제어체적 복사열정산을 위한 구분종좌표보간법의 오차 및 보정방안

차 호 진* · 송 태 호†

(2002 년 11 월 23 일 접수, 2003 년 3 월 25 일 심사완료)

Error and Correction Schemes of Control Volume Radiative Energy with the Discrete Ordinates Interpolation Method

Hojin CHA and Tae-Ho SONG

Key Words : DOIM(구분종좌표보간법), Control Volume Energy(제어체적 에너지), Decoration Scheme(보정법), Quadratic Scheme(2 차법)

Abstract

The discrete ordinates interpolation method (DOIM) has shown good accuracy and versatile applicability for the radiation problems[1,2]. The DOIM is a nonconservative method in that the intensity and temperature are computed only at grid points without considering control volumes. However, when the DOIM is used together with a finite volume algorithm such as SIMPLER[3], intensities at the control surfaces need to be calculated. For this reason, a 'quadratic' and a 'decoration' schemes are proposed and examined. They are applied to two kinds of radiation problem in one-dimensional geometries. In one problem, the intensity and temperature are calculated while the radiative heat source is given, and in the other, the intensity and the radiative heat source are computed with a given temperature field. The quadratic and the decoration schemes show very successful results. The quadratic scheme gives especially accurate results so that further decoration may not be needed. It is recommended that the quadratic and the decoration schemes may be used together, or, one of them may be applied for control volume radiative energy balance.

기호설명

A : 제어체적의 표면적, [m^2]

f_x, f_y : 공간 차분 기법의 가중치

I : 복사강도, [W/(m^{2}sr)]

I_b : 흑체 복사강도, [W/(m^{2}sr)]

L : 용기의 특성길이, [m]

M : 이산화된 종좌표의 총 수

$\mathbf{n}, \vec{A}$: 제어면에 수직한 벡터

n : 한 제어체적을 구성한 제어면의 수

$\dot{q}_{RAD}$: 복사 열원, [W/m^3]

s : 시선 방향에 따른 위치 변수, [m]

$\dot{S}$: 식 (2)에 의해 정의된 생성 함수, [W/(m^{2}sr)]

$\mathbf{s}$: 종좌표 방향 벡터

V : 제어체적의 부피, [m^3]

W_j : 종좌표의 각 가중치

그리스문자

β : 소멸 계수, [1/m]

ε : 벽면 방사율

$\cdot$: $\mathbf{s}$ 벡터와 $\mathbf{n}$ 벡터 사이의 각도

* 한국과학기술원 기계공학과 박사과정,
E-mail : hjcha@kaist.ac.kr
TEL : (042)869-3072 FAX : (042)869-3095
† 책임저자, 회원, 한국과학기술원 기계공학과

κ : 흡수 계수, [1/m]

μ, ξ : 제 1 사분 면에서의 종좌표의 방향 코사인

σ_s : 산란 계수, [1/m]

Ω : 입체각, [sr]

ω : 산란 알베도($\equiv \sigma_s / \beta$)

Φ : 산란 위상 함수

하첨자

CS : 제어면

CV : 제어체적

$down, up$: 보간 격자점의 하류와 상류

e, w, n, s : 제어체적의 동서남북 방향

E, W, N, S : 격자점의 동서남북 방향

IN : 보간 되는 비격자점

j : 종좌표 방향의 인덱스

k : 제어면의 인덱스

P : 고려되는 격자점

w : 벽

상첨자

CS : 제어면

$*$: 무차원화 변수

1. 서 론

지난 수 십 년간 복사 열전달 방정식 해석을 위해 많은 수치 해석 방법들이 개발되어 왔다. 이들 중에 구분종좌표법(DOM)은 수치식으로 공식화하기 쉽고, 불규칙한 형상이나 복잡한 문제에 적용이 용이하다. 그래서, 많은 연구자들이 DOM에 대해 많은 연구를 행해 왔으며, 그에 따른 많은 DOM 변종들을 제안하였다.

Raithby와 Chui[4]은 DOM 기반의 유한체적법(FVM)을 개발하였는데, 복사강도를 유한체적에서 뿐만 아니라 유한 입체각에서 복사전달방정식을 적분함으로써 계산하였다. 이것은 어떤 유한 입체각 내에서 제어체적 광량 정산이 만족되고, 종좌표의 방향을 사용자 임의대로 정할 수 있다는 것을 의미한다. Chai[5] 등은 계단 방법(step scheme) 또는 평균 방법(diamond scheme) 같은 공간 차분 기법을 이용한 또 다른 FVM을 제안하였다. Cheong과 Song[1]은 보간법을 이용한 구분종좌표보간법(DOIM)을 개발하였다. 이 방법에서 어떤 격자점에서 복사강도를 구하기 위해서는 격자점이 아닌 상류의 복사강도를 알아야 하는데, 이 값은 주위 격자점에서의 값들로 보간하여 구한다. 즉, 이 방법은 공간 차분 기법이 필요하지 않게 된다. 그러므로, DOIM은 DOM과 FVM과 달리 제어면에서의 복사강도를 계산할 필요가 없다. 이것은 DOIM은 제어체적 또는 제어면을 설정하지 않아도 복사 열전달 해석을 할 수 있다는 것을 의미한다. Cheong과 Song은 복사강도나 온도장이 알려진 경우에 DOIM은 다른 방법들보다 정확한 복사강도와 열유속을 보여 주었다.

그런데, DOIM은 단지 격자점에서 복사강도를 계산하기 때문에 제어체적 또는 제어면이 설정되어 있다고 하더라도 제어체적 열정산에 대해서는 어떠한 정보도 주지 못한다. 그런 점에서 DOIM은 열정산에 대한 비보존 방법이다. 그러나, DOIM이 유동, 열전달 또는 연소를 다루는 유한 체적법과 함께 사용될 때는 제어체적 내에서 복사 열정산과 제어면에서의 복사강도 계산이 필요하게 된다.

이런 이유로 DOIM이 제어체적 내에서 열정산을 맞추기 위한 보정방안이 필요하게 된다. 이런 보정 방안은 비구조화 격자계에서도 적용 가능하도록 가능한 한 간단한 방법이 선택 되어야 한다. 그래서, 비물리적인 지그재그 복사강도 분포를 보정하기 위해서 2차법과 보정법을 개발하였다. 이러한 방법들은 1차원 복사 문제에 적용하고, 그 결과들을 다른 방법들의 결과와 비교하였다.

2. 구분종좌표보간법(DOIM)

2.1 수식화

흡수, 방사, 산란하는 회체 매질에서의 복사전달방정식은 다음과 같다.

$$\frac{dI}{ds} = -\beta I + \beta \dot{S} \tag{1}$$

여기서 생성항 $\dot{S}$은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{S} = (1-\omega) I_b + \frac{\omega}{4\pi} \sum_{j=1}^{M} I_j \Phi(\mathbf{s}_j, \mathbf{s}) W_j \tag{2}$$

그리고, 확산면에서의 벽면 조건은 다음과 같다.

$$I = \varepsilon I_{bw} + \frac{1-\varepsilon}{\pi} \sum_{\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}_j<0} \left|\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}_j\right| I_j W_j, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{s} > 0 \tag{3}$$

복사전달방정식인 식 (1)은 경로 길이 s에 대한 1차 미분 방정식이다. 만약 생성항 $\dot{S}$이 주어진다면 식 (1)을 해석적으로 계산할 수 있다. Raithby와

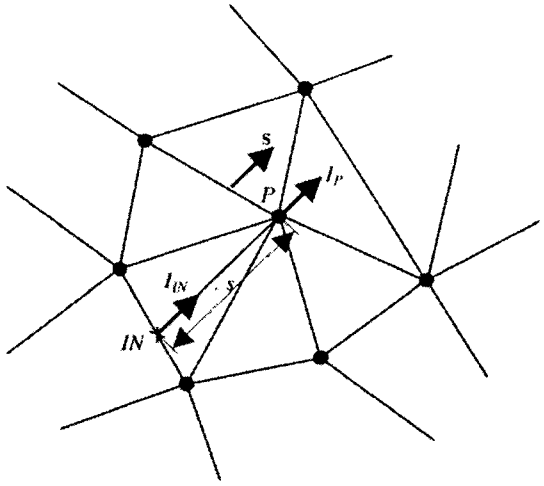

Fig. 1 Grid notation for an unstructured two dimensional mesh

Chui[4]는 생성항 $\dot{S}$ 을 격자점 P에서 Taylor 급수 전개를 통해 두 개의 항을 취해서 1차식으로 근사하였다.

$$\dot{S} = \dot{S}_P + \left.\frac{d\dot{S}}{ds}\right|_P (s - \Delta s) \tag{4}$$

식 (4)를 식 (1)에 대입하여 1차 상미분 방정식을 풀면 어떤 격자점 P에서 종좌표 **s**에 대한 복사강도는 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$I_P = I_{IN} e^{-\beta\Delta s} + \dot{S}_P(1 - e^{-\beta\Delta s}) - \frac{1}{\beta}\left.\frac{d\dot{S}}{ds}\right|_P [1 - e^{-\beta\Delta s}(1 + \beta\Delta s)] \tag{5}$$

식 (5)를 완성하기 위해서 초기값인 복사강도 I_{IN}값을 알아야 한다. 그런데, 여기서 I_{IN}은 2차원 비구조화 격자계인 Fig. 1에서 보는 것처럼 격자점에서의 값이 아니기 때문에 IN점 주위의 격자점에서의 복사강도로 보간하여 I_{IN}을 구한다. 그리고, 생성항 $\dot{S}$ 의 미분항은 다음과 같이 차분화 하여 정한다.

$$\left.\frac{d\dot{S}}{ds}\right|_P = \frac{\dot{S}_P - \dot{S}_{IN}}{\Delta s} \tag{6}$$

여기서 $\dot{S}_{IN}$ 은 I_{IN}과 같은 방법으로 보간하여 구한다.

DOIM에서는 보간 방법이 중요한 역할을 담당하기 때문에 구분종좌표보간법 (DOIM)으로 명명되었다. DOIM은 계단 방법 또는 평균 방법 등과 같은 공간 차분 기법과 제어면에서의 복사강도를 필요하지 않는 방법이다. 이것은 격자점 사이들만의 관계만 주어진다면 DOIM의 수행이 가능하다는 것을 의미한다. DOIM에서 $\dot{S}_{IN}$ 와 I_{IN}과의 값을 정하기 위해서는 보간 방법이 필요하다. 여기에 적용될 수 있는 보간 방법은 다양하나 비구조화 격자계에서도 적용되기 위해서는 보다 간단한 보간 방법이 요구된다. 따라서, 여기서는 보간 방법으로 선형 보간법[6,7]이 사용되었다.

2.2 DOIM 의 열정산의 비보존적 특성

DOIM은 제어체적을 설정하지 않고 보간 방법을 이용하여 격자점에서의 복사강도와 온도를 계산한다. DOIM에 의해 계산된 복사강도(I)와 흑체 복사강도(I_b)는 다음과 같은 복사 열정산을 단지 격자점에서만 만족시킨다.

$$\dot{q}_{RAD} = 4\pi\kappa I_b - \kappa \int_{4\pi} I d\Omega \tag{7}$$

그러나, DOIM을 다른 유한 체적 방법과 같이 사용할 때는 제어체적에서의 열정산을 만족시켜야 한다. 즉, 제어체적과 제어면이 설정되면 DOIM은 제어체적에서의 에너지 보존식인 다음 식을 만족하여야 한다.

$$\int_{4\pi}\int_{CS} I\vec{\Omega}\cdot d\vec{A} d\Omega = \int_{CV}\left(4\pi\kappa I_b - \kappa\int_{4\pi} I d\Omega\right) dV \tag{8}$$

보통 DOIM에서는 격자점이 제어체적의 중앙점이 된다. 식 (8)의 좌변은 제어면에서 정의되는 값으로 DOIM에서는 별도로 계산되어야 하는 값이다. 따라서, DOIM이 식 (8)을 만족하기 위해서는 제어면에서의 복사강도를 계산해야 한다. 식 (8)의 우변에 있는 복사강도(I)와 흑체 복사강도(I_b)는 제어체적 내에서 분포 함수로 적용된다. 식 (8)의 적분 순서를 바꿔서 식 (8)보다 좀더 강화된 형태의 에너지 보존식을 유도할 수 있다.

$$\int_{CS} I\vec{\Omega}\cdot d\vec{A} = \int_{CV} \kappa(I_b - I) dV \tag{9}$$

따라서 식 (9)는 식 (8)의 충분 조건이 된다.

임의의 제어체적이 n 개의 제어면으로 구성되고, 제어면에 바깥쪽으로 수직인 벡터(**n**)와 제어면에서의 종좌표(**s**)의 방향 사이의 각도를 θ_k 라고 하자. 그리고, 식 (9)의 우변의 제어체적 중앙 점 P에서 복사강도(I)와 흑체 복사강도(I_b)가 제어체적 내의 평균값이라고 가정하자. 그러면 식 (9)는 다음과 같이 차분화 할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n} I_k^{CS} \cos\theta_k A_k = \kappa(I_{bP} - I_P) V_P \tag{10}$$

여기서 I_k^{CS} 은 k번째 제어면에서의 평균 복사강도를 의미한다.

그러면 이와 관련된 간단한 예제를 살펴보자.

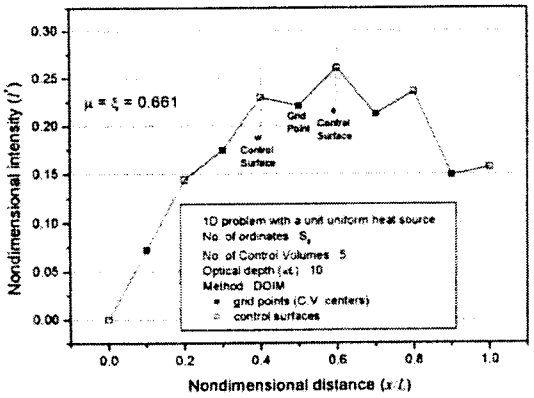

Fig. 2 Nondimensional intensities at centers and surfaces of control volumes when the number of control volumes is 5 and the walls are cold black

일정한 열원이 존재하는 1차원 복사 열전달 문제를 고려해 보자. 먼저 DOIM을 통해 수렴된 복사강도(I)와 흑체 복사강도(I_b)가 계산한다. 그리고 일정한 제어체적의 크기를 갖는 격자계에서는 격자점 사이의 중앙에 위치한 제어면(e, w)에서의 복사강도 I_e와 I_w를 식 (10)을 통해 계산한다. Fig. 2는 일정한 열원이 주어져 있고 κL=10.0일 때, 5개의 일정한 크기의 제어체적이 설정된 격자계에서 μ=ξ=0.661인 방향의 복사강도를 보여주는 그래프이다. 이 방향에서 왼쪽 제어면의 복사강도 I_w은 벽면 조건으로 구해질 수 있고, 오른쪽 제어면의 복사강도 I_e은 식 (10)에 의해 얻어질 수 있다. 이러한 과정은 다음 오른쪽 제어체적 내에서도 계속해서 반복된다. Fig. 2에서는 격자점에서의 복사강도 뿐만 아니라 제어면에서의 복사강도도 같이 표시되었는데, 그 형태가 지그재그 분포를 이루고 있다. 이러한 경향은 DOIM이 비보존적 방법이기 때문에 광학두께가 크고 격자계의 수가 작을 경우에 일어나는데, 오른쪽 벽면으로 갈수록 그 현상이 심해진다. 따라서 이러한 지그재그 분포를 완화시키기 위한 새로운 방법이 필요하게 된다.

3. DOIM의 제어체적 복사 열정산을 위한 2차법과 보정법

3.1 생성항에 대한 2차법

식 (1)에서 생성항 $\dot{S}$은 경로 길이 s에 대한 1차 다항식으로 근사 되었다. 그러나, 광학 두께가 크고 격자계의 격자 간격이 클 때는 이러한 근사식은 적합하지 않게 된다. 따라서, 좀더 고차 다항식으로 생성항을 근사 하는 것이 바람직하다. 여기서 생성항을 Taylor 급수 전개를 통해 2차식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{S} = \dot{S}_P + \left.\frac{d\dot{S}}{ds}\right|_P (s-\Delta s) + \left.\frac{1}{\beta^2}\frac{d^2\dot{S}}{ds^2}\right|_P \frac{(s-\Delta s)^2}{2!} \quad (11)$$

식 (11)을 식 (1)에 대입하여 복사전달방정식을 해석적으로 풀면 격자점 P에서 s방향의 복사강도는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} I_P &= I_{IN}e^{-\beta\Delta s} + \dot{S}_P(1-e^{-\beta\Delta s}) \\ &\quad -\frac{1}{\beta}\left.\frac{d\dot{S}}{ds}\right|_P [1-e^{-\beta\Delta s}(1+\beta\Delta s)] \\ &\quad +\frac{1}{\beta^2}\left.\frac{d^2\dot{S}}{ds^2}\right|_P [1-e^{-\beta\Delta s}(1+\beta\Delta s+\frac{(\beta\Delta s)^2}{2})] \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 생성항의 2차 미분항은 다음과 같은 차분식을 통해 얻어질 수 있다.

$$\left.\frac{d^2\dot{S}}{ds^2}\right|_P = \frac{\Delta s_{down}\dot{S}_{up} + \Delta s_{up}\dot{S}_{down} - (\Delta s_{down}+\Delta s_{up})\dot{S}_P}{\Delta s_{down}\Delta s_{up}(\Delta s_{down}+\Delta s_{up})/2!} \quad (13)$$

여기서 $\dot{S}_{up}, \Delta s_{up}$ 은 상류의 값들을 의미하고, $\dot{S}_{down}, \Delta s_{down}$은 하류의 값들을 의미한다.

이 방법을 '2차법'(quadratic scheme)이라고 부르자. 이 방법은 다음 장에서 복사강도의 지그재그 분포를 막는데, 매우 효율적이라는 것을 보여 줄 것이다.

3.2 제어체적의 복사 열정산을 위한 보정법

DOIM이 유한체적 코드와 함께 사용될 때는 제어체적 내에서의 열정산을 맞추기 위해 제어면에서의 복사강도를 알아야 한다. 이러한 복사강도는 Fig. 2에서 보는 바와 같이 1차원 문제의 경우에는 단지 식 (10)만을 이용하여 구할 수 있다. 그런데, 생성항이 1차 다항식으로 표현되었을 때는 복사강도의 분포가 지그재그 모양을 취하기가 쉽다. 이런 경우에 지그재그 분포를 매끄러운 곡선으로 보정하기 위한 새로운 방법이 요구된다. 이러한 방법은 주어진 문제의 특성에 따라 그 절차가 달라질 수 있다.

첫 번째로 고려되는 문제는 매질에 열원이 존재하고 온도장이 알려져 있지 않은 경우이다. 이러한 문제에 DOIM이 적용되었을 때 격자점에서의 복사강도와 흑체 복사강도가 성공적으로 수렴되었다면 어떤 특정 포인트에서의 복사 열정산을 나타내는 식 (7)이 만족된다는 것을 의미한다. 여기서 구해진 흑체 복사강도는 유지시키고, 제어면의 복사강도를 정한 뒤 이후에 격자점의 복사강도를 보정하는 방법을 다음과 같은 순서로 진행한다.

첫 번째 단계는 제어면에서의 복사강도를 정하는 것이다. 우리는 여기서 일시적으로 식 (10)을 만족시킬 것이다. Fig. 2와 같은 1차원 문제의 경우에는 어떤 제어면에 들어오는 복사강도를 알 경우 단지 식 (10)만을 통해 다른 제어면으로 나가는 복사강도를 계산할 수 있다. 그런데, 문제가 2, 3차원으로 확장될 경우에는 배출되는 제어면의 복사강도의 수가 두 개 이상이 되므로, 식 (10) 이외의 다른 식들이 필요하게 된다. 이러한 부가식들은 식 (10)과 달리 임의적으로 선택될 수 있는 식들이다. 2차원 문제에 있어서 DOM은 다음과 같은 공간 차분법을 이용하여 복사강도를 계산한다.

$$I_P = f_x I_e + (1-f_x) I_w = f_y I_n + (1-f_y) I_s \quad (14)$$

위해서 말한 임의의 식으로 식 (14)의 두 번째 등식을 이용한다. 식 (10)와 (14)을 이용하여 나가는 복사강도인 I_e와 I_n을 구할 수 있다. 3 차원 문제에는 식 (14)와 비슷한 z축에 관한 식이 하나 더 필요하게 된다.

보통 f_x와 f_y가 0.5일 때 식 (14)을 평균 방법이라고 부르고, f_x와 f_y가 1.0일 때는 계단 방법이라고 부른다. Carlson과 Lathrop[8]의 1차원 문제의 해결 방식에 바탕을 둔 '지수법(exponential scheme)'은 다음과 같이 표현된다.

$$f_x = \frac{1}{1-\exp(-\kappa\Delta x/|\mu|)} - \frac{1}{\kappa\Delta x/|\mu|} \quad (15a)$$

$$f_y = \frac{1}{1-\exp(-\kappa\Delta y/|\xi|)} - \frac{1}{\kappa\Delta y/|\xi|} \quad (15b)$$

제어체적의 형상이 사각형이 아닌 경우에는 외부로 나가는 복사강도가 두 개 이상일 수 있다. 이런 경우에는 또 다른 임의의 식이 필요하게 된다. 외부로 나가는 복사강도가 하나일 경우에는 식 (10)만으로 충분하다.

복사강도의 분포가 Fig. 2처럼 지그재그 분포를 나타낼 수 있기 때문에 두 번째 단계에서는 격자점에서의 복사강도인 I_p값을 수정함으로써 지그재그 분포를 보정한다. 복사강도 I_p값을 보정하는 방법은 여러 가지를 사용할 수 있는데, 여기서 우리는 식 (14)의 첫 번째 등식을 사용할 것이다. 이 보정은 한 번만 행해질 것이며, 이로써 전체 계산이 종료된다. 그런데, 두 번째 단계가 실행되면 더 이상 식 (10)이 만족되지 않을 수 있다. 단지 제어체적 V_p에 대한 다음과 같은 에너지 정산만을 만족시킬 수 있다. 이 식은 식 (7)과 (8)을 통해서 얻어 진다.

$$\dot{q}_{RAD} V_P = \sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{n} I_{k,j}^{CS} \cos\theta_{k,j} A_k W_j \quad (16)$$

여기서 아래첨자 j는 종좌표를 의미하고, 아래첨자 k는 제어면을 의미한다.

한편 지금까지 설명한 두 가지 단계의 보정 작업을 I_{bp}값을 갱신하면서 반복해서 수행하면 더 좋을 것 같은 생각이 든다. 그러나, 이렇게 되면 결국 이 방법은 DOIM이 아닌 DOM이 되어서, DOIM에 의해 구한 값들은 단지 DOM을 위한 초기치들이 되어 버리고 만다. DOM과 DOIM의 결과 중 어느 것이 더 정확하다는 근거가 없기 때문에 DOIM의 결과에 대한 수정은 DOIM의 특성을 유지 시키기 위해 최소화되어야 한다. 보정법의 첫 번째 단계가 실행된 후 DOIM의 결과가 매우 합리적이고 지그재그 형태의 결과가 나타나지 않는다면 더 이상 두 번째 단계의 보정이 필요하지 않는다. 즉, 보정법은 모든 계산의 수렴 후 마지막 작업으로 단 한 번 수행되는 후처리 작업이다.

두 번째로 고려되는 종류의 문제는 매질의 온도장이 주어진 경우에 복사강도와 복사 열원의 크기를 구하는 문제이다. DOIM의 실행은 격자점에서의 복사강도를 구하는 문제에 국한된다. 포인트 복사 열원은 식 (7)을 통해 계산 될 수 있는데, 여기서 더 이상 식 (10)을 만족시킬 필요는 없다. 왜냐하면 격자점에서의 DOIM 결과가 식 (10)과 다른 관계식을 이용한 제어체적 내 평균 결과보다 정확한 결과를 보여주기 때문이다. 그러므로, 복사강도의 분포가 매끄러운 곡선을 유지하는 한 제어면에서의 복사강도 값을 구하는 방법에는 제한이 없다. 여기에서 식 (14) 또는 다음과 같은 선형 보간식[1]을 이용하여 제어면의 복사강도를 구한다.

$$I_e = \frac{\Delta l - \delta l}{\Delta l} I_P + \frac{\delta l}{\Delta l} I_E \quad (17)$$

이와 같이 제어면에서 복사강도를 설정하고 나면 어떤 제어체적에서 전체 복사 에너지 배출량을 구할 수 있게 된다. 이것이 바로 식 (16)의 우변이 된다. 이것을 제어체적의 부피 V_p로 나누면 제어체적 평균 복사 열원 $\dot{q}_{RAD}$이 된다.

그러면 다음 절에서 2차법과 보정법이 1차원 복사 열전달 문제에 어떠한 결과를 보여주는지를 살펴보자.

4. 2 차법과 보정법을 사용한 DOIM 의 결과 및 토의

2차법과 보정법을 테스트하기 위해 네 가지 문제를 고려해 보자. 모든 경우에 매질의 광학 두께 (κL)가 10.0인 매질을 적용한다. 그 이유는 광학

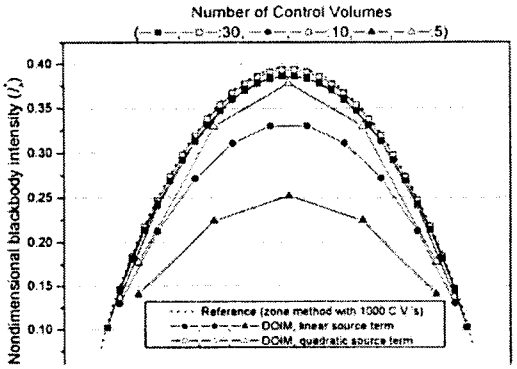

Fig. 3 Nondimensional blackbody intensities for a slab with uniform $\dot{q}_{RAD}$ varying the number of control volumes (5, 10 and 30) when the DOIM is used

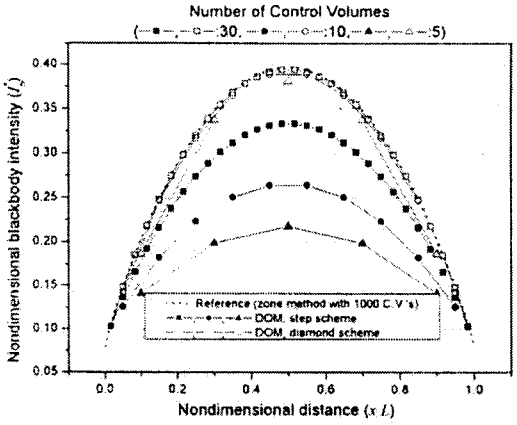

Fig. 4 Nondimensional blackbody intensities for a slab with uniform $\dot{q}_{RAD}$ varying the number of control volumes (5, 10 and 30) when the DOM is used

두께가 작을 때는 복사강도의 지그재그 분포가 나타나지 않기 때문이다. 실제 모니터의 브라운관을 제작하는 유리물 용광로의 경우 광학 두께가 10 정도나 그 이상이 된다. 광학 두께가 10.0 이상의 매우 큰 경우는 광학두께가 10.0일 경우와 비슷한 경향을 보이기 때문에 여기서는 그 결과를 보이지 않았다. 매질은 흡수, 방사, 산란하는 회체 성질을 띠고, 격자계는 일정한 크기의 제어체적을 갖도록 형성하고, 종좌표의 수는 S_6[8]이다. 복사강도를 보여주는 모든 그래프들은 복사강도의 방향 코사인이 $\mu = \xi = 0.661$ 인 방향이 선택되었다. 또한, 복사강도는 열원이 알려져 있을 때는 $\dot{q}_{RAD}L$으로 무차원화 한다. 온도장이 알려져 있을 때는 임의의 복사강도 I_0을 이용하여, $I_b^* = I_b / I_0$, $I^* = I / I_0$, $\dot{q}_{RAD}^* = \dot{q}_{RAD}L / I_0$처럼 무차원화 한다.

4.1 일정한 열원이 존재하는 1 차원 문제

첫 번째 테스트할 것은 일정한 열원이 매질 내에 존재하는 1차원 문제를 고려한다. 이 문제에 2차법과 보정법을 이용한 DOIM을 적용해 보자.

Fig.3은 생성항이 1차 또는 2차 다항식으로 표현되었을 때 DOIM에 의해 계산된 무차원화 흑체 복사강도를 보여주고, Fig.4은 계단 방법 또는 평균 방법을 사용한 DOM에 의한 흑체 복사 강도를 보여 주고 있다. Fig.3과 Fig.4에서 DOIM과 DOM의 흑체 복사강도를 비교할 수 있는데, 기준이 되는 해로써 1000개의 제어체적을 갖는 존방법의 결과를 사용한다. 제어체적의 수가 매우 클 때는 DOIM, DOM, 존방법의 결과들은 서로 거의 같아진다. 2차법을 사용한 DOIM의 결과들은, 제어체적의 수가 가장 작은 경우에도 존방법의 결과와 잘

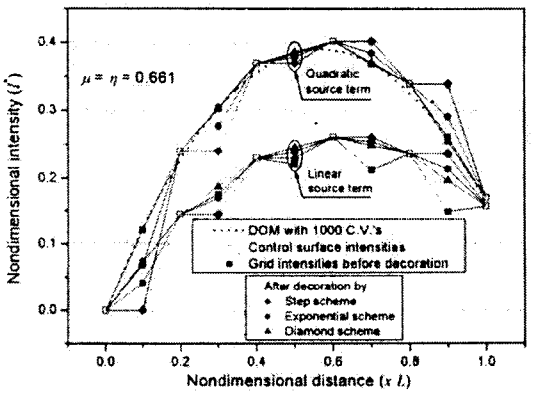

Fig. 5 Nondimensional intensities at centers and surfaces of control volumes for a slab with uniform $\dot{q}_{RAD}$ when the number of control volumes is 5 and several decoration schemes are used for the DOIM

일치한다. 왜냐하면 광학 두께가 매우 클 때는 복사열전달이 전도의 현상과 비슷한 거동을 보이기 때문이다. 즉, 매질의 온도장이 거의 포물선형태를 보이게 된다. 따라서 2차법에서는 생성항이 2차 다항식으로 표현되기 때문에 작은 제어체적의 수에도 정확한 결과를 얻을 수가 있다. 선형적인 생성항을 사용한 DOIM의 경우에는 5개의 제어체적 수에서 기준값보다 낮은 값을 보여주나, 30개의 제어체적 수에서는 보다 정확한 값을 보여준다. 계단 방법을 사용한 DOM의 결과들이 가장 큰 오차를 보여주고 있는데, 심지어 30개의 제어체적 수에서도 다른 방법들의 결과보다 큰 오차를 보인다. 평균 방법을 사용한 DOM은 5 개의 제어체적 수

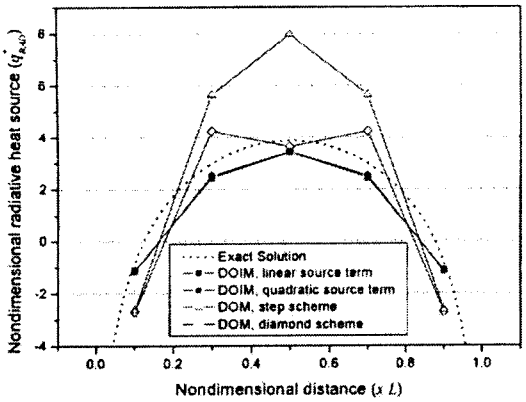

Fig. 6 Nondimensional radiative heat source for a slab with given I_b^* and 5 control volumes

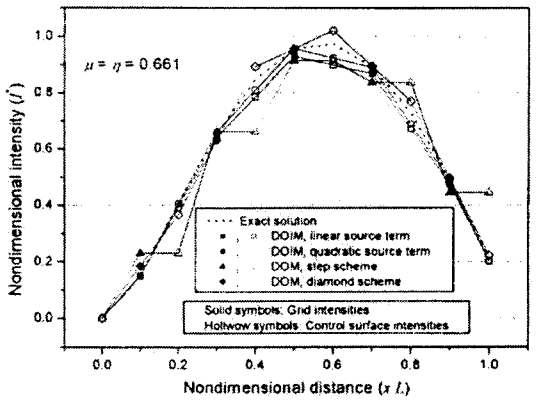

Fig. 7 Nondimensional intensities at centers and surfaces of control volumes for a slab with given I_b^* and 5 control volumes

에서도 좋은 결과들을 보여준다. 지수방법을 사용한 DOM은 그림에는 표시되어 있지 않지만, 그 결과는 계단 방법과 평균 방법에 의한 결과들의 중간 정도 값을 보여준다. 보통 지수 방법의 식 (14)의 f_x값은 1보다 크지 않는 1에 가까운 값을 가져야 한다고 알려져 있다.[9] 그러나, 이번 연구에서는 f_x값이 0.5일 때인 평균 방법을 사용할 때 가장 좋은 결과를 보인다.

Fig.5는 5개의 제어체적을 갖는 격자계에 DOIM이 적용되었을 때 보정이 적용되기 전과 후의 무차원화 복사강도를 보여준다. 여기서 제어면에서의 복사강도는 Fig.2에서의 결과와 동일하지만, 격자점에서의 복사강도는 보정법의 두 번째 단계에 의해 조정되었다. 보정을 위해 계단 방법, 지수 방법, 평균 방법이 이용되었고, 기준값으로는 1000개의 제어체적을 갖는 DOM의 결과를 이용하였다. 존방법 대신 DOM의 결과를 이용한 이유는 존방법이 복사강도에 대한 정보를 주지 않기 때문이다. 2차법의 결과들은 어떠한 제어체적의 수에도 기준값과 잘 일치한다. 그것은 흑체 복사강도 값이 매우 정확하게 계산되기 때문에 단지 식 (10)만으로도 제어면의 복사강도를 정확하게 계산한다는 것을 의미한다. 그래서, 이 경우에는 보정법을 적용해도 값의 변동이 거의 없다. 선형적인 생성항을 이용한 DOIM의 결과들은 지그재그 분포를 이루지만, 보정법이 적용된 후에는 지그재그 분포가 부드러운 포물선 형태의 분포로 바뀐다. 생성항이 선형적일 때의 결과들은 기준값에 비해 낮은 값을 갖게 되는데, 그것은 제어체적의 수가 5개 밖에 되지 않기 때문에 한 개의 제어체적 내의 생성항이 선형적인 분포를 이루지 않기 때문이다. 여기서는 보이지 않았지만, 제어체적의 수가 늘어나면 DOIM의 결과는 기준값과 비슷해 진다는 것을 알 수 있었다. 보정법에 여러 가지 방법이 적용되었는데, 그 중에서 평균 방법이 가장 좋은 결과를 보여준다. 그래서, 다음부터는 열원이 존재하는 문제에 보정법으로 평균 방법을 사용할 것이다.

4.2 온도장이 알려진 1 차원 문제

온도장이 알려진, 즉 흑체 복사강도가 알려진 1 차원 문제를 고려해 보자. I_b가 알려져 있을 경우에 복사강도는 해석적으로 구할 수 있다. 흑체 복사강도의 분포가 다음과 같은 함수로 주어진다고 하자.

$$I_b^* = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \tag{18}$$

식 (18)을 식 (1)에 대입하면 x에 대한 I의 일차 상미분 방정식이 된다. 이것을 해석적으로 풀면 I는 다음과 같이 구해진다.

$$I^*(x) = e^{-\frac{\kappa x}{\mu}}\left(I_{bw}^* + \frac{\kappa L \mu \pi}{\kappa^2 L^2 + \mu^2 \pi^2}\right) + \frac{\kappa L\left(\kappa L \sin(\pi x/L) - \mu\pi\cos(\pi x/L)\right)}{\kappa^2 L^2 + \mu^2 \pi^2} \tag{19}$$

식 (19)은 엄밀해이고, 이 식은 DOIM과 DOM 결과의 정확도를 비교하기 위해 사용된다.

Fig.7은 5개의 제어체적을 갖는 격자계에 DOIM과 DOM을 적용했을 때 무차원화 복사강도를 보여주고 있다. DOIM에서 제어면의 복사강도를 구하기 위해 선형 보간법(식 (17))을 이용하였다. DOIM의 결과들은 2차법 또는 보정법 중 어떠한 방법을 사용해도 엄밀해와 잘 일치하고 있다. 특히, 격자점에서의 복사강도 값은 엄밀해에 매우 가깝다. 계단 방법 또는 평균 방법을 사용한

DOM의 결과들도 일반적으로 합리적인 경향을 보인다. 그런데, 계단 방법을 사용하는 경우에는 제어면에서의 복사강도 값의 오차가 다른 방법의 결과들보다 크다.

Fig.6은 무차원화된 복사 열원를 보여주고 있다. 선형적인 생성항과 2차식의 생성항을 사용한 DOIM의 결과들은 서로 매우 비슷하며, 엄밀해 보다 약간 낮은 값을 보이면서, 전체적으로 잘 일치한다. DOM의 결과는 엄밀해와 약간 큰 차이를 보이며, 그 오차는 DOIM보다 크다. 이것은 전체적으로 DOIM에 의해 계산된 제어면 복사강도가 DOM에 의한 값보다 정확하다는 것을 의미한다.

5. 결 론

단지 격자점에서 결과들만 얻을 수 있는 DOIM을 제어체적에 관한 개념을 도입하여, 이미 DOIM에 의해 계산된 결과들과 연결시키는 시도를 행하였다. 제어면에서의 복사강도는 제어체적 내의 광선의 정산 또는 공간 차분 방법 또는 두 개의 방법 모두를 이용해서 얻을 수 있다. 그런데, 이렇게 구한 복사강도의 분포가 물리적으로 타당하지 않은 지그재그 형태의 곡선을 이루는 수가 있다. 이런 경향을 보정하기 위해서 '2차법'과 '보정법'을 도입하였다. 이 방법들을 일정한 열원이 존재하거나 온도장이 주어진 1차원 문제에 대하여 검증 하였다.

주어진 문제에 적용된 2차법과 보정법은 합리적인 결과를 보여 주었다. 2차법은 더욱 정확한 결과를 보여주기 때문에 결과의 보정이 더 이상 필요 없게 되었다. 2 차법을 사용하지 않고, 선형 생성항을 사용하는 경우에는 결과가 지그재그 분포를 보일 수도 있다. 이러한 경우 여러 가지 보정법을 이용해서 지그재그 분포를 부드러운 분포로 보정할 수 있었다.

결론적으로 2차법을 우선적으로 선택해서 DOIM에 적용하기를 추천한다. 그리고 생성항이 선형적이라고 가정했을 때는 보정법이 적용되는 것이 유용하다. 물론 2차법과 보정법이 모두 DOIM에 적용되는 것이 가장 바람직하다. 그리고, 그 결과들은 DOM의 결과들과 비슷한 정확도를 갖거나, 좀더 좋은 정확한 결과를 보여준다.

후 기

본 연구는 과학기술부의 Critical Technology 21사업의 지원으로 이루어졌습니다.

참고문헌

(1) Cheong, K.B. and Song, T.H., 1997, "An Alternative Discrete Ordinates Method with Interpolation and Source Differencing for Two-Dimensional Radiative Transfer Problems," *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 32, pp. 107~125.

(2) Koo, H.M, Cheong, K.B. and Song, T.H., 1997, "Schemes and Applications of First and Second-Order Discrete Ordinates Interpolation Methods to Irregular Two-Dimensional Geometries," *ASME J. of Heat Transfer*, Vol. 119, pp. 730~737.

(3) Patankar, S.V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, New York, pp. 61~66.

(4) Raithby, G.D. and Chui, E.H., 1990, "A Finite-Volume Method for Predicting a Radiant Heat Transfer in Enclosures With Participating Media," *ASME J. of Heat Transfer*, Vol. 112, pp. 415~423.

(5) Chai, J.C., Lee, H.S. and Patankar, S.V., 1994, "Finite Volume Method for Radiation Heat Transfer," *J. Thermophys. Heat Transfer*, Vol. 8, No. 3, pp. 419~425.

(6) Seo, S.H. and Kim, T.K., 1998, "Study on Radiation in e-D Irregular Systems Using the Trapezoidal Rule Approximation on the Transport Equation," *KSME International Journal*, Vol. 12, No. 3, pp. 514~523.

(7) Cha Hojin and Tae-Ho Song, 2000, "Discrete Ordinates Interpolation Method Applied to Irregular Three-Dimensional Geometries," Trans. Of the KSME, B, Vol, 24, No. 6, pp. 814~821.

(8) Lathrop, K. D. and Brinkley, F. W., 1973, "TWOTRAN-II: an interfaced, exportable version of the TWOTRAN code for two-dimensional transport," Los Alamos Scientific Laboratory Report #LA-4848-MS.

(9) Carlson, B.G. and Lathrop, K.D., 1968, "Transport Theory – The Method of Discrete Ordinates," in *Computing Methods in Reactor Physics*, edited by H. Greenspan, C.N. Kelber and D. Okrent, Gordon and Breach, New York, pp. 165~266.