 따라 다음과 같은 연구내용을 설정하였다.

* ZDM분류 : D42
* MSC2000분류 : 97D40

1) Baroody & Coslick(1998) 제시한 연결의 5가지 유형은 다음과 같다: (1) 학생이 가진 비형식적 지식을 형식적인 기호나 절차와 연결하기, (2) 개념과 절차를 연결하기, (3) 개념과 절차에 대한 다양한 표상을 연결하기, (4) 수학 주제들을 서로 연결하기, (5) 수학을 다른 내용 영역이나 일상생활에 연결하기

(1) 분수의 나눗셈에서 학생들의 비형식적 지식의 형식화를 위한 교수·학습 방안을 알아본다.

(2) 분수의 나눗셈에서 비형식적 지식을 형식화할 수 있는 교수·학습 활동자료를 개발한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 분수 나눗셈의 형식화 방안에 대한 외국의 연구

가. Liping Ma(1999)의 연구

분수 나눗셈에 관한 미국과 중국 교사들의 이해 수준을 비교한 Liping Ma(1999)의 연구에서 중국교사들은 분수 나눗셈에서 역수를 곱하는 원리를 다음과 같이 다양하게 정당화했다.

(1) 괄호의 성질과 연산 순서에 관한 규칙을 이용한 방법

$$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = 1\frac{3}{4} \div (1\div 2) = 1\frac{3}{4} \div 1\times 2 = 1\frac{3}{4}\times 2 \div 1$$
$$= 1\frac{3}{4}\times(2\div 1) = 1\frac{3}{4}\times 2$$

(2) 몫 값의 보존규칙을 이용한 방법

$$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = (1\frac{3}{4}\times\frac{2}{1}) \div (\frac{1}{2}\times\frac{2}{1})$$
$$= (1\frac{3}{4}\times\frac{2}{1})\div 1 = 1\frac{3}{4}\times\frac{2}{1} = 3\frac{1}{2}$$

(3) $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ 라는 표현의 의미를 이용한 방법

$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$는 어떤 수의 $\frac{1}{2}$이 $1\frac{3}{4}$이라는 뜻입니다. 어떤 수는 $3\frac{1}{2}$이지요. 이 수는 $1\frac{3}{4}\times 2$의 답과 일치합니다. 2는 $\frac{1}{2}$의 역수입니다. 나는 이런 식으로 학생들에게 설명하겠어요.

그밖에도 중국교사들은 대안적인 방법으로 분수를 소수로 바꾸어 계산하는 방법과 분배법칙을 이용한 방법, 분자는 분자끼리 그리고 분모는 분모끼리 나누는 방법을 각각 사용하였다. 그런데 우리나라의 초등학생도 이러한 정당화를 할 수 있는가를 따져보아야 한다. 우리나라의 초등학생은 연산 순서에 관한 규칙이나 몫 값의 보존 규칙을 사전에 배우지 않으므로 위와 같이 정당화할 수 없다.

나. 미국의 교사 참고용 문헌에서의 분수 나눗셈 지도 방안

Baroody & Coslick(1998)은 분수 나눗셈 알고리즘을 지도하는 방법을 크게 두 가지로 나누고 있다. 하나는 동분모 분수를 이용한 방법으로 우선 구체물을 이용하여 나누는 활동을 한 후 그것을 상징화하여 아래와 같이 형식화한다.

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{6} \div \frac{2}{6} = 3\div 2 = 1\frac{1}{2}$$

그런데, 여기에서 특이한 점은 우리나라의 경우와 같이 동분모 분수를 이용한 방법을 대수적으로 형식화(역수를 곱하는 방법)하지 않았다는 점이다. 두 번째 방법은 역수를 곱하는 방법인데, 이것은 크게 두 가지 방법으로 나뉘어진다. 하나는 여러 가지 분수 나눗셈 문제를 비형식적으로 해결하게 한 후 그 식과 답을 기록하고, 답을 구하기 위한 간편한 방법 혹은 패턴을 찾게 하는 방법이다. 또 하나는 번분수를 이용하는 방법으로 $6\div 2 = \frac{2}{6}$라는 점을 이용하여 $\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{8}}$라는 사실을 유도하고 이것을 간단하게 만드는 방법을 탐구하여 역수를 곱하는 원리를 찾도록 하였다.

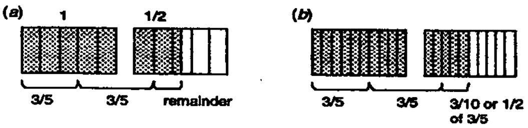
Van de Walle(2004)은 분수 나눗셈을 비형식적으로 탐구한 후, 알고리즘을 개발하기 위해서 우선 구체물을 이용하여 분할하는 활동을 통해 동분모 분수의 나눗셈으로 산술적인 해를 구하도록 하고 있다. 두 번째로 역수를 곱하는 알고리즘을 소개하고 있는데, 여기서는 특이하게도 분수의 개념에 기초하고 있다. 분수의 나눗셈과 관련하여 '물통에 물을 $\frac{2}{3}$L 채웠더니 $\frac{7}{8}$만큼 채워졌다. 물통에 물을 가득 채우면 얼마나 담을 수 있는가?'라는 문제를 생각해볼 수 있다. 이 문제를 해결하기 위해서는 $\frac{2}{3}$에서 7을 나누어 $\frac{1}{8}$을 구한 후 8을 곱해야 한다. 분수의 의미를 생각해보면 분모는 부분의 종류를 결정하면서 전체를 몇 부분으로 나누므로 분모는 나누는 수이고, 분자는 부분의 개수를 의미하므로 곱하는 수이다. 따라서 앞의 문제에서 $\frac{2}{3}$를 7로 나누고 8을 곱해야하므로 $\frac{2}{3}$에 $\frac{8}{7}$을 곱하면 된다.

다. Siebert의 제안

Siebert(2002)는 학생이 자연수 나눗셈의 2가지 의미를 이용하여 분수의 나눗셈과 연결할 수 있는 방법을 제시하고 있다. 자연수 나눗셈에는 어떤 수에서 한 수를 몇 번 뺄 수 있는가를 발견하는 포함제와 무언가를 똑같은 묶음으로 분배하는 등분제의 의미가 있다. 두 가지 의미에 따라 분수 나눗셈을 지도하는 방안을 소개하면 다음과 같다.

1) 포함제 관점에서의 분수 나눗셈의 지도 방안

자연수 나눗셈에서 포함제의 의미를 그대로 분수의 나눗셈으로 확장할 수 있다. 예를 들어 $1\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$이라는 나눗셈 문제를 생각해보자. 포함제로 해석하면, 이 문제는 $1\frac{1}{2}$안에 $\frac{3}{5}$이 몇 번 들어가는지를 묻는 것과 같다. 그림으로 해결하면 <그림 1>과 같다.

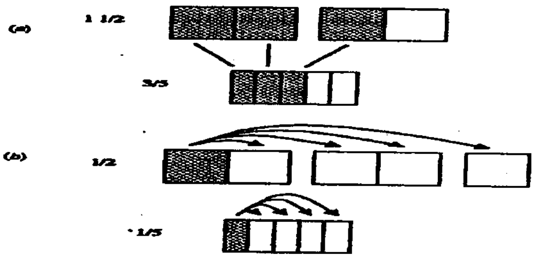


<그림 1> 포함제에 대한 모델(Siebert, 2002. p. 250)

비록 <그림 1>은 포함제 관점에서 분수 나눗셈을 위한 풍부한 의미를 제공하지만, 왜 역수를 곱하는지 알 수 없다. 하지만, 그림에서 $\frac{3}{5}$의 역수를 먼저 찾음으로써 역수를 곱하는 알고리즘을 개발할 수 있다. $1 \div \frac{3}{5}$을 생각해보면, 그것은 1에 $\frac{3}{5}$이 몇 번 들어있는가를 묻는 것과 같다. $\frac{3}{5}$을 만들기 위해서는 $\frac{1}{5}$짜리가 3개를 있어야하기 때문에, 이러한 $\frac{1}{5}$짜리 조각들은 각각 $\frac{3}{5}$의 $\frac{1}{3}$을 나타낸다. 하지만 1에는 이러한 $\frac{1}{5}$조각들이 정확하게 5개 있다. 따라서, $\frac{3}{5}$의 역수인 $\frac{5}{3}$는 1안에 $\frac{3}{5}$이 얼마나 많이 포함되어 있는지 말해주고 있다. 일단, 1안에 $\frac{3}{5}$이 $\frac{5}{3}$묶음 있다는 것을 깨닫는다면, 전체(1)에는 $\frac{3}{5}$이 $\frac{5}{3}$묶음 있고, 전체의 반($\frac{1}{2}$)에는 $\frac{3}{5}$의 $\frac{5}{3}$묶음의 반이 있다. 따라서, $1\frac{1}{2}$에는 $\frac{3}{5}$의 $\frac{5}{3}$묶음이 $1\frac{1}{2}$이 있거나, $1\frac{1}{2}$에는 $\frac{3}{5}$이 $1\frac{1}{2} \times \frac{5}{3}$묶음 있다. 이것은 $1\frac{1}{2} \div \frac{3}{5} = 1\frac{1}{2} \times \frac{5}{3}$라는 것을 보여준다.

2) 등분제 관점에서의 분수 나눗셈의 지도 방안

등분제의 의미가 분수의 나눗셈에 어떻게 확장될 수 있는지를 설명하기 위해, $1\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$이라는 문제를 생각해 보자. 이 문제를 다음과 같이 질문함으로써 등분제 상황으로 인식할 수 있다. "만약 모둠의 $\frac{3}{5}$이 $1\frac{1}{2}$을 가졌다면, 전체 모둠은 얼마를 가질까?" 이것은 등분제 상황을 만드는데, 왜냐하면 자연수 나눗셈에서의 등분제는 구슬 12개를 4명에게 똑같이 나누어준다면 **<u>각자(한 사람 당)</u>** 몇 개를 가지게 되는가와 같은 문제를 생각할 수 있다. 즉, **<u>단위 크기(전체) 당</u>** 얼마만큼 나누어 가지느냐의 문제인데, 이것은 위의 문제와 일치하기 때문이다. 모둠의 $\frac{3}{5}$이 $1\frac{1}{2}$을 가졌다면 <그림 2(a)>에서와 같이 모둠의 $\frac{1}{5}$은 $\frac{1}{2}$만큼 가지게 되고, 그것은 처음의 양의 $\frac{1}{3}$만큼 축소된다. 모둠의 전체가 가진 양을 알아보기 위해서는 $\frac{1}{5}$로 축소된 양을 <그림 2(b)>와 같이 5배로 확대해야 한다. 즉, 모둠의 $\frac{3}{5}$이 $1\frac{1}{2}$을 받게 된다면, 전체 모둠이 얼마를 받을 것인가를 발견하기 위해서 $1\frac{1}{2}$의 $\frac{5}{3}$를 취했으며, 그것은 전체 모둠이 $2\frac{1}{2}$을 받게 된다는 것을 알려준다.



<그림 2> 등분제에 대한 모델(Siebert, 2002. p. 253)

2. 분수 나눗셈의 형식화 방안에 대한 국내의 연구

박만구(2002)는 한국과 미국 교과서에서의 분수 나눗셈 지도 방법을 비교했는데, 분수 나눗셈을 도입하고 전개하는 과정에는 다소 차이가 있다고 지적하고 있다. 즉, 한국에서의 분수 나눗셈의 전개 방법은 동분모 진분수끼리의 나눗셈이 분자들끼리의 나눗셈과 같다는 원리를 직접적인 모델링을 통해 이해하고, 이분모 진분수끼리의 나눗셈에서는 분모를 통분하여 분자들끼리의 나눗셈을 할 수 있다는 것을 알게 한다. 그리고 나서 분수의 나눗셈에서 역수를 곱한다는 원리를 다음과 같은 식을 제시함으로써 발견하도록 하고 있다.

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3\times5}{4\times5} \div \frac{2\times4}{5\times4} = \frac{3\times5}{2\times4} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$$

미국의 교과서에서는 준비 단계로 곱셈식을 나눗셈식으로 바꾸어 보는 연습을 하고 자연수를 여러 가지 단위분수로 나눌 때 몫이 어떻게 되는지를 관찰하여 작은 분수로 나눌수록 몫이 커진다는 것을 이해하도록 하고 있다. 한국의 교과서와는 다르게 (자연수)÷(단위분수)를 바로 도입하며, 분수의 나눗셈과 곱셈의 관계를 이해시키기 위하여 단위분수로 나누는 경우와 그의 역수를 곱하는 경우($\frac{3}{4} \div \frac{1}{8}$과 $\frac{3}{4} \times 8$)를 각각 계산하여 그 값을 비교함으로써 분수의 나눗셈에서 역수를 곱하면 된다는 원리를 일반화하고 있다.

박만구(2002)는 분수의 나눗셈에 대한 이해를 위해서는 분수 자체에 대한 이해가 선행되어야 한다고 하면서 기준량 1에 대한 상대적인 양을 분수로 생각해 보도록 할 것을 제안한다. 본인이 생각하기에 이것은 역수의 의미를 음미하도록 하는 활동이라고 할 수 있는데, 그것은 연구자의 아이디어일 뿐 구체적인 교수·학습 경로를 설계하여 개발·적용할 필요가 있다고 생각된다.

한편, 박혜경(2003)은 분수 나눗셈에서 제수의 역수를 곱하는 이유를 학생이 발견하도록 하기 위하여 3가지 방법을 사용했다. 첫 번째 방법인 번분수를 이용하는 방법은 표준 알고리즘의 이유를 제시하는 데에는 효과가 있었으나, 그 설명 과정에서 여러 가지 절차적 지식을 요구하므로 기본이 되는 절차적 지식을 충분히 갖춘 경우에 효과가 있다고 했다. 두 번째 방법은 현행 교과서의 접근 방법으로 분모를 같게 만들어 분자끼리의 나눗셈으로 자연수 나눗셈과 연결시키는 과정인데, 학생들에게 충분한 예와 시간을 주어야 가능하다고 지적하였다. 세 번째 접근 방법은 분수 막대를 이용하여 원하는 도막 수나 원하는 크기로 잘라 보는 활동을 하는 것으로 학생 수나 시간의 제약 등을 고려하여 실시해야 하고, 활동 자체로 그치지 않고 수학적 연결을 경험할 수 있도록 교사의 적절한 안내가 있어야 한다고 주장한다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구설계 및 연구대상

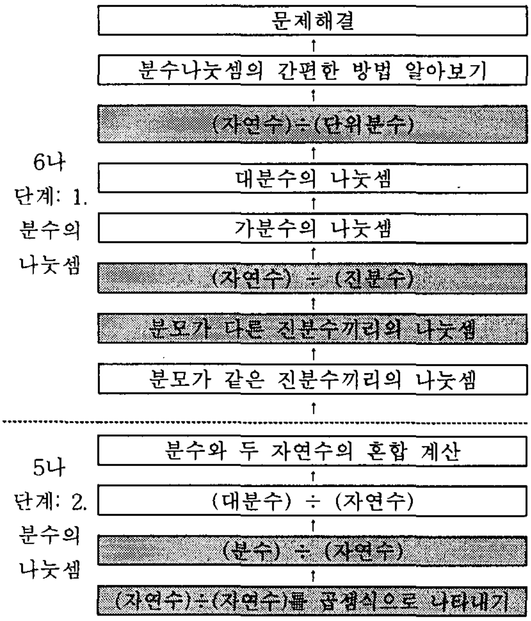
본 연구에서는 분수 나눗셈에서 학생들의 비형식적 지식과 그 형식화를 위한 교수·학습 방법을 알아보기 위해서 4차시의 교수실험을 연구자의 지도 아래 방과후에 실시하였다. 교수실험의 대상은 청원군에 위치한 W초등학교 4학년 학생들 중 분수의 나눗셈을 형식적으로 지도 받지 않은 7명의 희망자이다. 이 학생들의 학업성취수준은 보통이며, 교수실험 이전에 이미 분수의 개념과 덧셈, 뺄셈을 배운 상태였고, 분수의 곱셈에 대한 교수 실험이 끝난 후에 분수 나눗셈에 대한 교수 실험을 실시하였다. 모든 교수실험을 비디오로 촬영하였고, 이를 전사하여 분석한 결과를 바탕으로 전체 사전교안을 수정·보완하여 분수의 나눗셈에서 비형식적 지식의 형식화를 위한 교수·학습 활동자료로 제시하였다.

2. 사전교안 개발

가. 내용선정

교육인적자원부(2001)에서 발행한 초등학교 수학교과서 5-나와 6-나 단계에서 분수의 나눗셈에 대한 학습과정은 <그림 3>과 같다. 이 그림에서 색칠된 부분이 분수의 나눗셈 원리를 이해하는 데 핵심적인 부분이고, 그 밖의 가분수나 대분수 연산은 그 직전의 학습에서 탐구하여 알게 된 형식적 지식을 그대로 적용하면 되는 절차적 지식이므로 학생들의 비형식적 지식이 발현될 여지가 적다. 따라서 본 연구에서는 교수실험에서 사용될 사전교안의 내용으로 <그림 3>에서 색칠된 부분을 선정하였으며, 학생의 비형식적 지식 즉, 분할에 관한 지식을 고려할 때 현재의 전개 순서와는 판이

하게 다른 학습 경로가 필요하다. 따라서 교수실험에서는 다음과 같은 순서로 학습 주제를 배열하였다:(자연수)÷(자연수)⇒(분수)÷(자연수)⇒(자연수)÷(단위분수)⇒(자연수)÷(진분수)를 포함한 (진분수)÷(진분수)



<그림 3> 분수 나눗셈에서 추출한 주제

Ⅳ. 교수실험 및 결과분석

1. 교수실험

교수실험은 학생들이 분수의 나눗셈에서 어떤 비형식적 지식을 가지고 있고, 그러한 지식을 형식적 지식과 연결시킬 때 어떠한 교수·학습방법이 필요하며, 학생의 비형식적 지식과 형식적 지식을 연결하기 위해서는 개발한 사전교안을 어떻게 수정·보완해야할 것인지에 초점을 두고 분석하였다.

1) 교수실험 1: (자연수) ÷ (자연수)

(1) 문제 상황: ① 수아는 1m의 색 테이프를 똑같이 3도막으로 나누어 선물을 3개 포장하려고 한다. 선물 1개를 포장하는데 사용된 색 테이프의 길이는 얼마인가?

② 세명이는 3m의 색 테이프를 똑같이 5도막으로 나누어 꽃을 5개 만들려고 한다. 꽃 1개를 만드는 데 사용된 색 테이프의 길이는 얼마인가?

(2) 실험 결과 분석

1m의 색 테이프를 3도막으로 똑같이 나누었을 때의 상황을 길이 모델을 이용하여 쉽게 표상하였고, 한 도막의 길이가 $\frac{1}{3}$임을 쉽게 알 수 있었다. 그리고 식으로 $\frac{3}{3}\div3=\frac{1}{3}$로 표현했는데, 그 이유는 $1\div3$보다 $\frac{3}{3}\div3$이 학생들에게는 더 조작가능한 수식[2)]으로 인식되었기 때문이라고 생각된다. 그런데 그러한 나눗셈 식을 곱셈식으로 전환하는 데에는 많은 어려움이 있었는데, 교사는 세명이가 올바르게 나타낸 것을 보고 그것을 토대로 다음과 같이 전개해 나갔다.

194 교사: 곱셈으로 나타내어보라니까 잘 못하겠어요? 아까 보니까 세명이가 한 것 같은데, … 세명이가 한 것을 보자.

195 세명: ($1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$로 나타냄)

196 교사: 그런데 왜 이렇게 나타냈지?

197 세명: 설명을 잘 못하겠어요.

198 교사: 누가 설명해 볼 사람? 그래, 준혁이.

199 준혁: $1\times\frac{1}{3}$은, $\frac{1}{3}$ 곱하기 1을 하면 $\frac{1}{3}$이 나오기 때문이에요.

200 교사: [세명이가 손을 듬] 웅, 세명이가 한 번 설명해 보자.

201 세명: 1m를 똑같이 세 개로 나누어서 하나를 나타내니까요. 세 개로 나눈 것 중의 하나이기 때문에 …

202 교사: 또 다른 사람? 웅, 영빈이!

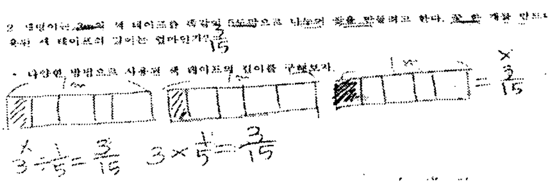
203 영빈: 1m를 똑같이 3부분으로 나누면 1의 $\frac{1}{3}$이 되고, 그것은 1의 $\frac{1}{3}$배이기 때문입니다.

---

2) 학생들에게 문제를 해결한 후 문제 상황을 식으로 나타내어보게 했을 때, 형식적인 수식과는 달리 자신들이 조작할 수 있는 수식으로 표현하였다. 무엇에 관한 모델(model of)과 무엇을 위한 모델(model for)이 있듯이(Gravemeijer, 1994) 수식에도 두 가지 의미의 수식이 존재한다. 하나는 문제 상황을 그대로 나타내는 기술적인 수식이 그 하나요, 또 다른 하나는 조작을 할 수 있는 즉, 조작가능한 수식이 또 다른 하나이다. 일반적으로 학생들에게 비형식적으로 문제를 해결하게 한 후 형식화하도록 유도했을 때 기술적인 수식보다는 조작가능한 수식을 먼저 만드는 경향이 있었다(백선수, 2004).

프로토콜 197과 201에서 세명이는 곱셈식으로 올바르게 나타내었으나, 자신의 방법을 정확하게 정당화하지 못했다. 하지만, 세명이가 나타낸 수식과 설명을 토대로 프로토콜 203에서 영빈이는 자연수의 나눗셈을 분수의 곱셈으로 명확하게 연결한 것 같다.

그런데 두 번째 문제에 대해서는 학생들이 단위에 대하여 많은 혼동을 일으켰다. 다음 <그림 4>에서와 같이 세명이가 정확하게 등분할을 했지만, 분할한 결과를 처음에는 $\frac{3}{15}$으로 잘못 기록하였다. 어떤 학생은 3m를 단위로 생각해서 그것을 5등분하면 $\frac{1}{5}$이라고 답하기도 했다. 이것은 단위에 대한 개념이 올바르지 않기 때문이라고 생각된다. 처음에 3m를 단위로 생각한 것은 올바르나 등분이 끝난 후에 답을 해석하는 과정에서는 1m를 단위로 인식해야 한다. 학생이 제대로 등분했음에도 불구하고 등분한 결과를 제대로 해석하지 못할 경우에는 교사의 도움이 필요하다. 세명이의 경우에는 3m를 1m씩 길이 모델을 이용하여 해결했는데, 교사가 각각의 길이 모델마다 1m를 표시해 주자 정확하게 해석할 수 있게 되었다.



<그림 4> 교수 실험 1에서 세명이의 풀이

그런데 문제 상황을 자세히 살펴보면 단위가 불명확하게 나타나 있음을 알 수 있다. 즉, 꽃 한 개를 만드는 데 사용된 색 테이프의 길이가 전체 길이의 $\frac{1}{5}$ 혹은 $\frac{3}{15}$이라고도 할 수 있기 때문이다. 따라서 문제 상황에서 구하고자 하는 것의 단위가 명확하게 나타날 수 있도록 '사용한 색 테이프의 길이는 **<u>몇 m</u>**인가?'와 같이 수정되어야 할 것이다.

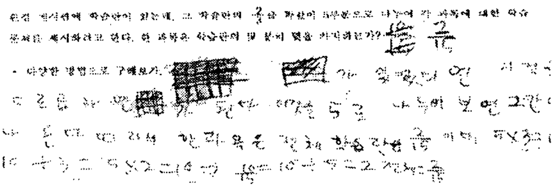
<u>2) 교수 실험 2: (분수) ÷ (자연수)</u>

(1) 문제 상황: 환경 게시판에 학습란이 있는데, 그 학습란의 $\frac{2}{3}$를 똑같이 5부분으로 나누어 각 과목에 대한 학습 문제를 제시하려고 한다. 한 과목은 전체 학습란의 몇 분의 몇을 차지하는가?

(2) 실험 결과 분석

처음에 학생들은 $\frac{2}{3}$ 나누기 5에 해당하는 모델을 쉽게 표상하지 못했다. 교사는 학생이 비형식적 지식을 이용하여 비교적 쉽게 해결할 수 있으리라 생각했으나 그 반대의 반응을 보였다. 그 이유는 부분적으로 학생들이 작은 수를 큰 수로 나눈다는 것을 받아들이기 어려워하는 것 같다. 왜냐하면 학생들의 자연수 나눗셈에 관한 지식은 피제수가 제수보다 큰 경우만을 경험했다. 따라서 피제수가 제수보다 작은 경우를 나눗셈으로 받아들이기 어려워하는 것 같았다.

초기의 그러한 거부감에도 불구하고 교사와의 상호작용을 통해 $\frac{2}{3}$를 합성단위로 인식하게 되고 점차적으로 <그림 5>의 지홍이의 반응과 같이 직사각형 모델을 이용하여 분할 전략을 사용할 수 있었다. 지홍이의 반응에서 "5로 곱하면"이라는 표현은 분모와 분자에 각각 5를 곱해서 동치 분수를 만든다는 의미이다. 그리고 그 다음에 "5로 나누어보면"이라는 표현은 분자만을 나눈다는 의미로 해석된다.



<그림 5> 교수 실험 2에서 지홍이의 풀이

그런데, 정작 학생이 더 어렵게 느끼는 것은 그것을 식으로 표현하는 것이었다. 학생은 피제수가 제수보다 작은 나눗셈 식을 사용하는 것을 거부했다. 그것은 학생이 자연수의 연산에서 피제수가 제수보다 반드시 더 커야 한다는 인식과 피제수가 제수보다 클 경우에는 식을 조작할 수 없을 것이라는 우려 때문에 나타나는 현상이라 생각된다. 따라서 지홍이가 위에서 제시한 것처럼 $\frac{2}{3}$를 동치분수인 $\frac{10}{15}$으로 만든 후, 피제수의 분자가 제수보다 커졌을 때 분자만 나누는 것으로 표현했다. 이것 또한 학생이 식을 조작 가능한 식으로만 제한하여 인식하고 있음을 나타내는 또 다른 증거라고 생각된다.

또한, 작은 수를 큰 수로 나눌 수 있다는 생각을 가질 수 있도록 하는 것이 중요할 것 같다. 그렇게 하기 위해서는 분수의 분자가 자연수로 나누어지는 경우의 예를 먼저 제시하는 것이 좋을 것 같다. 예를 들어 $\frac{4}{5}\div 2$에 해당하는 문제를 먼저 제시한다면 $\frac{4}{5}$를 두 부분으로 나누어야할 대상으로 인식할 것이다. 일단 분수의 나눗셈으로 표현하면 학생들이 비형식적인 분할 전략을 이용하여 그린 직사각형 모델을 이용하여 분수의 곱셈과 연결시킬 수 있도록 자극해야 할 것이다.

3) 교수 실험 3: (자연수) ÷ (단위 분수)

(1) 문제 상황: ① 길이가 1m인 색테이프를 $\frac{1}{5}$m씩 자르면 몇 도막이 되는가?

② 길이가 3m인 색테이프를 $\frac{1}{5}$m씩 자르면 몇 도막이 되는가?

2) 실험 결과 분석

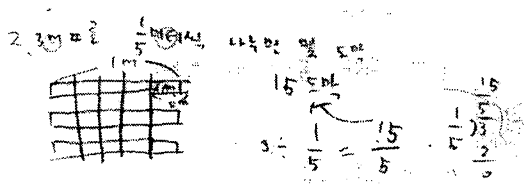
학생들은 1m를 $\frac{1}{5}$m로 나누는 문제를 아주 정확하게 표상하여 해결했다. 그런데 식으로 나타내는 데에는 조금 어려워했다. 아마도 자연수의 연산에서는 몫이 피제수보다 작았는데, 자연수와 단위 분수의 나눗셈에서 몫이 피제수보다 더 커짐으로 인해서 인지적 갈등을 겪는 것으로 판단된다. 다음의 프로토콜을 살펴보자.

수아가 나와서 띠 모델을 이용하여 1m를 정확하게 나타내어 $\frac{1}{5}$씩 분할하나 그것을 식으로는 잘 나타내지 못한다.

204 교사: 누가 나와서 식으로 나타내어 볼 사람?
205 도영: 저요.
206 교사: 그래, 도영이가 나와서 설명해 보자.
207 도영: 1m는요 $\frac{5}{5}$m니까요. ($\frac{5}{5}\div\frac{1}{5}$=5를 적으면서) 나누기 $\frac{1}{5}$을 하면 5가 나와요.
208 교사: 그런데, 원래는 1m였잖아?
209 도영: 그런데 $\frac{5}{5}$는 결국 1이 되기 때문에 1m로 생각해서요.
210 교사: 그럼, 식을 달리 나타낼 수도 있겠네?
211 도영: 네, 1 나누기 $\frac{1}{5}$요.

프로토콜 207에서 도영이는 (자연수)÷(분수) 문제를 (분수)÷(분수)로 고쳐서 생각하게 되었다. 따라서 $1\div\frac{1}{5}$을 했을 때에는 그 결과가 5가 된다는 것을 생각할 수 없었는데, $\frac{5}{5}\div\frac{1}{5}$을 함으로써 결과가 5가 된다는 것을 확신할 수 있었다. 또한 그러한 식을 간단히 $1\div\frac{1}{5}$로 바꿈으로써 원래의 문제의 의도에 맞는 식으로 만들 수 있었다. 그러면 3m를 $\frac{1}{5}$m씩 자르는 문제를 다음 프로토콜을 보면서 살펴보자.

212 영빈: (3m를 아래 그림과 같이 1m씩 분할 한 후, 식으로 $3\div\frac{1}{5}=\frac{15}{5}$라고 쓴다.)



<그림 6> 교수 실험 3에서 영빈이의 풀이

213 교사: 왜 $\frac{15}{5}$라고 썼지?
214 영빈: 왜냐하면요 ($3\div\frac{1}{5}$을 세로셈 식을 쓰면서) 1번 들어가면 이게($\frac{1}{5}$의 분자를 가리키면서) 5가 되어야 하니까요. 3을 나누면 $\frac{15}{5}$가 되요[그림을 보면 영빈이는 $\frac{15}{5}$라고 썼으면서도 그것이 $\frac{1}{5}$짜리가 15도막 있다는 의미로 나타낸 것 같다.].
215 교사: 이의 있는 사람?
216 지홍: 이의를 제기 합니다. 여기서[문제]는 3m를 $\frac{1}{5}$씩 자른다고 했는데, 여기[영빈이의 그림]서는 1m를 따로 따로 잘랐어요.
217 교사: 그럼 지홍이가 해봐!
218 지홍: (3m 띠를 그린 후 5개로 나누면서) 3m가 있는데 이것을 $\frac{1}{5}$씩 자르면 5도막이 되요.
219 교사: 여기에 대해서 이의를 제기할 사람?
220 영빈: 저요!
221 교사: 음, 영빈이가 설명해 보자.

222 영빈: 3m 잖아요! 아까 1m였을 때에도 5도막으로 나누었구요. 3m는 1m, 1m, 1m라서 5개씩 3번해서 15개가 되어야 해요.

223 교사: 그럼, 여기(식을 가리키면서) 정답이 15개가 되어야하는데 왜 $\frac{15}{5}$지?

224 영빈: ($\frac{15}{5}$에서 분자 15를 가리키면서) 15개에요.

225 교사: 또 다른 의견이 있는 사람?

226 준혁: 선생님 저요! 3m의 1개는 각각 1m이고, 1m에는 $\frac{1}{5}$m가 5개 들어가서 3 곱하기 5는 15개예요.

227 교사: 지홍이 편에서 이야기해 볼 사람? 웅, 도영이.

228 도영: 새로 그림을 그려서 …

229 교사: 그래 새로 그림을 그려서 해봐!

230 도영: (3m를 1m씩 가로로 그려서 1m를 각각 5조각씩 나눈다.) 3m인데요. 이것을 5칸으로 나누면($\frac{1}{5}$m짜리 3개를 한 묶음으로 묶으면서), 이렇게 5도막이 되요.

231 영빈: 왜 3도막씩 묶었어? 선생님이 $\frac{1}{5}$m씩 나눈다고 했잖아. 넌, 3도막씩 묶으면 $\frac{3}{5}$m가 되잖아.

232 교사: 영빈이의 생각에 대해 어떻게 생각해?

233 도영: 제가 잘못 생각한 것 같아요.

234 교사: 지홍이는 어떻게 생각해?

235 지홍: 저는 3m를 $\frac{1}{5}$씩 나누는 것인 줄 알았어요. 이제 보니까 3m를 $\frac{1}{5}$m씩 나누는 것이 맞는 것 같아요.

프로토콜 216, 218, 235를 보면, 지홍이와 도영이는 단위를 1m로 보아야 하는데 3m를 단위로 보았거나 문제에서 요구한 $\frac{1}{5}$m가 아닌 3m의 $\frac{1}{5}$로 착각했기 때문에 오류를 보였다고 생각된다. 이러한 오류를 동료와의 상호작용을 통해 해소할 수 있었다. 학생들은 종종 자신의 비형식적 지식에 있어서 무엇이 잘못되었는지를 지각하지 못하는 경우가 있었다. 하지만 위의 프로토콜에서와 같이 동료와 상호작용을 통해 자신의 비형식적 지식을 반성할 수 있는 기회를 가졌다.

학생들의 비형식적 지식은 경우에 따라서는 문제 상황을 최대한 활용하는 경향을 보였다. 준혁이는 3m를 $\frac{1}{5}$m로 나누는 문제를 다음 그림과 같이 식으로 나타내었다.

$$100 \div 5 = 20 \times 5 = 100 \div 20 = 5 \times 3$$

<그림 7> 교수 실험 3에서 준혁이의 풀이

식을 보고 무엇을 연상할 수 있는가? 분명 엉뚱하기 그지없는 식이지만, 준혁이에게 있어서는 나름대로 체계적인 절차였다. 준혁이는 다음과 같이 설명하였다.

236 준혁: 100은 1m를 100센티미터로 나타낸 거고요, 5는 5개로 나눈 것이고, 20은 한 조각의 길이를 센티미터로 나타낸 것이고, 그것을 다시 5곱하면 100센티미터가 되고, 그것을 한 조각의 크기 20으로 나누면 5조각이 되고, 곱하기 3을 한 것은 3m이기 때문입니다.

이러한 준혁이의 반응은 등호의 의미를 무시하긴 했지만, 형식적으로 문제를 해결했을 때 문제해결의 반성 단계에서 그 결과를 의미 있게 음미할 수 있도록 하는 하나의 방안이라고 생각된다. 학생들은 자신의 비형식적 지식을 이용하여 문제를 해결하고 그 과정에서 문제 상황에 내포되어 있는 정보들을 최대한 활용한다. 교수 실험 3에서 주목해야 할 것은 제수가 1보다 작은 수로 나누었을 때 그 결과가 피제수보다 더 커진다는 것을 학생들이 주목할 수 있도록 안내해야 할 것이다.

4) 교수 실험 4: (진분수) ÷ (진분수)

(1) 문제 상황: ① 길이가 1m인 색테이프를 $\frac{2}{5}$m씩 자르면 몇 도막이 되는가? ② 길이가 1m인 색 테이프를 $\frac{3}{4}$m씩 자르면 몇 도막이 되는가? ③ 길이가 2m (혹은 4m)인 색 테이프를 $\frac{2}{5}$m씩 자르면 몇 도막이 되는가? ④ 길이가 $\frac{3}{4}$m인 색 테이프를 $\frac{2}{5}$m씩 자르면 몇 도막이 되는가?

2) 실험 결과 분석

'길이가 1m인 색 테이프를 $\frac{3}{4}$m씩 자르면 몇 도막

이 되는가?'라는 질문에 학생들 중에는 $1\frac{1}{3}$도막 들어 간다고 말하는 학생이 있는 반면에 1도막과 $\frac{1}{4}$m가 남았다고 대답하는 학생이 있었다. 그래서 2도막이 되기 위해서는 어떻게 되어야 하느냐고 질문하고 그것을 그려보게 했다. 그러한 교사의 도움으로 많은 학생은 <그림 8>에서와 같이 $1\frac{1}{3}$도막이 된다는 것을 발견하였다.

<그림 8> 교수 실험 4에서 지홍이의 풀이

그럼, 학생은 형식적으로 분수의 나눗셈을 곱셈으로 어떻게 전환할 수 있는가? 다음의 활동은 학생이 분할하는 활동을 충분히 한 후에 전개된 내용이다.

237 교사: 같이 정리해 보자. 1m에는 $\frac{2}{5}$m가 몇 번?(교사가 칠판에 정리한다.)
238 학생들: $2\frac{1}{2}$(교사가 칠판에 정리한다.)
239 교사: 그것을 가분수로 나타내면?
240 학생들: $\frac{5}{2}$요(교사가 칠판에 정리한다.)
241 교사: 1m에 $\frac{3}{4}$m는 몇 번?
242 학생들: $1\frac{1}{3}$(교사가 칠판에 정리한다.)
243 교사: 그것을 또 가분수로 바꾸면?
244 학생들: $\frac{4}{3}$
245 준혁: 아! 거꾸로 하니까 되네요.
246 교사: 무슨 말이야?
247 영빈: 아!!!! 1m 안에는 $\frac{2}{5}$m가 $\frac{5}{2}$번 들어가고요. $\frac{3}{4}$m에는 $\frac{4}{3}$번 들어가요. 분자와 분모를 거꾸로 하니까 되는 것 같아요.
248 교사: 여러분이 한 방법도 참 좋은 방법인데… 혹시 이렇게 생각한 사람은 없니? $\frac{2}{5}$m는 $\frac{1}{5}$m의 몇 배지? (교사가 칠판에 정리한다.)
249 학생들: 2배요.
250 교사: $\frac{1}{5}$m는 $\frac{2}{5}$m의 몇 배지?(교사가 칠판에 정리한다.)
251 학생: 반인데…
252 교사: 반, 반 배지? 그것을 분수로 쓰면 어떻게 되지?(교사가 칠판에 정리한다.)
253 학생: $\frac{1}{2}$배.
254 교사: 1m 안에는 $\frac{1}{5}$m가 몇 번 들어가지?
255 학생: 5번이요.
256 교사: 1m 안에는 $\frac{2}{5}$m가 몇 번 들어갈까?
257 학생: $\frac{5}{2}$배.
258 교사: 왜 $\frac{5}{2}$배지?
259 학생: 2개가 들어가고 1개가 남으니까.
260 교사: 1m 안에는 $\frac{1}{5}$이 5개 들어가지? 어제 우리가 그것을 쉽게 했잖아. 그런데 $\frac{1}{5}$m는 $\frac{2}{5}$m의 반 배야. 그러니까 1m안에는 $\frac{2}{5}$m는 몇 번 들어갈까? 만약에 $\frac{1}{5}$m라면 5번 들어갈 수 있지? $\frac{2}{5}$m는 $\frac{1}{5}$보다 $\frac{1}{2}$배 들어갈 수 있지?
261 학생: 네~[건성으로 대답한다].
262 교사: 그래서 $\frac{2}{5}$m에는 1m 안에 $\frac{5}{2}$배가 들어갈 수 있는 거야. 알겠어?
263 학생: …

위의 활동을 자세히 관찰해 보면 프로토콜 245와 247에서 학생들은 자신이 해결한 결과와 식들 사이에 존재하는 규칙을 직관적으로 발견했음을 알 수 있다. 그런데, 교사가 설명한 Siebert(2002)가 제안한 방법은 학생들에게 유의미하게 받아들여지지 않음(프로토콜 261, 263)을 발견할 수 있었다. 즉, 학생들은 역수의 의미를 논리적인 관계로 파악하기보다는, 구체물을 분할하여 나타난 결과들을 제시했을 때 그 예에서 직관적으로 규칙을 더 쉽게 발견했다.

한편, 래혁이는 1m에는 $\frac{2}{5}$m가 $\frac{5}{2}$번 들어간다는 사실을 이용하여 7m일 경우에는 '$\frac{5}{2}\times7$'로 나타내었다. 래혁이가 형식적인 알고리즘을 미리 공부했다면 '$7\times\frac{5}{2}$'로 표현했어야 한다. 그 대신에 '$\frac{5}{2}\times7$'로 나타

낸 것은 1m 안에 $\frac{2}{5}$m가 $\frac{5}{2}$번 들어간다는 것을 알고, 7m이므로 $\frac{5}{2}$에 7을 곱한 것이다. 분수의 곱셈에서 두 수를 바꾸어 곱할 수 있다는 성질을 학생들이 이미 알고 있으므로, 그것과 이러한 발견을 연결시켜준다면 분수의 나눗셈에서 역수를 곱한다는 원리를 학생들이 스스로 재발명할 수 있으리라 기대된다.

그러한 규칙의 적용은 두 진분수 사이의 나눗셈에서도 그대로 이어졌다. 준혁이는 '길이가 $\frac{3}{4}$m인 색 테이프를 $\frac{2}{5}$m씩 자르면 몇 도막이 되는가?'라는 문제에 대해서 <그림 9>와 같이 문제를 해결하였다. 준혁이의 경우에도 형식적인 수학 지식의 영향을 받았다면 분모 분자에 모두 곱하기 기호를 쓰지 않았을 것이다. 그렇게 곱하기 기호를 넣은 이유는 분자와 분모를 따로 따로 곱해야한다는 자신만의 비형식적 기호체계를 나타낸 것이라고 할 수 있다. 특히 두 진분수의 나눗셈에서는 1m 속에는 $\frac{2}{5}$m가 $\frac{5}{2}$번 들어간다는 역수의 의미와 더불어 분수의 곱셈에 대한 개념이 확고해야 한다는 것을 학생들의 반응을 통하여 알 수 있었다. 몇몇 분수의 곱셈에 대한 개념이 부족한 학생들은 분수의 나눗셈에서 역수를 곱한다는 사실을 쉽게 발견할 수 없었다. 한편, 교수 실험 4의 학습 주제를 한 차시에 모두 다루기엔 너무 어렵다고 판단되므로 이 주제를 (자연수)÷(진분수)와 (진분수)÷(진분수)로 파시를 나누는 것이 바람직할 것이다.

$$\frac{3 \times 5}{4 \times 2} = \frac{15}{8}$$

<그림 9> 교수 실험 4에서 준혁이의 풀이

2. 교수실험에서 나타난 비형식적 지식과 그 형식화를 위한 시사점

가. 분수의 나눗셈에서의 비형식적 지식

본 연구의 교수실험에서 나타난 분수의 나눗셈에서의 학생들의 비형식적 지식 혹은 전략은 크게 3가지로 나눌 수 있는데, 직접적인 모델링 전략, 언어를 활용한 논리적인 추론 전략, 조작 가능한 식을 이용한 전략이 그것이다.

첫째, 직접적인 모델링 전략은 문제 상황에 내포되어 있는 행위나 관계를 원이나 직사각형, 혹은 띠 모양의 그림 등을 그려서 문제를 해결한 것으로, 넓이 모델, 길이 모델, 집합 모델로 다시 세분할 수 있다.

둘째, 언어를 활용한 논리적 추론 전략은 학생이 일상에서 사용하는 언어를 이용하여 사고 과정을 구체화하고 명확하게 하며, 그러한 언어를 문제를 해결하는 도구로 사용하는 전략이다. 이 전략은 학생이 직접적인 모델링 전략을 사용하고 난 후에 그것을 정당화하는 과정에서 주로 나타났다.

셋째, 문제에 제시된 행위나 관계를 고려하면서 숫자들을 적절한 연산자와 결합시키면 식을 만들 수 있다. 그러한 식은 문제를 해결하기 위해서 그 자체로서 존재하게 되며, 여러 가지 식의 성질이나 연산의 성질을 이용하여 문제를 해결하기 위한 조작의 대상이 된다. 앞에서 문제 상황을 그대로 나타내기 위한 식을 "기술적인 식"이라고 한다면, 문제를 해결하기 위한 도구로서의 식을 "조작적인 식"이라고 할 수 있다. 비형식적 지식을 존중해 주었을 때 학생들은 기술적 식보다는 조작가능한 식을 먼저 사용하려는 경향이 있었다.

나. 분수 나눗셈의 형식화를 위한 교수·학습 방법

분수의 나눗셈에서 현행 교과서에서는 비형식적으로 분할을 통해 탐구한 후에, 공통분모를 이용한 방법을 이용하여 역수를 곱한다는 원리를 유도하고 있다. 하지만, 분할을 이용한 방법은 나눗셈의 결과를 올바르게 구할 수는 있지만, 왜 역수를 곱하는지에 대한 근거를 제공하지 못하고 있다. 또한, 공통분모를 이용한 방법은 대수적으로 전개되어 있어서 학생이 수식에만 의존하여 조작할 수 없기 때문에 비형식적 지식과 단절되어 있다. 이것은 Baroody & Coslick(1998)과 Van de Walle(2004)이 분수의 나눗셈을 해결하기 위한 방법으로 공통분모를 이용한 방법과 역수를 곱하는 방법을 각각 달리 제시한 이유가 될 것이다.

교수 실험에서는 대부분의 학생이 간단한 분수의 나눗셈에서는 분할을 이용한 방법을 사용했지만 점차 수치가 복잡해짐에 따라 다른 방법을 찾으려는 경향이 있었다. 어떤 학생은 수치가 복잡해져도 계속해서 분할 방법을 사용했지만 그 결과를 제대로 구하지 못했을 뿐더러, 구했다고 하더라도 분수의 나눗셈에서 역수를 곱한다는 것으로 형식화할 수는 없었다. 그에 비해서 몇몇 학생은 $1 \div \frac{2}{5} = \frac{5}{2}$가 된다는 것을 분할을 통해

구하고, $4 \div \frac{2}{5}$를 1에는 $\frac{2}{5}$가 $\frac{5}{2}$번 들어가므로 4에는 $\frac{5}{2} \times 4$와 같이 해결하였다. 그리고 이러한 풀이는 분수의 곱셈에서 교환법칙이 성립한다는 사전 지식을 이용하여 쉽게 형식적 지식과 연결할 수 있었다. 즉, 학생들은 역수의 의미를 직접적인 모델링을 통해 탐구하고, 그것을 이용하여 분수의 나눗셈에서 역수를 곱한다는 원리와 연결시킬 수 있었다. 본 연구의 교수실험 과정에서 학생들이 보인 반응을 분석한 결과, 비형식적 지식을 형식화하기 위한 교수·학습 방법은 다음과 같다.

첫째, (자연수)÷(자연수)의 나눗셈에서 교사는 학생이 자신이 만든 직접적인 모델을 토대로 역수를 곱한다는 원리를 발견할 수 있도록 안내해야하며, 특히 피제수가 1이 아닐 경우에는 단위를 정확하게 인식할 수 있도록 도움을 제공해야 한다.

둘째, (분수)÷(자연수)의 나눗셈에서 학생들은 자연수의 연산과는 달리 작은 수로 큰 수를 나누어야 하는 인지적 부담을 가질 수 있으므로, 피제수의 분자가 자연수로 나누어 떨어질 수 있는 문제를 먼저 제시함으로써 작은 수가 나누어지는 대상이 될 수 있음을 인식하도록 해야 한다.

셋째, (자연수)÷(단위 분수)에서 피제수가 1이 아닌 경우에 단위를 정확하게 알고, 몫이 피제수보다 더 커질 수 있다는 점을 인식할 수 있도록 해야 한다.

넷째, (진분수)÷(진분수)에서 우선 피제수가 1인 경우를 비형식적으로 해결하게 함으로써 역수의 의미를 알게 하고, 피제수가 자연수인 경우와 진분수인 경우로 확장함으로써 형식적 지식과 연결한다. 이때 분수의 곱셈에 관한 지식은 이러한 형식화에 있어서 기초가 되므로 그것을 다져둘 필요가 있다.

본 연구에서는 위와 같은 교수·학습 방법을 교수실험의 사전교안에 반영하여 분수의 나눗셈에서 학생들의 비형식적 지식을 형식적 지식으로 연결하기 위한 교수·학습 활동자료를 개발하였다. 개발된 자료는 학습주제, 학습목표, 문제상황, 활동절차의 순서로 구성하였으며 [부록]에 첨부하였다.

V. 결론 및 제언

수학적 지식은 학교에 입학하기 전, 심지어는 유아때부터 발달한다. 어린이는 비형식적 수학 지식을 알게 됨으로써 형식적 수학을 이해하기 위한 기초를 다지게 된다. 그렇다면 비형식적 지식은 반드시 형식화되어야 하는가? 만약 그렇다면 왜 형식화해야 하는가? 그 이유는 아무리 비형식적 지식이 풍부하더라도 형식적 지식과 적절히 연결되지 못한다면 수학을 잘 행할 수 없기 때문이다. 그리고 문제의 구조가 복잡해질 때 비형식적 지식만을 가진 학습자는 인지적 부담을 가지게 되므로 비형식적 지식은 한계점을 드러내게 된다. 또한 비형식적 지식과 형식적 지식이 잘 연결된다면 이해가 촉진되기 때문에 반드시 형식화되어야 한다. 따라서 교사들은 학생이 가지고 있는 비형식적 지식에 대한 상(像)을 가지고, 그것을 형식화시킬 수 있는 교수·학습 방법과 교수·학습 활동 자료를 필요로 한다.

이를 위해 본 연구에서는 먼저 분수의 나눗셈에서 학생들이 가지고 있는 비형식적 지식과 그것을 형식화할 수 있는 교수·학습 방법이 무엇인지를 살펴보았다. 문헌 검토를 통해 4차시의 사전교안을 개발하고, 이를 본 연구자의 지도 하에 W초등학교 4학년 학생들에게 교수실험을 실시하여 분석한 결과, 학생들의 분수 나눗셈에서의 비형식적 지식은 그림을 이용한 직접적인 모델링 전략과 언어를 활용한 논리적 추론 전략, 조작 가능한 수식의 이용으로 나타났다.

한편, 교수실험 결과 학생들은 직접적인 모델링을 통해 역수의 의미를 탐구하고, 그러한 활동에서 발견한 규칙을 이용하여 분수의 나눗셈에서 역수를 곱한다는 원리와 연결시킬 수 있었다. 비형식적 지식을 형식화하기 위한 교수·학습 방법을 세밀히 분석하면 다음과 같다.

첫째, (자연수)÷(자연수)의 나눗셈에서 교사는 학생이 자신이 만든 직접적인 모델을 토대로 역수를 곱한다는 원리를 발견할 수 있도록 안내해야하며, 특히 피제수가 1이 아닐 경우에는 단위를 정확하게 인식할 수 있도록 도움을 제공해야 한다.

둘째, (분수)÷(자연수)의 나눗셈에서 학생들은 자연수의 연산과는 달리 작은 수로 큰 수를 나누어야 하는 부담을 가질 수 있으므로, 피제수의 분자가 자연수로 나누어 떨어질 수 있는 문제를 먼저 제시함으로써 작은 수가 나누어지는 대상이 될 수 있음을 인식하도록 해야 한다.

셋째, (자연수)÷(단위 분수)에서 피제수가 1이 아닌 경우에 단위를 정확하게 알고, 몫이 피제수보다 더 커질 수 있다는 점을 인식할 수 있도록 해야 한다.

넷째, (진분수)÷(진분수)에서 우선 피제수가 1인 경우를 비형식적으로 해결하게 함으로써 역수의 의미를 알게 하고, 피제수가 자연수인 경우와 피제수가 진분수인 경우로 확장함으로써 형식적 지식과 연결한다. 이때 분수의 곱셈에 관한 지식은 이러한 형식화에 있어서 기초가 되므로 그것을 다져둘 필요가 있다.

본 연구에서는 위와 같은 교수·학습 방법을 교수실험의 사전교안에 반영하여 분수의 나눗셈에서 학생들의 비형식적 지식을 형식적 지식으로 연결하기 위한 교수·학습 활동자료를 개발하였다. 개발된 자료는 학습주제, 학습목표, 문제 상황, 활동절차의 순서로 구성되었다.

본 연구에서 개발한 교수·학습 활동자료는 학생들이 비형식적 지식에 기초하여 형식적 지식을 의미 있게 학습하도록 할 뿐만 아니라 더 나아가 수학적 사고력과 긍정적 수학 성향을 길러줄 수 있다. 그러나 본 연구에서 제시한 교수·학습 활동자료는 하나의 자료일 뿐이며 교사가 학생들의 비형식적 지식을 존중하고 그것에 기초하여 형식화하려는 학급 문화를 만들어가야 할 것이다. 또한, 학생이 충분히 개념적으로 탐구하지 않은 상태에서 조급하게 형식화를 종용해서도 안될 것이다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2001). 수학 5-나. 서울: 대학교과서 주식회사.

__________ (2001). 수학 6-나. 서울: 대학교과서 주식회사.

박만구 (2002). 왜 $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$인가? 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 제13집. 39-54. 서울: 한국수학교육학회.

박혜경 (2003). 분수 나눗셈의 개념적 이해를 위한 관련 지식의 연결 관계 분석. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

백선수 (2004). 비형식적 지식을 활용한 분수 곱셈과 나눗셈에서의 형식화 지도 방안 개발. 한국교원대학교 대학원 박사학위 논문.

Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education.* Culemborg; Technipress.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* NY: Macmillan Publishing Company; Ontario: Maxwell Macmillan Canada, Inc.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Rston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nunes, T.; Schliemann, A. D. & Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics.* Oakleigh, Victoria(Australia): Cambridge University Press.

Siebert, D. (2002). Connecting informal thinking and algorithms: The case of division of fractions. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook* (pp. 247-256). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally(5th Ed.).* Boston: Pearson Education, Inc.

Whitney, H. (1985). Taking responsibility in school mathematics education. *The journal of mathematical behavior.* **3**. 219-235.

A Study on Alternative Formalization of Division of Fractions Using Informal Knowledge

Baek, Sun Su
Daegu Waryong Elementary School, Leegog-Dong, Dalseo-gu, 1191-1, Daegu, Seoul Korea.
E-mail: ss-baek@hanmail.net

The purpose of this study is to develop instructional methods for the formalized algorithm through informal knowledge in teaching division of fractions. The following results have been drawn from this study:

First, before students learn formal knowledge about division of fractions, they have informal knowledge or strategies to solve problems such as direct modeling strategies, using natural languages to reason mathematically, and using operational expressions.

Second, students could solve problems using informal knowledge which is based on partitioning. But they could not solve problems as the numbers involved in problems became complex. In the beginning, they could not reinvent invert-and-multiply rule only by concrete models. However, with the researcher's guidance, they can understand the meaning of a reciprocal number by using concrete models. Moreover, they had an ability to apply the pattern of solving problems when dividend is 1 into division problems of fractions when dividend is fraction.

Third, instructional activities were developed by using the results of the teaching experiment performed in the second research step. They consist of student's worksheets and teachers' guides.

In conclusion, formalizing students' informal knowledge can make students understand formal knowledge meaningfully and it has a potential that promote mathematical thinking. The teaching-learning activities developed in this study can be an example to help teachers formalize students' informal knowledge.

* ZDM classification: D42
* MSC2000 classification: 97D40

[부록] 분수의 곱셈에서 비형식적 지식의 형식화를 위한 교수 · 학습 활동자료

1) 활동 1: (자연수)÷(자연수)

(1) 학습 목표: (자연수)÷(자연수)의 문제 상황을 듣고 비형식적 방법으로 다양하게 해결하며, 자신이 해결한 것을 식으로 나타낼 수 있다.

(2) 문제 상황: ① 수아는 1m의 색 테이프를 똑같이 3도막으로 나누어 선물을 3개 포장하였다. 선물 1개를 포장하는데 사용한 색 테이프의 길이는 몇 m인가?

② 세명이는 3m의 색 테이프를 똑같이 5도막으로 나누어 꽃을 5개 만들었다. 꽃 1개를 만드는 데 사용한 색 테이프의 길이는 몇 m인가?

(3) 활동 절차

- 과자, 과일, 색 테이프, 철사 등을 똑같이 나누었던 경험을 이야기해 보게 한다.
- 앞에서 나누었던 대화를 적절히 이용하여 문제 상황을 구두로 제시한다.
- 다양한 방법으로 구해보게 한다.
- 소집단 활동 및 전체 활동을 통하여 나눗셈의 계산 원리를 파악한다.

첫 번째 문제에서 나눗셈 식으로 표현한 학생에게 곱셈으로 나타낼 수 있을지 물어보면서 곱셈식으로 나타내어보도록 자극한다. 곱셈식으로 잘 나타내지 못할 경우에는 분수 곱셈에서의 연산자의 의미를 되살려준다. 예를 들어 분수 곱셈에서 초콜릿 한 개의 $\frac{1}{3}$을 구하기 위해서 $1 \div 3 = \frac{1}{3}$로 구했던 비형식적 지식(백선수, 2004)을 상기시키도록 한다.

두 번째 문제에서 우선 3m를 똑같이 5도막으로 분할하는데 어려움을 겪는 학생이 있을 것이다. 그러한 경우에 그림으로 대략적으로 나타내어보게 하고 정확한 길이를 구하려면 어떻게 하면 될 것인지 생각해 보도록 한다. 3m를 15도막으로 똑같이 나누고 그 중의 3도막을 표시하기는 했으나, 그것을 $\frac{1}{5}$이라고 답할 수 있다. 그러한 경우, 구하고자 하는 것은 무엇인지, 그리고 답으로 구한 $\frac{1}{5}$이 무엇을 의미하는지 물어볼 수 있다. 만약 학생이 $\frac{1}{5}$m라고 반응한다면 1m를 5도막으로 똑같이 나눈 것 중의 1도막과 비교하도록 함으로써 인지적인 갈등을 유발할 수 있다.

학생들은 직접적인 모델링 전략과 수식을 보고, 자연수의 나눗셈에서 답을 구하기 위해서는 '피제수는 분자가 되고 제수는 분모가 된다'는 규칙을 발견할 수 있다. 또한 자연수의 나눗셈을 분수의 곱셈과 연결시킬 수 있다. 학생들은 분수의 곱셈에서 3m의 $\frac{1}{5}$을 구하기 위해서 3m를 똑같이 5개로 나눈 것 중의 하나이므로 비형식적으로 $3 \div 5$로 나타내었고(백선수, 2004), 그것을 형식적으로 $3 \times \frac{1}{5}$로 나타내었다. 따라서 자연수의 나눗셈을 해결하기 위해 '제수의 역수를 곱한다'는 원리를 발견하도록 하기 위해서는 자연수의 나눗셈과 분수의 곱셈을 연결시킬 수 있도록 두 상황을 교대로 제시함으로써 짝지을 수 있다.

2) 활동 2: (분수) ÷ (자연수)

(1) 학습 목표: (분수) ÷ (자연수)의 문제 상황을 듣고 비형식적 방법으로 다양하게 해결하며, 자신이 해결한 것을 식으로 나타낼 수 있다.

(2) 문제 상황: ① 환경 게시판에 학습란이 있는데, 그 학습란의 $\frac{4}{5}$를 똑같이 2부분으로 나누어 각 과목에 대한 학습 문제를 제시하려고 한다. 한 과목은 전체 학습란의 몇 분의 몇을 차지하는가?

② 위의 문제에서 학습란의 $\frac{6}{9}$을 똑같이 3부분($\frac{2}{3}$를 똑같이 4부분, $\frac{2}{3}$를 똑같이 5부분)으로 나눈다면, 한 과목은 전체 학습란의 몇 분의 몇인가?

(3) 활동 절차: 이하의 활동 절차는 [활동 1]과 유사하므로 중요한 내용만을 언급하고자 한다.

자연수의 연산에서 나누어 떨어지는 상황의 문제를 먼저 다룬 후에 나누어 떨어지지 않는 문제 상황을 다루었듯이, (분수)÷(자연수) 문제 상황에서도 우선 피제수의 분자가 제수로 나누어 떨어지는 경우와 분할하기 쉬운 문제를 먼저 제시함으로써 학생의 인지적 부담을 덜어줄 수 있다. 예를 들어, $\frac{6}{9}$을 똑같이 3부분으로($\frac{nb}{a} \div b$의 형태), $\frac{2}{3}$를 똑같이 4부분으로($\frac{b}{a} \div nb$의 형태), $\frac{2}{3}$을 똑같이 5부분으로($\frac{b}{a} \div c$의 형태) 나누는

것과 같이 문제의 수치를 변경시키면서 점차적으로 학생이 (분수)÷(자연수) 문제를 일반화하여 해결할 수 있도록 한다. 이렇게 수치를 바꾸는 이유는 단위가 무엇인가를 인식할 수 있도록 만들기 위한 것이다. 예를 들어 $\frac{2}{3}\div5$를 해결할 때를 생각해보자. 우선 직사각형 전체를 단위로 인식하고, 그 다음에는 직사각형의 $\frac{2}{3}$를 다시 단위로 인식할 수 있어야 한다. 그리고 나서 그것을 5등분한 결과를 다시 전체 사각형을 단위로 보고 해석할 수 있어야 한다. 이렇게 수치를 변환시키는데 있어서 유의할 점은 학생이 비형식적으로 사용할 전략을 생각하면서 비교적 쉬운 문제 상황부터 제시하는 것이다.

학생이 그림을 통하여 구하고자 하는 결과를 구했으면 그것을 식으로 표현해 보도록 한다. 학생들은 일반적으로 나눗셈으로 표현할 것이다. 나눗셈으로 식을 표현했을 때 자연수의 연산에서와 같이 숫자를 이용하여 자신에게 의미 있는 연산을 수행할 수 없다는 점에 직면할 것이다. 그러한 경우 학생들은 피제수의 분수를 동치분수로 만들어 그 분수의 분자가 제수로 나누어지는 것을 찾을 수도 있다. 예를 들어, '$\frac{2}{3}\div5$'에서 2를 5로 나눌 수 없으므로 $\frac{2}{3}$와 동치인 분수들 중에서 5로 나누어질 수 있는 $\frac{10}{15}$을 찾아서 $\frac{10}{15}\div5=\frac{2}{15}$라고 구할 수도 있다.

학생이 (분수)÷(자연수)의 나눗셈 식을 역수를 곱하는 곱셈식으로 나타내지 못할 때, 분수의 곱셈을 어떻게 해결했는지 거꾸로 물어볼 수 있다. 즉, $\frac{3}{4}$의 $\frac{1}{5}$ ($\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}$)이 어떤 의미인지 물어보도록 한다. 학생은 분수의 곱셈을 학습할 때 $\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}$을 '$\frac{3}{4}$을 똑같이 5등분한 것 중의 하나'라고 비형식적으로 대답했고(백선수, 2004), 그것을 해결하기 위해서 $\frac{3}{4}\div5$와 같이 표현하기도 했다. 만약에 그러한 경험들을 상기시켜 준다면 분수의 나눗셈과 곱셈을 보다 쉽게 연결할 수 있을 것이다. 특히 이러한 활동을 통해 제수가 피제수보다 더 큰 상황에서도 나눗셈을 할 수 있다는 것을 깨닫도록 한다.

<u>3) 활동 3: (자연수) ÷ (단위분수)</u>

(1) 학습 목표: (자연수) ÷ (단위분수)의 문제 상황을 듣고 비형식적 방법으로 다양하게 해결하며, 자신이 해결한 것을 식으로 나타낼 수 있다.

(2) 문제 상황: ① 길이가 1m인 색 테이프를 $\frac{1}{5}$m씩 자르면 몇 도막이 되는가?

② 길이가 3m인 색 테이프를 $\frac{1}{5}$m씩 자르면 몇 도막이 되는가?

(3) 활동 절차

학생들은 1m의 색 테이프를 똑같이 5등분하거나 그림으로 나타내어 1m에는 $\frac{1}{5}$m가 5도막 있다는 것을 발견할 것이다. 그리고 3m인 색 테이프를 $\frac{1}{5}$m씩 자르는 문제에 대해서도 실제로 색 테이프를 잘라보거나 그림으로 나타내어 15도막 된다는 것을 발견할 것이다. 또한 3m인 색 테이프를 $\frac{1}{5}$m씩 자르는 문제에 대해서는 1m에 $\frac{1}{5}$m가 5도막이라는 사실을 이용하여 $3\times5=15$와 같이 구할 수 있다.

1m인 색 테이프를 $\frac{1}{5}$m씩 자르는 문제에 대해서 그 해결방법이 시각적으로 너무나 자명하기 때문에 학생들은 $1\div\frac{1}{5}=5$와 같이 나눗셈 식으로만 표현할 수 있다. 그러한 학생에게 $1\div\frac{1}{5}=1\times5=5$와 같이 역수를 곱한다는 원리를 강요할 필요는 없다. 이러한 경우에는 3m인 색테이프를 $\frac{1}{5}$씩 자르는 문제를 다루면서 역수를 곱한다는, 즉, 1m에 $\frac{1}{5}$m가 5도막이라는 사실을 이용하여 $3\div\frac{1}{5}=3\times5=15$와 같이 구한 후, 앞의 문제를 $1\div\frac{1}{5}=1\times5=5$라는 사실을 유도할 수 있다. 그런데 전체 활동을 통해 마무리 할 때 자연수의 나눗셈과 다른 점을 찾아보도록 하여 몫이 피제수보다 더 커진다는 사실에 대하여 주목하도록 할 필요가 있다.

4) 활동 4: (자연수) ÷ (진분수)

(1) 학습 목표: (자연수) ÷ (진분수)의 문제 상황을 듣고 비형식적 방법으로 다양하게 해결하며, 자신이 해결한 것을 식으로 나타낼 수 있다.

(2) 문제 상황: ① 길이가 1m인 색 테이프를 $\frac{2}{6}$m 씩 자르면 몇 도막이 되는가?

② 길이가 1m인 색 테이프를 $\frac{3}{4}$m씩 자르면 몇 도막이 되는가?

- 1m를 $\frac{3}{4}$m씩 자르면 $\boxed{}$도막이고, 나머지는 $\frac{3}{4}$m에 대하여 $\boxed{}$이다.
- 도막의 수를 대분수로 나타내고, 가분수로도 나타내어 보아라.

③ 길이가 4m인 색 테이프를 $\frac{3}{4}$m씩 자르면 몇 도막이 되는가?

(3) 활동 절차

1m의 색 테이프를 $\frac{2}{6}$m씩 자르는 문제에 대해서는 학생들이 쉽게 해결할 수 있으리라 판단된다. 문제는 1m의 색 테이프를 $\frac{2}{6}$m씩 잘랐을 때의 도막의 수, 3을 $\frac{2}{6}$의 역수로서 인식할 수 있느냐의 문제이다. 이것은 그 다음에 다루는 $\frac{3}{4}$m로 잘랐을 때의 도막의 수를 역수로서 인식하는 것보다 더 어렵다. 왜냐하면 $\frac{2}{6}$의 역수를 $\frac{6}{2}$=3과 같이 인식하거나, $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$로 인식한 후 그것의 역수를 $\frac{3}{1}$=3과 같이 인식해야 하기 때문이다. 따라서 이 문제의 경우에는 1m를 $\frac{3}{4}$m로 나누는 활동을 한 후, 그러한 활동에서 찾은 규칙을 적용·확장하도록 한다.

'길이가 1m인 색 테이프를 $\frac{3}{4}$m씩 자르면 몇 도막이 되는가?'라고 문제를 제시하면 학생들은 잘려진 조각 수를 세어서 2도막이라고 대답할 수 있다. 이러한 경우 1m를 $\frac{3}{4}$m씩 자르면 몇 도막이고, 나머지는 $\frac{3}{4}$m에 대하여 얼마인지 알아보고 그것을 대분수와 가분수로 각각 나타내어 보도록 한다. 경우에 따라서 어떤 학생들은 1도막과 $\frac{1}{4}$도막이 남았다고 답할 수 있다. 이러한 학생은 기준량 혹은 단위에 대한 개념이 형성되어 있지 않다고 볼 수 있는데, 그러한 경우에는 문제를 다시 읽어보도록 하여 나머지가 $\frac{3}{4}$m에 대하여 얼마인지를 알도록 조언할 수 있다. 경우에 따라서는 그러한 도움을 받고도 여전히 $\frac{1}{4}$m가 남았다고 말하는 학생이 있을 수 있다. 그러한 경우에는 두 도막이 되기 위해서는 얼마가 더 필요할 것인가를 물어봄으로써 단위에 대한 개념을 명확히 할 수 있다.

'길이가 1m인 색 테이프를 $\frac{3}{4}$m씩 자르면 몇 도막이 되는가?'라는 문제를 해결하면서 1m인 색 테이프를 $\frac{3}{4}$m씩 자르면 $\frac{4}{3}$도막이 된다는 것을 조작활동을 통하여 발견한 후, '도막의 수는 분모와 분자의 자리를 바꾼 것과 같다'는 규칙을 발명하도록 한다. 많은 학생들 혹은 교사들에게 분수의 역수가 무엇인지를 물어보았을 때 그 대답은 분모와 분자를 바꾼 것이라고 말한다. 하지만 역수의 진정한 의미는 임의의 두 유리수 a, b에 대하여 a×b=1(항등원)일 경우, b를 a의 역수 혹은 a를 b의 역수라 한다. 따라서 a의 역수인 b를 구하기 위해서는 b=1÷a인 것이다. 즉, 역수란 의미는 1에 a가 몇 번 들어가는지를 살펴보면 구할 수 있다.

'길이가 4m인 색 테이프를 $\frac{3}{4}$m씩 자르면 몇 도막이 되는가?'라는 문제를 해결하기 위해 학생들은 그림을 그려서 $\frac{3}{4}$m씩 잘라보는 활동을 통해 정답을 구할 수 있다. 하지만 그렇게 하면 많이 불편하다는 것을 지각하고, 1m를 $\frac{3}{4}$m씩 자르면 $\frac{4}{3}$도막이 된다는 것을 이용하여 $4\times\frac{4}{3}$도막이 된다는 것을 발견할 것이다.

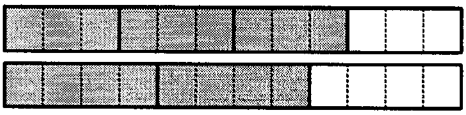
5) 활동 5: (진분수) ÷ (진분수)

(1) 학습 목표: (진분수) ÷ (진분수)의 문제 상황을 듣고 비형식적 방법으로 다양하게 해결하며, 자신이 해결한 것을 식으로 나타낼 수 있다.

(2) 문제 상황: 길이가 $\frac{3}{4}$m인 색 테이프를 $\frac{2}{3}$m씩 자르면 몇 도막이 되는가?

(3) 활동 절차

이 문제를 바로 다루기에 앞서 1m 혹은 5m의 색 테이프를 $\frac{2}{3}$m씩 자르는 문제를 다룸으로써 지난 시간에 학습했던 것을 복습하도록 한다. 길이가 $\frac{3}{4}$m인 색 테이프를 $\frac{2}{3}$m씩 잘랐을 때 몇 도막이 되는지를 알아보기 위해서는 $\frac{3}{4}$m인 색 테이프와 $\frac{2}{3}$m인 색 테이프를 각각 그려서 서로 비교해 보아야 한다. 하지만, $\frac{3}{4}$과 $\frac{2}{3}$를 각각 그림으로 나타내었을 때, $\frac{3}{4}$에 $\frac{2}{3}$가 몇 번 들어갈 수 있는지 확인할 수 없다. 따라서 $\frac{3}{4}$에 $\frac{2}{3}$가 몇 번 들어갈 수 있는지를 알아보기 위해서는 아래 그림에서와 같이 각각의 조각의 크기가 서로 같도록 만들어야 한다.



조각의 크기가 같은 상태에서 $\frac{3}{4}$과 $\frac{2}{3}$를 비교하면 $\frac{3}{4}$에는 $\frac{2}{3}$가 한 번 들어가고, 한 조각($\frac{1}{12}$)이 남게 된다. 따라서 어떤 학생은 정답을 $1\frac{1}{12}$로 대답하기 쉽다. 하지만, 여기서 기준량(혹은 단위)은 제수 즉, $\frac{8}{12}$($\frac{1}{12}$짜리 8조각)이므로 정답은 $1\frac{1}{8}$ 혹은 $\frac{9}{8}$가 된다. 이렇게 문제를 해결했을 경우에는 분수의 나눗셈에서 역수를 곱한다는 형식적 지식과 연결할 수 없다. 대안적인 방법으로 학생이 1m인 색 테이프를 $\frac{2}{3}$m씩 자르면 $\frac{3}{2}$도막 된다는 것을 이용한다면, 5m인 색테이프는 1m의 5배이므로 $5\times\frac{3}{2}$도막이 되고, $\frac{3}{4}$m인 색테이프는 1m의 $\frac{3}{4}$배이므로 $\frac{3}{4}\times\frac{3}{2}$이 된다는 것을 발견할 수 있을 것이다. 이러한 발견을 이끌기 위해서는 적절한 시기에 '5m가 1m의 몇 배인가?', 그리고 '$\frac{3}{4}$m는 1m의 몇 배인가?'라고 질문하고 분수 곱셈의 연산자의 의미를 회상하게 함으로써 재발명을 유도할 수 있다.