IE Interfaces
Vol. 16, Special Edition, pp. 39-44, December 2003.

조립품을 위한 비선형 공차할당

김광수 · 최후곤†

성균관대학교 시스템경영공학부

Nonlinear Tolerance Allocation for Assembly Components

Kwang-Soo Kim · Hoo-Gon Choi

School of Systems Management Engineering, SungKyunKwan University, Suwon, 440-746

As one of many design variables, the role of dimension tolerances is to restrict the amount of size variation in a manufactured feature while ensuring functionality. In this study, a nonlinear integer model has been modeled to allocate the optimal tolerance to each individual feature at a minimum manufacturing cost. While a normal distribution determines statistically worst tolerances with its symmetrical property in many previous tolerance allocation studies, a asymmetrical distribution is more realistic because its mean is not always coincident with a process center. A nonlinear integer model is modeled to allocate the optimal tolerance to a feature based on a beta distribution at a minimum total cost. The total cost as a function of tolerances is defined by machining cost and quality loss. After the convexity of manufacturing cost is checked by the Hessian matrix, the model is solved by the Complex Method. Finally, a numerical example is presented demonstrating successful model implementation for a nonlinear design case.

Keywords: optimal tolerance allocation, asymmetrical distribution, quality loss, nonlinear integer model, minimum total cost.

1. 서 론

공차(tolerance)란 부품의 기능성(functionality)과 조립성(assemblability)을 만족시키면서 허용될 수 있는 치수(dimension)의 오차 범위이다. 전통적으로 설계와 제조에 대한 공차를 할당할 때 핸드북이나 설계자의 경험과 기준에 기초하여 결정하였는데 이렇게 경험에 기초하여 부여되는 것은 부품의 기능성 또는 조립성을 보장할 수 없으며, 최적 조건의 공차를 할당하기가 힘들어 불필요한 비용이 발생할 수 있다. 특히 제품설계자와 공정설계자는 공차에 많은 관심을 갖게 되는데, 제품설계자는 제품의 기능을 고려하여 엄격한 공차를 선호하고, 공정설계자는 적은 비용으로 보다 쉽게 제품을 만들기 위해 느슨한 공차를 선호하게 된다. 이에 따라, 기능과 비용을 고려한 최적공차를 결정하기 위해 공차분석과 공차할당에 관한 연구가 진행되어 왔다. 공차분석이란 구성품 치수에 대한 공칭치수(nominal dimension)와 공차가 주어졌을 때, 개별 구성품 치수의 함수 관계로 표현되는 기능적 치수(functional dimension)에 대한 공차(assembly tolerance)를 계산하는 것이고, 공차할당이란 개별 구성품 치수에 대한 공칭치수(nominal dimension)가 주어지고 설계함수에 대해 기능적 치수와 공차가 주어졌을 때 개별 구성품 치수에 대한 공차를 결정하여 주는 것이다.

Lee & Woo(1989)와 Zang & Wang(1993)은 비용을 최소화하기 위하여 worst-case 공차 분석방법을 이용한 비선형 공차할당 모델을 제시하였고, Vasseur *et al.*(1997)과 Feng and Kusiak(1997)은 공차의 변화에 대해 2차 비용함수를 갖는 다구치(Taguchi) 품질 손실 함수를 이용한 공차할당 모델을 개발하였다. Choi *et al.*(2000)은 설계함수가 비선형인 경우를 고려하여, 대체공정 선정 및 총비용에 손실비용을 고려한 이산적인 비선형계획법 모델을 제시하였다. 그러나 대부분의 연구들이 구성품 치수가 정규분포를 따른다는 가

† 연락저자 : 최후곤, 440-746 경기도 수원시 장안구 천천동 300 성균관대학교 시스템경영공학부, Fax : 031-290-7610
E-mail : hgchoi@yurim.skku.ac.kr

정을 하였다. Lin *et. al.*(1997)은 다양한 공차 문제를 비대칭형 형태인 베타분포를 이용하여 공차분석을 실시하였고, Kim *et al.*(2002)은 베타분포를 이용하여 공차할당할 수 있는 모델을 제안하였다. 정규분포의 가정에는 개별 구성품의 공칭치수와 공정중심이 일치한다는 가정이 필요한데, 실제 개별 구성품들은 재질의 변형이나 기계특성의 오차, 작업자 숙련도 등에 의하여 공칭치수와 공정중심이 일치하기 어려우며, 정규분포를 따르지 않고 비대칭 모습의 분포 형태를 가질 수 있게 된다. 이러한 경우에 베타분포와 같은 비대칭형 분포가 더 현실적이고 정확하게 치수의 분포를 표현할 수가 있다(Bjorke, 1989). 또한, 치수는 공차한계 내에 존재하더라도 품질손실이 발생하므로 손실비용을 고려하는 것이 바람직하다. 본 연구는 개별 구성품 치수의 분포가 비대칭인 경우를 고려할 수 있는 베타분포를 이용하고, 각 구성품에 대해 대체가공 공정을 가지는 경우에, 가공비용과 Taguchi가 정의한 품질손실비용의 합을 최소로 하는 가장 경제적인 가공공정의 선정 및 개별 구성품 치수에 대해서 최적공차를 할당하는 것이다.

2. 통계적 공차분석

2.1 공차와 제조비용

제조비용(manufacturing cost)은 고정비용과 변동비용으로 정의된다. 특히, 변동비용은 공차가 엄격해질수록 높은 가공비용을 발생시킬 수 있다. 본 연구에서는 가장 많이 이용되고 단순한 식 (1)과 같은 reciprocal 모델 함수를 이용한다.

$$C(t) = a/t + f \tag{1}$$

여기서, $C(t)$ = 전체 제조비용
a = 가공비용(변동비)
f : 가공비용(고정비)
t : 공차

2.2 공차와 손실비용

공차한계를 벗어난 제품은 폐기나 재작업과 같이 쉽게 드러나는 형태의 추가 비용 및 손실을 발생시킨다. 그러나 공차한계 내에 겨우 들어간 제품도 품질손실을 발생시킨다. 이러한 손실은 소비자가 쉽게 인식하는 손실이며 제품의 판매와 제조업자의 평판에 크게 영향을 미친다. 따라서 품질손실 함수는 한계허용치 내의 제품에 의한 손실도 측정할 수 있어야 하며 제품과 고객의 만족을 향상시키기 위해서는 목표치에 근접하도록 제품과 공정을 설계하여 손실을 줄여야한다. 손실함수 $L(y)$를 제품의 품질특성 y의 함수로 보고 이를 품질 목표치 m에 대해 다음과 같이 근사된다(Montgomery, 1997).

$$L(y) \fallingdotseq K(y-m)^2 \tag{2}$$

여기서, K는 품질손실계수이며 상수이다. 이러한 2차식의 기대손실 $E(L)$을 구해보면 다음과 같다.

$$E(L) = E\{K(y-m)^2\} = K\{\sigma_y^2 + (\mu_y - m)^2\} \tag{3}$$

여기서, μ_y는 가공 공정의 공정중심이고 σ_y^2는 y의 분산이다. 정규분포에서는 μ_y와 m이 같다고 할 수 있으므로, 기대손실을 $L = K\sigma_y^2$으로 간단히 구해지지만, 베타 분포에서는 공정중심과 공칭치수가 일치한다고 보기 어렵기 때문에 주어진 설계함수 y에 대해서 식 (3)을 그대로 사용하여야 한다. <그림 1>은 손실함수를 고려한 공차와 비용 간의 관계를 나타낸 것으로, 공차가 느슨하면 손실비용이 증가하고, 가공비용은 감소하는 상쇄관계(trade-off)가 있음을 알 수 있다.

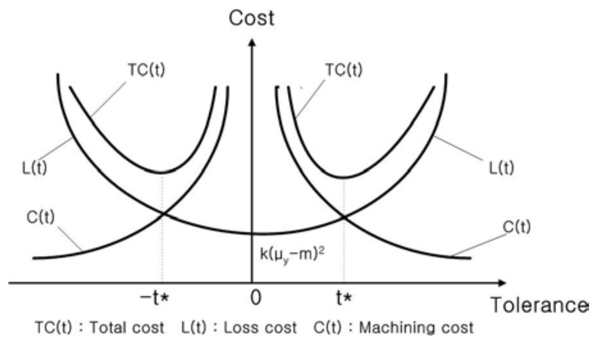

그림 1. 손실비용과 가공비용과의 관계.

그러므로 총비용을 최소화하는 최적공차 $\pm t^*$를 구하여야 한다. 식 (3)에서 손실에 대한 접근이 용이하기 위해서는 상수 K를 결정하는 것이 중요하다. 이를 위해 y값에 대한 기능적 한계치(functional limit)를 결정하는데, 기능적 한계치란 제품들 중 절반이 기능을 상실하게 되는 y값을 말한다. 설계함수 y에 대한 공차가 $\pm T_y$로 주어지는 경우 기능적 한계치는 $m_y \pm T_y$이며, 기능적 한계치에서 손실이 A_0라면 품질손실계수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K = \frac{A_0}{T_y^2} \tag{4}$$

A_0는 제품을 수리하거나 교체하는 데 드는 비용으로, 모든 손실이 A_0에 포함되어야 한다. 기능적 치수 y는 n개의 구성품 치수에 대하여 설계함수 $y = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$로 표현되고, y의 평균과 분산은 식 (5)와 식 (6)과 같다(Choi *et al.*, 2000).

$$E(y) = g(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) + \sum_{i=1}^{n} (E(X_i) - \mu_i) \left(\frac{\partial g(X)}{\partial X_i} \mid_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n} \right) \tag{5}$$

$$V(y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \mid_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n} \right)^2 \sigma_i^2 \tag{6}$$

식 (3)에서 기대손실 비용 $L(y)$는 식 (7)과 같은 설계 함수로 정의될 수 있다.

$$\begin{aligned} L_y &= K\{\sigma_y^2 + (\mu_y - m_y)^2\} \\ &= \frac{A_0}{T_y^2} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g(X)}{\partial X_i} \mid_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n} \right)^2 \sigma_i^2 \right] \\ &\quad + \frac{A_0}{T_y^2} [\{g(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) - m_y\}^2] \end{aligned} \tag{7}$$

설계함수 s개가 존재하는 경우와 대체공정이 p_i개가 있을 경우에, 대체공정변수 Y_{ij}(0 or 1)을 함께 고려하면 총 기대 손실비용 L은 식 (8)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} L = &\sum_{k=1}^{s} \frac{A_k}{T_k^2} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} Y_{ij} \left(\frac{\partial g_k(X)}{\partial X_i} \mid_{\mu_{1j}, \mu_{2j}, \ldots, \mu_{nj}} \right)^2 \sigma_{ij}^2 \right] \\ &+ \sum_{k=1}^{s} \frac{A_k}{T_k^2} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} Y_{ij} \{g_k(\mu_{1j}, \mu_{2j}, \ldots, \mu_{nj}) - m_k\}^2 \right] \end{aligned} \tag{8}$$

2.3 베타분포에 의한 신뢰수준

Lin *et al*.(1997)은 공차분석을 위하여 개별 구성품 치수가 베타분포를 따르고 설계함수 y가 선형인 경우, 기능적 치수가 베타분포로 근사화 BDAM (Beta Distribution Approximation Method)한다고 하였다. BDAM은 개별 구성품치수 (α_i, β_i)로 기능적 치수의 베타분포 모수(α_y, β_y)의 근사치를 구하는 것이다. 본 연구에서는 <그림 2>와 같이 기능적 치수가 신뢰수준 z를 만족하도록 기능적 치수의 공차를 결정하여 준다. 신뢰수준은 설계함수에 의해 결정되는 기능적 치수 y가 z%로 공차한계 $m_y \pm T_y$ 내에 존재함을 의미한다.

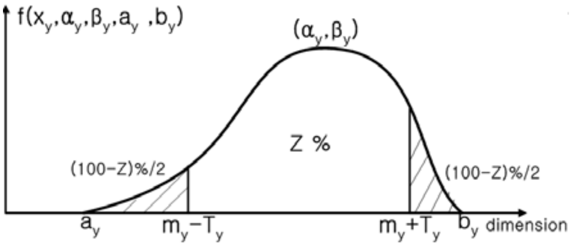

그림 2. 베타분포의 신뢰수준.

<그림 2>에서 신뢰수준은 식 (9)와 같이 구할 수 있다.

$$\frac{1}{(b_y - a_y) \cdot B(\alpha_y, \beta_y)} \cdot \int_{m_y - T_y}^{m_y + T_y} \left[\frac{x - a_y}{b_y - a_y} \right]^{\alpha_y - 1} \left[1 - \frac{x - a_y}{b_y - a_y} \right]^{\beta_y - 1} dx \tag{9}$$

여기서 $B(\alpha, \beta)$는 적분에 의해 정의된 베타함수로서 식 (10)과 같다.

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 z^{\alpha - 1} (1 - z)^{\beta - 1} dz \tag{10}$$

$\frac{x - a_y}{b_y - a_y} = X$라 하면 식 (11)과 같이 정리되고, 설계함수가 s개인 경우에는 식 (12)와 같이 일반화될 수 있다.

$$\frac{1}{B(\alpha_y, \beta_y)} \int_{\frac{m_y - T_y - a_y}{b_y - a_y}}^{\frac{m_y + T_y - a_y}{b_y - a_y}} X^{\alpha_y - 1} (1 - X)^{\beta_y - 1} dX \tag{11}$$

$$\int_{\frac{m_k - T_k - a_k}{b_k - a_k}}^{\frac{m_k + T_k - a_k}{b_k - a_k}} x^{\alpha_{yk} - 1} (1 - x)^{\beta_{yk} - 1} dx \geq z \cdot B(\alpha_{yk}, \beta_{yk}),$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots, s \tag{12}$$

3. 공차할당 모델

3.1 공차할당 모델링

베타분포를 이용한 대체공정 선정 및 총 비용(가공비용+손실비용)을 최소로 하는 최적 공차할당 모델은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Min } &\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} Y_{ij} \left(f_{ij} + \frac{a_{ij}}{t_{ij}} \right) \\ &+ \sum_{k=1}^{s} \frac{A_k}{T_k^2} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} Y_{ij} \left(\frac{\partial g_k(X)}{\partial X_i} \mid_{\mu_{1j}, \mu_{2j}, \ldots, \mu_{nj}} \right)^2 \sigma_{ij}^2 \right] \\ &+ \sum_{k=1}^{s} \frac{A_k}{T_k^2} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} Y_{ij} \{g_k(\mu_{1j}, \mu_{2j}, \ldots, \mu_{nj}) - m_k\}^2 \right] \end{aligned} \tag{13}$$

subject to

$$\int_{\frac{m_k - T_k - a_k}{b_k - a_k}}^{\frac{m_k + T_k - a_k}{b_k - a_k}} W^{\alpha_{yk} - 1} (1 - W)^{\beta_{yk} - 1} dW \geq Z \cdot B(\alpha_{yk}, \beta_{yk}),$$

$$W = \frac{y_k - a_k}{b_k - a_k} \tag{14a}$$

$$lt_{ij} \leq t_{ij} \leq ut_{ij},\ t_{ij} \geq 0,\ \sum_{j=1}^{p_i} Y_{ij} = 1,\ Y_{ij} = 0 \text{ or } 1 \tag{14b}$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots, s,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, p_i \tag{14c}$$

여기서, i = 구성품, j = 대체공정, k=설계함수, X_i=구성품 치수, Y_{ij}=대체공정 선정변수, t_{ij}=할당되는 설계공차, f_{ij}=고정비용 계수, a_{ij}=공차에 따른 변동비용 계수, $g_k(X)$=X 에 대한 k 번째 설계함수, T_k=k 번째 설계함수에 부여된 공차, A_k=k 번째 설계함수에 대한 추정된 품질손실비용, m_k=k 번째 설계함수에 대한 명목치수, a_k, b_k=베타분포 구간모수, α_{yk}, β_{yk}=베타분포 형상모수, Z=요구신뢰수준 (99.73% 요구신뢰도에서 Z=0.9973), y_k=t에 의해 결정된 기능적 치수, lt_{ij}, ut_{ij}=공차 t_{ij}의 하한과 상한, n=구성품의 수, s=설계함수의 수, p_i=가능한 대체공정 수.

식 (13)의 첫 번째 부분은 공정 j에서 구성품 i를 생산하기 위한 가공비용이고, 두 번째 부분은 설계함수 k에서 구성품 i의 공차와 명목치수에 의해 정의된 품질손실비용이며, 이 두 비용의 합을 최소화하는 것이 목적함수 식이다. 식 (14a)는 k 번째 설계함수에 대한 명목치수가 신뢰수준 Z%를 만족하여야 함을 의미한다. 식 (14b)는 공차의 상한, 하한 값과 구성품 치수 i가공에 반드시 하나의 대체공정 j가 선택되어야 함을 의미한다.

3.2 공차할당 모델 해법

본 연구의 최적화 모델은 0, 1 선택변수를 가지고 있는 이산 비선형계획법(discrete NLP) 모델이다. 목적함수에 대하여 볼록성(convexity)을 알아보기 위하여 Hessian matrix를 이용하였으며, 목적함수가 indefinite하고 비볼록(nonconvex) 함수이며, 여러 개의 국부최소치(local minimum)를 갖는 것을 알아내었다.

이 모델에 대한 해법으로 Choi *et al.*(2000)이 이용한 열거식 방법을 이용했으며, 비선형계획법 문제의 해는 Complex Method를 사용하여 모든 가능한 구성품의 조합과 대체공정, 설계함수에 대하여 전체 비용을 최소화(global minimum)하는 공차 해를 구하였다. <그림 3>은 모델 해법을 도식화하여 나타낸 것이다.

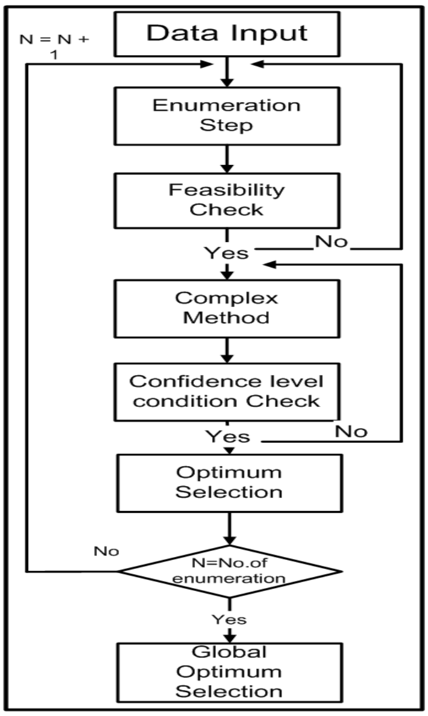

그림 3. 모델 해법 절차.

4. 수치예제

Greenwood & Chase(1988)가 공차분석 방법을 제시하면서 고려한 overrunning clutch assembly를 예제로 다루었다. <그림 4>에서 기능적 치수는 각 y이고 설계함수로 표현하면 다음과 같다.

$$y = g(X_1, X_2, X_3, X_4) = \cos^{-1}\left(\frac{X_1 + (X_2 + X_3)/2}{X_4 - (X_2 + X_3)/2}\right)$$

각 y에 대한 규격이 0.122±0.035 rad.(7.0±2.0 deg.)이고 개별 구성품 치수에 대한 공칭치수 X=(55.29mm, 22.86mm, 22.86mm, 101.69mm)일 때, 손실 추정치가 A_1=20, A_1=100 두 가지 경우에 대해서 <표 1>의 공차-비용 데이터와 <표 2>의 대체공정별 공차범위 데이터, <표 3>의 대체공정별 형상모수 데이터를 이용하여 최적 설계공차와 치수별 대체공정을 구한다(요구신뢰수준 99.73%).

수치예제의 결과는 <표 4>에 나타나 있다. 품질손실비용을 고려하지 않은 경우(A_1=0)에는 가공비용을 줄이기 위해 공차를 느슨하게 할당하였지만, 손실함수가 고려되면 공차가 커질수록 품질손실이 커지므로 가공비용과 손실비용의 합이 최소가 될 수 있는 최적 공차가 할당되어야 한다.

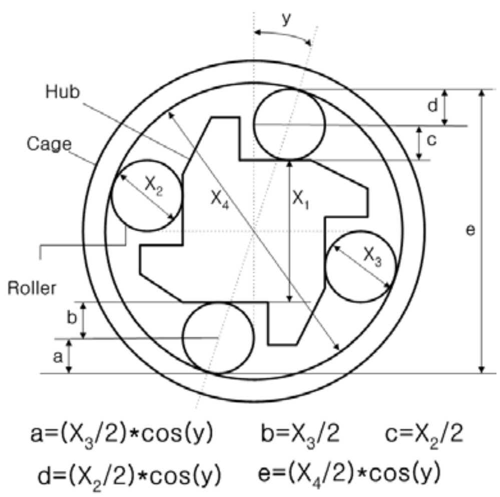

그림 4. overrunning clutch assembly.

표 1. 공차-비용 데이터 (단위 : $)

	대체공정 1		대체공정 2		대체공정 3	
	f	*a*	*f*	*a*	*f*	*a*
X_1	10.0	0.15	5.0	0.5	3.5	0.75
X_2	8.0	0.025	3.0	0.65	N/A	N/A
X_3	2.5	0.03	5.0	0.045	N/A	N/A
X_4	4.0	0.56	6.0	0.16	0.5	0.88

표 2. 대체공정별 공차범위 데이터 (단위 : mm)

	대체공정 1		대체공정 2		대체공정 3	
	lt	*ut*	*lt*	*ut*	*lt*	*ut*
X_1	0.015	0.08	0.06	0.15	0.12	0.25
X_2	0.02	0.15	0.08	0.3	N/A	N/A
X_3	0.04	0.2	0.12	0.25	N/A	N/A
X_4	0.08	0.12	0.15	0.25	0.2	0.4

표 3. 대체공정별 형상모수 데이터 (단위 : mm)

	대체공정 1		대체공정 2		대체공정 3	
	α_1	β_1	α_2	β_2	α_3	β_3
X_1	2	4	1.5	3	1.5	4
X_2	4	4	3	3	N/A	N/A
X_3	4	1.5	3	1.5	N/A	N/A
X_4	3	2	4	2	3	1.5

5. 결 론

제품 설계시 공차는 제품의 비용과 기능, 생산성에 큰 영향을 끼치는 아주 중요한 부분이다. 가공비용과 손실비용을 고려하여, 구성품들이 서로 최대의 기능성과 호환성을 가질 수 있고, 적절한 품질수준을 유지할 수 있는 합리적인 최적 공차를 할당하는 것은 상당히 어려운 작업이다. 구성품들이 가공 후 얻을 수 있는 치수는 실제로 확률분포를 따르게 되는데, 대부분의 연구는 개별 구성품치수에 대해 정규분포로 가정하여 확률적으로 접근하였다. 정규분포의 가정에는 개별 구성품의 공칭치수와 공정중심이 일치한다는 가정이 필요하며, 실제 개별 구성품들은 공칭치수와 공정중심이 일치하기 어려우며, 정규분포를 따르지 않고 비대칭 모습의 분포 형태를 갖게 된다.

본 연구에서는 분포가 비대칭인 경우에 적용할 수 있는 베타분포를 이용하여 제조비용과 손실비용을 최소화할 수 있는 최적공차 할당 모델을 개발하였다. 베타분포는 형상모수(α, β)에 의해 다양한 비대칭 분포형상을 구현할 수 있다. 개발된 비선형 정수 모델은 설계자가 제조비용과 손실비용을 최소화하는 합리적인 공차를 할당할 수 있게 해준다.

참고문헌

Bjorke, O. (1989), *Computer-Aided Tolerancing*, ASME press, ISBN 0-7918-0010-5, New York.

Choi, H. G.; Park, M. and Salisbury, E. J. (2000), Optimal Tolerance Allocation with Loss Functions, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 122, 529-535.

Feng, C. and Kusiak, A. (1997), Robust Tolerance Design With the Integer Programming Approach, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 119, 603-610.

Greenwood, W. H., and Case, K. W. (1988), Worst Case Tolerance Analysis with Nonlinear Problems, *Transaction of the ASME*, 110, 232-235.

Kim, K. S., Choi, H. G and Noh, S. D. (2002), Optimal Tolerance Allocation

표 4. 수치예제 결과

모델 / 치수	품질 손실비용 A_1=0		품질 실비용 A_1=20		품질 손실비용 A_1=100	
	대체공정	공차	대체공정	공차	대체공정	공차
X_1	3	±0.25	3	±0.191578	3	±0.225
X_2	1	±0.15	1	±0.111207	1	±0.06
X_3	2	±0.138352	2	±0.147503	2	±0.125
X_4	2	±0.15	2	±0.180581	2	±0.175
(α_y, β_y)	(15.5306,13.9113)		(15.5306,13.9113)		(15.5306,13.9113)	
가공비용	28.55859		29.85402		31.27428571	
손실비용	0		0.939752		3.3203643	
총비용	28.55859		30.793804		34.59465	

with Beta Distributions, *Annals of DAAAM for 2002 & Proceedings of the 13th International DAAAM Symposium*, 261-262.

Lee, W. J. and Woo, T. C. (1989), Optimum Selection of Discrete Tolerances, *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 111, 243-251.

Lin, S. S.; Wang, H. P. and Zhang, C. (1997), Statistical Tolerance Analysis Based on Beta Distributions, *Journal of Manufacturing System*, 6(2), 150-158.

Montgomery, D. C. (1997), *Introduction to Statistical Quality Control*, John-Wiley & Sons, Inc, ISBN 0-471-30353-4, New York.

Vasseur, H.; Kurfess, T. R. and Cagan, J. (1997), Use of a Quality Loss Function to Selection Statistical Tolerances, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 119, 410-416.

Zhang, C. and Wang, H. P. (1993), The Discrete Tolerance Optimization Problem, *Manufacturing Review*, 6(1), 60-71.