

## 국소적 격자 삽입법을 이용한 반원주 내의 스피드 유동 특성에 대한 연구

서용권<sup>†</sup> · 여창호\*

### Study on the Spin-up of Fluid in a Semi-Circular Container Using a Zonal-Embedded-Grid Method

Yong Kweon Suh and Chang Ho Yeo

**Abstract.** In this paper the numerical method with a zonal embedded grid system for an incompressible flow within a semi-circular container is presented. The algorithm is validated by its application to some typical flow models including the spin-up flow inside a semi-circular geometry. Flow visualization for the spin-up flows was used by PIV. The results show that at high Reynolds numbers the cyclonic cell at the left-hand side region moves along the circular wall and merges with the cell at the right-hand side region.

**Key Words :** Zonal embedded grid(국소적 삽입 격자), Spin-up(스핀 업), Ekman pumping(에크 만 분출), Semi-circular container(반원형 용기)

### 1. 서 론

외부 경계가 원형인 영역 내의 유체유동의 문제는 산업 및 자연환경에서 흔히 접할 수 있는 문제이다. 예로서, 원관 내의 층류 및 난류문제, 원통 용기 내의 교반 및 혼합문제 등을 들 수 있다. 이 경우, 원주방향으로 유동이 주기적임을 감안하면 이 유체유동의 문제는 스펙트럴 방법(수도-스펙트럴 방법을 포함)을 사용함이 자연스럽게 보일지 모른다. 그러나, 스펙트럴 방법은 높은 레이놀즈 수의 흐름에서 흔히 관측되는 속도 및 기타 흐름 물성치들 자체 혹은 그 미분이 공간적으로 불연속적인 양상을 보이는 경우에는 Gibbs의 현상 때문에 오히려 부적절하다. 또한 단순한 원통좌표계의 격자계에 의한 유한체적법 또는 유한차분법은 중심에서의 격자망이 너무 조밀하여 외재법을 사용하였을 때는 시간간격이 매우 작아지는 폐단이 있다.<sup>(1-2)</sup> 내재법을 사용하면 시간간격의 제약에서 벗어날 수 있으나<sup>(3)</sup> LES 등과 같은 난류 모델링의 적용이나 기타 다른 수송 방정식을 풀고자 할 때

는 내재법의 적용 자체가 상당한 어려움을 야기할 수 있고 또한 그 안정성도 보장되어 있지 않다. 삼각형 구조에 의한 비정렬 격자 시스템은 원형 경계를 유연하게 처리하며 중심에서의 격자망도 조밀해지는 것을 피할 수 있으나 차분화 이후의 산술 방정식이 대각화되어 있지 않으므로 추가적인 대각화 작업이 필요하며 또한 완전한 대각화는 매우 어려운 설정이다.

외부 경계가 원형인 영역 내의 유체유동의 문제를 원통 좌표계를 사용하여 외재법에 의한 유한체적법(또는 유한차분법)으로 해석하되 격자망의 크기가 지역적으로 크게 다르지 않도록 하는 국소적 삽입 격자(zonal embedded grid)를 사용함으로써 위의 단점을 해소하고자 한다. 국소적 격자 삽입법에 의한 수치해석 기법은 이미 발표된 바 있으나<sup>(4)</sup> 이는 직각 좌표계에 대한 것이고 원통좌표계의 경우에 대한 연구보고는 찾아볼 수 없다.

본 연구에서는 개발된 기법을 사용하여 반 원주 내의 스피드 유동을 해석하고 실험결과와 비교함으로써 수치해석 기법의 타당성을 확보하고자 한다. 반원주 내의 스피드에 대한 연구는 van Heijst 그룹<sup>(5-6)</sup>이 수행한 바 있으나 수치해석과 실험결과의 차이가 크고 또 다양한 파라미터 해석이 수행되지 않았다. 이와 같이, 이러한 반원주 내 스피드 유동에 대한 물리적 특

\*동아대학교 기계공학부

E-mail : yksuh@daunet.donga.ac.kr

\*동아대학교 대학원 기계공학부

성을 파악하는 것도 본 연구의 중요한 목적 중의 하나이다.

실험방법으로는 반원 용기를 제작하여 유체표면에 입자를 띠워 그 거동을 추적하였다.<sup>(7)</sup>

## 2. 수치해석

### 2.1 유동모델과 지배방정식

Fig. 1은 본 연구에서 사용한 유동모델이다. 여기서  $\Omega$ 는 원통의 회전 각속도이며,  $R$ 은 원통의 반경,  $H$ 는 수심이다. Fig. 2는 시간에 따른 용기의 각속도 변화를 나타낸 것이다.

본 연구에서는 2차원 비압축성 유동의 지배방정식을 용기의 중앙지점을 축으로 각속도  $\Omega$ 로 회전하는 원통좌표계로 나타낸다. 용기는 처음에  $\Omega - \Delta\Omega$ 의 각속도로 회전하다가 어느 시점에서 속도가 증가하여 최종 속도  $\Omega$ 에 도달하게 된다(Fig. 2). 여기에서  $\Delta\Omega$ 는 스픈업을 위한 각속도 증분을 나타낸다.

시간을  $1/\Delta\Omega$ , 공간좌표를  $R$ , 속도를  $R\Delta\Omega$ , 압력을  $\rho(R\Delta\Omega)^2$ 로 각각 무차원화한 지배방정식은 다음과 같다.

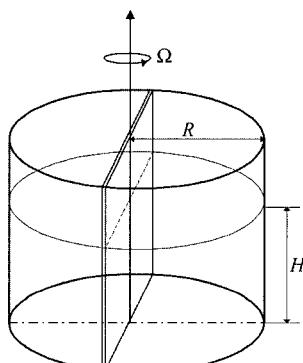


Fig. 1. Circular container.

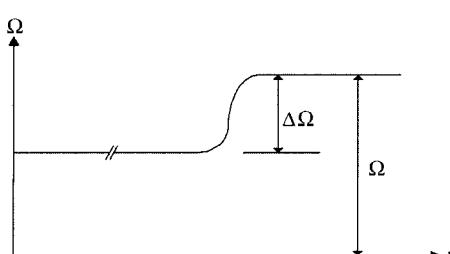


Fig. 2. Angular speed of the circular container.

$$\frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} = rw_E \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial ru^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial wv}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} - uw_E - 2 \left( \frac{1}{\epsilon} + f(t) \right) v \\ = \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial ruw}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v^2}{\partial \theta} - \frac{uv}{r} - uw_E - 2 \left( \frac{1}{\epsilon} + f(t) \right) u \\ = - \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] - r \frac{df}{dt} \end{aligned} \quad (2b)$$

여기서,  $t$ 는 무차원 시간,  $r$ ,  $\theta$ 는 용기와 같이 회전하는 무차원 좌표,  $(u, v)$ 는  $(r, \theta)$ 방향의 속도성분을 나타내며  $f$ 는 용기의 각속도를 최종 각속도에 대해 무차원화 한 것이며 다음과 같이 정의된다.

$$f = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1 + \cos \omega t) & \text{for } 0 \leq t \leq t_s \\ 0 & \text{for } t > t_s \end{cases} \quad (3)$$

각속도의 변동은  $\cos \omega t$ 에 의하여 완만한 기울기를 가지며 변화한다. 이는 용기의 회전 각속도가 급격하게 변화함으로써 자유표면에 파동이 생기는 것을 막기 위함이다. 본 논문에서 사용한  $\omega$ 와  $t_s$ 는 각각  $\omega=6.54$ ,  $t_s=\pi/\omega$ 이다.

그리고,  $w_E$ 는 용기 바닥에서의 점성작용에 따른 Ekman 분출효과를 나타내는 양으로서 와도(vorticity)

$$\zeta = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial rv}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (4)$$

에 의해 아래와 같이 구해진다.<sup>(8)</sup>

$$w_E = \left( \frac{1}{2h} \sqrt{\frac{\epsilon}{Re}} \right) \zeta \quad (5)$$

여기서,  $h=H/R$ 이다.

로스비 수(Rossby number)  $\epsilon$ 와 레이놀즈 수(Reynolds number)  $Re$ 는 다음과 같다.

$$Re = \frac{R\Delta\Omega^2}{v}, \quad \epsilon = \frac{\Delta\Omega}{\Omega} \quad (6)$$

경계조건은  $r=1$ 의 벽면에서 비침투 조건(impermeable condition)과 점착 조건(no-slip condition)을 적용하고, 반경방향의 칸막이(barrier)에서도 비침투, 점착 조건을 적용한다. 초기조건으로서는 모든 지역에서 유체속도를 0으로 설정하였다.

## 2.2 수치해석 방법

지배방정식의 차분화는 유한체적법에 근거하였으며, 원통좌표계에서 제작된 국소적 격자 삽입법을 사용하였다. 운동량 방정식의 시간적분은 4계 Runge-Kutta법으로 처리하였으며, 압력방정식은 ICCG (Incomplete Cholesky Conjugate Gradient)법으로 수치해석 하였다.<sup>(9)</sup>

## 3. 수치해석 및 실험 결과

### 3.1 Reynolds number 변화에 따른 결과

본 연구에서는 개발한 코드의 검증을 위하여 반원주 용기 내 스픈업 유동에 대한 수치해석을 수행하였다. 이러한 유동에 대해서는 van Heijst 그룹<sup>(5-6)</sup>이 실험과 수치해석으로 수행한 바 있으나, 두 결과는 상당히 다르게 나타났으며, 수치해석 결과가 과연 실험 결과를 어느 정도 잘 예측할 수 있을 것인지에 대한 의문이 여전히 남아 있는 실정이다. Fig. 3은  $Re=5000$ 일 때 반원형 용기의 스픈업 유동에 대한 수치해석 결과를 실험결과와 비교한 것이다. 수치해석 결과는 유선(streamlines)이며, 실험은 액체(물)의 표면에 평균 직경 0.23mm의 아크릴 파우더를 분산시켜 촬영한 궤적선(pathlines)이다. 그리고 배경회전은 반시계방향이다. 실험결과는 수치해석 결과와 잘 일치하고 있다. 초기 유동은 모든 영역에서 와도가  $\zeta=-2$ 로 균일한 흐름이며 벽면에 인접한 극히 얇은 경계층을 제외하면 대부분 비접성적이다. 초기에 대부분의 영역을 차지하는 시계방향의 이 와류는 배경회전과 반대방향이므로 앤티사이클로닉 와류(anticyclonic vortex)이다. 앞으로는 주 와류(main vortex)라고 부르기로 한다. 그리고 시간이 흐르면 하부 평면은 좌측 모서리 근처에서 상부 곡면은 우측 모서리 근처에서부터 유동의 박리가 시작되고 박리된 전단층은 말리면서(roll-up) 반시계 방향의 사이클로닉 와류(cyclonic vortex)를 형성한다. 이 와류를 앞으로는 2차 와류라고 부른다. 이 때 우측의 2차 와류는 상하로 길쭉한 모양으로, 그리고 좌측의 2차 와류는 등근

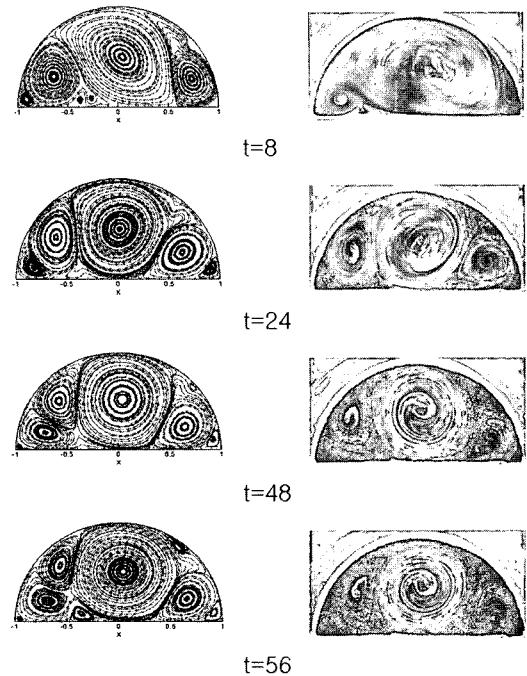
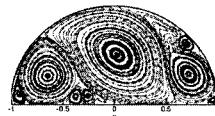


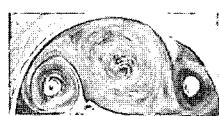
Fig. 3. Comparison between the numerical (left; streamlines) and experimental (right; pathlines) results at  $Re=5000$ ,  $\varepsilon=1.0$ ,  $h=1.0$ ,  $\omega=6.54$ .

모양으로 성장한다. 한편 2차 와류의 성장과 주 와류의 축소 과정에서 주 와류와 2차 와류 사이에는 두 쌍의 와류가 또다시 생성되는데, 좌측 영역에서는 하부 벽면에서, 우측 영역에서는 상부 벽면에서 생겨난다 (3차 와류라 부름). 그리고 동시에 좌측 모서리에서는 시계방향, 우측 모서리에서는 반시계 방향의 4차 와류가 각각 만들어진다. 이러한 와류들의 공통된 동적 특성은 발생→성장→쇠퇴→소멸의 과정을 거친다는 점이다. 주 와류는 배경회전이 완료되는 시점에서 최대 에너지를 가지고, 그 이후 줄곧 쇠퇴의 과정을 밟는다. 2차 와류는  $t=24$ 를 약간 넘는 시점까지는 성장하며 그 이후는 쇠퇴한다. 그리고 3, 4차 와류도 시점은 다르지만 이러한 유사한 과정을 거친다. 특이한 점은 좌측의 2차 와류는 쇠퇴의 과정동안 상부 곡면 쪽으로 서서히 이동하며 우측의 2차 와류는 하부 평면 쪽으로 서서히 이동한다는 것이다. 이는 다분히 시계방향으로 회전하는 주 와류의 영향 때문이라 생각되며, 동시에 주 와류가 여전히 지배적임을 암시한다.

Fig. 4는  $Re=10000$ 일 때의 결과이다. 실험 결과와 수치해석 결과를 비교해 보면 잘 일치함을 볼 수 있다. 초기에는 시간은 빠르지만  $Re=5000$ 일 때와 비슷



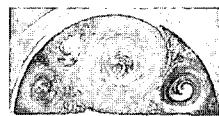
t=8



t=24



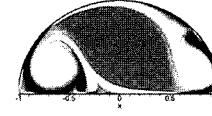
t=48



t=56

a)  $Re=5000$ 

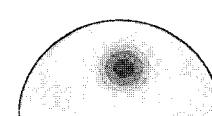
t=8



t=24



t=48



t=56

b)  $Re=10000$ 

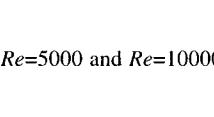
t=8



t=24



t=48



**Fig. 4.** Comparison between the numerical (left; streamlines) and experimental (right; pathlines) results at  $Re=1000$ ,  $\varepsilon=1.0$ ,  $h=1.0$ ,  $\omega=6.54$ .

한 유동의 과정으로 보텍스가 생성되기 시작한다. 그러나 여기에서는 좌측에서 만들어진 2차 와류가  $t=48$ 에서 서서히 상단의 벽면 쪽으로 움직이는 것을 볼 수 있다. 그러다가  $t=48$ 에서 주와류를 타고 넘어서 우측의 2차 와류와 같이 합쳐지는 것을 관찰할 수 있다. 좌측에서 넘어 온 2차 와류는 우측의 2차 와류와 합쳐지면서 소멸되고 시간이 지나면 우측의 2차 와류 역시 쇠퇴의 과정으로 유동이 진행된다.

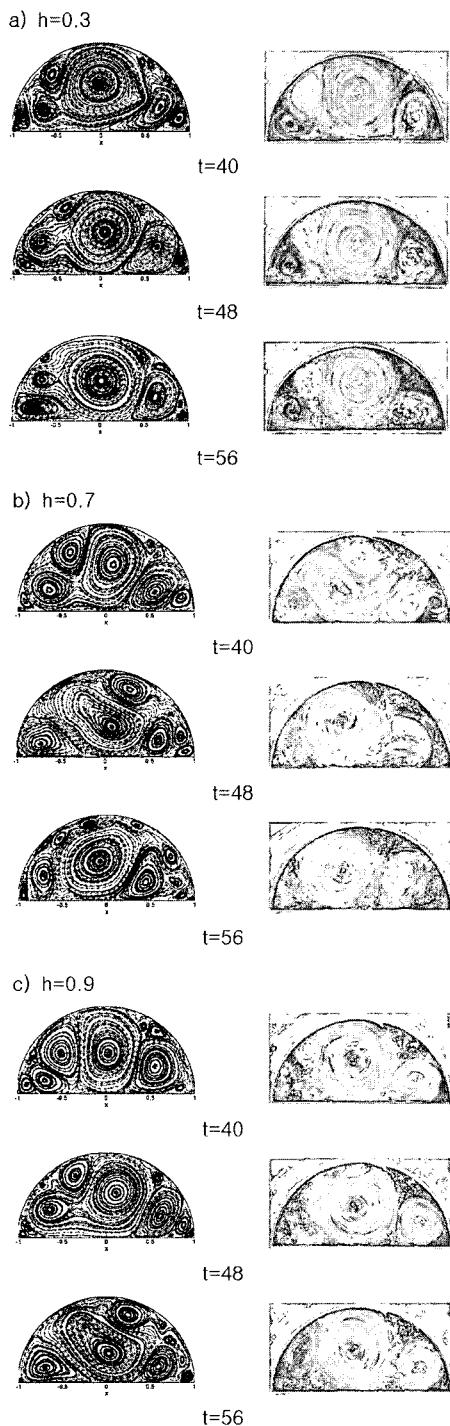
Fig. 5는 유동의 진행 형태를 좀 더 쉽게 표현하기 위해 수치해석 결과를 와도로 나타낸 것이다.  $Re=5000$ 일 때 초기의 유동을 보면 중앙에 주 와류가 형성되고 양쪽에 2차 와류가 발생하여 전체 유동을 지배함을 볼 수 있다. 3차 와류가 발생하기는 하나 그 유동이 미약하여 시간이 지나도 3차 와류는 성장하지 못하고 쇠퇴해 버린다.(Fig. 5a). 그에 반해,  $Re=10000$ 의 경우에는 초기에 주 와류와 2차 와류의 형성 과정은  $Re=5000$ 일 때와 같지만 시간이 지나면 좌측의 2차 와류 하단에서 3차 와류가 성장하기 시작하여 그 유동은 점점 더 커지게 되며 일 때 좌측의 2차 와류는 우측의 2차 와류 쪽으로 넘어가 서로 합쳐지게

되고 좌측에서는 3차 와류가 유동을 지배함을 볼 수가 있다(Fig. 5b).

### 3.3 높이 변화에 따른 결과

Fig. 6은  $Re=20000$ 일 때 높이의 변화에 따른 수치해석과 실험의 결과들이다. 먼저 일 때 좌측에서 만들어진 2차 와류는 벽면을 타고 상단으로 넘어가는 도중 얇은 수심에 따른 Ekman분출효과가 커지는 영향으로 인해 우측으로 넘어가지 못하고 보텍스는 쇠퇴의 과정에 들어간다(Fig. 6a).  $h=0.7$ 에서부터는 좌측에서 만들어진 2차 와류가 우측으로 넘어가 반대편의 2차 와류와 합쳐지는 것을 볼 수가 있다(Fig. 6b).  $h=0.9$ 의 경우에도  $h=0.7$ 과 진행과정은 비슷하다(Fig. 6c).

하지만 여기에서 특이한 점은 높이가 높아질수록 보텍스가 넘어가는 시간이 더욱 더 빨라지리라 생각이 되나  $h=0.7$ 의 경우보다 더 느리게 유동이 진행됨을 볼 수가 있었다. 높이에 따른 반원주 내의 유동에 대하여 실험한 결과는 수치해석 한 결과와 비교해 시간적으로 약간의 차이를 보이지만 유동의 형태는 두



**Fig. 6.** Comparison between the numerical (left; streamlines) and experimental (right; pathlines) results for various  $h$  values;  $Re=20000$ ,  $\epsilon=1.0$ ,  $\omega=6.54$ .

결과가 잘 일치하고 있다. 두 결과에서 차이가 나는 것은 Ekman 펌핑 효과 때문으로 생각되며 앞으로 보다 정확한 모델의 개발이 절실히 요청된다.

#### 4. 결 론

1) 레이놀즈 수 5,000과 10,000, 로스비 수 1.0에서 반원주 내 스피드 유동에 대하여 수치해석과 실험을 통해 해를 구하고 두 결과를 상호 비교해 본 결과 정량 및 정성적으로 잘 일치하였다.

2) 레이놀즈 수 20000일 때 높이를 변화시키면서 실험과 수치해석을 병행한 결과, 높이에 따른 유동특성은 상당히 달라지며 예측 불허의 와류 거동을 보였다.

#### 후 기

이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원 (KRF-2002-041-D00080)에 의하여 연구되었음.

#### 참고문헌

- 1) Verzicco, R. and Orlandi, P., 1996, "A Finite-Difference Scheme for Three-Dimensional Incompressible Flows in Cylindrical Coordinates", *J. Comput. Phys.*, Vol.123, pp.402-414.
- 2) Fukagata, K. and Kasagi, N., 2002, "Highly Energy-Conservative Finite Difference Method for the Cylindrical Coordinate System", *J. Comput. Phys.*, Vol.181, pp.478-498.
- 3) Akselvoll, K. and Moin, P., 1996, "An Efficient Method for Temporal Integration of the Navier-Stokes Equations in Confined Axisymmetric Geometries", *J. Comput. Phys.*, Vol.125, pp.454-463.
- 4) Kravchenko, A.G., Moin, P., and Moser, R., 1996, "Zonal Embedded Grids for Numerical Simulations of Wall-Bounded Turbulent Flows", *J. Comput. Phys.*, Vol. 127, pp.412-423.
- 5) Van Heijst, G. J. F., 1989, "Spin-up Phenomena in Non-Axisymmetric Containers", *J. Fluid. Mech.*, Vol.206, pp. 171~191.
- 6) Andersson, H. I., Billdal, J. T. and Van Heijst, G. J. F., 1992, "Spin-up in a Semicircular Cylinder", *Int. J. Num. Methods Fluids*, Vol. 15, pp.503-524.
- 7) Suh, Y. K., 2003, "Multi-Frame MQD-PIV", KSME

- Int. J., Vol. 17, pp.1463-1473.
- 8) Suh, Y. K. and Choi, Y. H., 2002, "Study on the Spin-up of Fluids in a Rectangular Container Using Ekman-pumping Models", J. Fluid. Mech., Vol.458, pp.103-132.
- 9) Suh, Y. K., 2003, "Development of Zonal-Embedded-Grid Method and its Application", Proc. 2nd KSV Conf., POSTEC, Pohang, Korea, pp.55-58.