관 유동과 Blasius 유동에서 가장 불안정한 교란에 관하여

최 상 규*·정 명 균†

(2002년 10월 28일 접수, 2003년 4월 29일 심사완료)

On the Most Unstable Disturbance of Channel Flows and Blasius Flow

Sangkyu Choi and Myung Kyoon Chung

Key Words: Plane Poiseuille Flow, Plane Couette Flow, Blasius Flow, Pseudospectra(준안정), Transition(천이)

Abstract

The pseudospectral method for stability analysis was used to find the most influential disturbance mode for transition of plane channel flows and Blasius flow at their critical Reynolds numbers. A number of various oblique disturbance waves were investigated for their pseudospectra and resolvent norm contours in each flow, and an exhaustive search method was employed to find the disturbing waves to which the flows become most unstable. In plane Poiseuille flow an oblique disturbance with a wavelength of 3.59h (where h is the half channel width) at an angle 28.7° was found to be the most influential for the flow transition to turbulence, and in plane Couette flow it is an oblique wave with a wavelength of 3.49h at an angle of 19.4°. But in Blasius flow it was found that the most influential mode is a normal wave with a wavelength of $3.44\delta_{.999}$. These results imply that the most influential disturbance mode is closely related to the fundamental acoustic wave with a certain shear sheltering in the respective flow geometry.

기호설명

α : 유동방향 파동수($=2\pi/\lambda_x$)
β : 스팬방향 파동수($=2\pi/\lambda_z$)
λ : 파장
ω : 복소 진동수($=\alpha C$)
C : 위상속도
κ : $\kappa^2=\alpha^2+\beta^2$
u_i : 속도
p : 압력
x_i : 좌표값
n : 법선 와도
Re : 레이놀즈 수
ε : 교란
∇^2 : 라플라시안

† 책임저자, 회원, 한국과학기술원 기계공학과
E-mail : mkchung@kaist.ac.kr
TEL : (042)869-3014 FAX : (042)869-3210
* 삼성중공업 CFD 개발

1. 서 론

지금까지 천이 시나리오에 관한 많은 연구가 이루어져 왔다. 이러한 연구의 결과들은 크게 세 가지로 요약될 수 있다. 첫째, 2차원의 Tollmien-Schlichting (TS) waves에 의한 2차 불안정성(secondary instability)에 의해 천이가 시작된다고 가정하는 TS 시나리오가 있다.[1,2] 이 시나리오의 초기 조건은 2차원의 유한 진폭의 TS wave

이다. 유동이 2차원이 된 후 곧 2차원성은 깨지고 천이가 뒤따르게 된다. 이 시나리오는 진동리본(vibrating ribbon)의해 유도된 2차원의 TS wave를 이용한 실험과 정성적으로 잘 일치한다.[2] 그러나, 이것은 평행평판 천이의 물리적 본성을 묘사할 수 없다. 첫째, 천이는 발생서부터 3차원이다.[3] 둘째, 저임계(subcritical) 레이놀즈수(Reynolds number)에서 천이를 일으키기 위한 TS wave의 에너지는 천이를 일으키는 3차원 교란의 에너지보다 크다.[4] 마지막으로 TS wave는 평행 Couette 유동에서 대략 Re=1000 이하에서는 2차 불안정성은 없다. 그러나, 천이는 이 레이놀즈 수보다 훨씬 낮은 곳에서 일어난다.[5]

둘째, 유동방향(Streamwise) 와류(vortex)에 의해 천이가 일어난다고 생각하는 SV 시나리오가 있다. 벽면의 시작점 부근에서(leading edge) 유동방향 와류가 일어나고 이것이 유동방향 줄무늬(streamwise streak)를 형성시킨다. 보다 하류에서 유동방향 줄무늬는 흔들리기 시작하고 결국 천이가 발생한다.

세째, 엇갈린 파동(oblique wave)에 의해서 천이가 시작된다고 생각하는 OW 시나리오가 있다. 엇갈린 파동은 과도(transient) 성장 과정에 의해 성장한다. 성장하는 파동의 쌍은 유동방향 와류를 포함하는 유동방향과 무관한 구조를 만들기 위해 비선형적으로 작용한다. 첫단계를 제외하면 이것은 SV 시나리와 유사하다. 이 시나리오는 Poiseuille 유동[6,7]과 경계층 유동[8] 등에 대해서 연구되었다.

Reddy 등[4]은 평행 Poiseuille, Couette 유동에서 45° 를 이루는 엇갈린 파동에 의해 시작되어지는 줄무늬(streak) 불안정성에 관해서 연구했다. 줄무늬 불안정성은 엇갈린 파동에 의해서 시작되어진 천이의 근본적인 양상이다. 그들은 저임계(subcritical) 레이놀즈수에서 Poiseuille와 Couette 유동에서 유동방향 와류 이후의 천이 시나리오가 TS wave에 의한 천이 시나리오 보다 천이를 일으키는데 필요한 에너지가 적어도 100배 작음을 발견했다. 또한, 그들은 OW 시나리오는 SV 시나리오 보다 작은 에너지로 천이가 일어남을 발견했다.

위의 조사로부터, OW 시나리오가 평행평판 유동에서 천이 과정을 설명할 수 있는 가장 가능성 있는 것으로 보인다. 엇갈린 파동에 의한 천이의 전제를 받아들인다 하더라도, 난류로의 천이 시작에서 가장 민감한 엇갈린 파동의 조건은 여전히 의문이다. 본 연구는 이 문제에 관한 것이다.

2. 연구방법

2.1 점성선형안정식

본 논문에 사용할 선형안정식은 Navier-Stokes 식으로부터 유도된다.

비압축성 유동에서 Navier-Stokes 식과 연속방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re}\nabla^2 u_i \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

여기서 u_i는 속도 성분, p는 압력, x_i는 공간 좌표계이다. 유동방향을 x_1 또는 x, 그리고 그 속도 성분을 u_1 또는 u라 표시하고, 벽면에 직각 방향을 x_2 또는 y, 그 속도 성분을 u_2 또는 v로 표시하고, 횡 방향을 x_3 또는 z, 그 속도 성분을 u_3 또는 w로 표시하도록 하자.

교란 방정식은 기본상태 (U_i, P)와 가진 상태 $(U_i+u'_i, P+p')$의 둘 모두 Navier-Stokes 식을 만족시키는 식을 고려함으로써 구할 수 있다. 교란 상태의 식에서 기본상태의 식을 빼고 편의상 교란량을 표시하던 '(prime)을 생략하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -U_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re}\nabla^2 u_i - u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

우리는 평행유동에서 미소교란을 위한 식을 고려할 것이다. 따라서 평균 유동장을 다음과 같이 $U_i = U(y)\delta_{1i}$로 잡자. 만약 이 평균 유동장의 속도를 위의 식에 대입해서 비선형항을 무시한다면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x} + vU' = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\nabla^2 u \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re}\nabla^2 v \quad (6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+U\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{Re}\nabla^2 w \quad (7)$$

그리고 연속 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad (8)$$

′(prime)은 y에 대한 미분이다. (5)-(8)에 divergence 취하고 (7)의 연속 방정식을 이용하면 교란 압력에 대한 식을 구할 수 있다.

$$\nabla^2 p=-2U\frac{\partial v}{\partial x} \quad (9)$$

식 (6)에 식 (9)를 이용하여 압력항을 제거하여 v의 교란 식을 구하면 다음과 같다.

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2 - U''\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{Re}\nabla^4\right]v=0 \quad (10)$$

3차원 유동장을 기술하기 위해서는 두번째 식으로 벽면에 직각인 와도를 구하는 것이 편리하다.

$$\eta=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x} \quad (11)$$

여기서 η는 다음을 만족시킨다.

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{Re}\nabla^2\right]\eta=-U'\frac{\partial v}{\partial z} \quad (12)$$

경계조건은 다음과 같다.

$$v=v'=\eta=0 \text{(벽, far field)}$$

여기서 교란을 다음과 같이 가정하자.

$$v(x,y,z,t)=\tilde{v}(y)e^{i(\alpha x+\beta z-\omega t)} \quad (13)$$

$$\eta(x,y,z,t)=\tilde{\eta}(y)e^{i(\alpha x+\beta z-\omega t)} \quad (14)$$

$\alpha(=2\pi/\lambda_x)$, $\beta(=2\pi/\lambda_z)$는 각각 유동방향과 횡방향(spanwise)의 파동수(wave number)이고 ω는 주파수를 나타낸다. 식 (13)과 (14)를 (10)과 (12)에 대입하면 (이는 수평방향으로 Fourier 변환을 취하는 것과 같다) $\tilde{v}$와 $\tilde{\eta}$에 대하여 다음 식을 얻을 수 있다.

$$[(-i\omega+i\alpha U)(D^2-k^2)-i\alpha U''-\frac{1}{Re}(D^2-k^2)^2]\tilde{v}=0 \quad (15)$$

$$\left[(-i\omega+i\alpha U)-\frac{1}{Re}(D^2-k^2)\right]\tilde{\eta}=-i\beta U'\tilde{v} \quad (16)$$

여기서 $k^2=\alpha^2+\beta^2$이다. 또한 $D=\frac{d}{dy}$이다. 식 (15)는 Orr-Sommerfeld식이라 하며 식 (16)은 Squire 식이라 한다.

다음과 같은 벡터량을 도입하자.

$$\begin{pmatrix}\tilde{v}\\ \tilde{\eta}\end{pmatrix}$$

이를 이용하여 Orr-Sommerfeld 식과 Squire 식을 행렬식으로 만들면 다음과 같다.

$$-i\omega\begin{bmatrix}k^2-D^2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{v}\\ \tilde{\eta}\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}L_{OS} & 0\\ i\beta U' & L_{SQ}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{v}\\ \tilde{\eta}\end{pmatrix}=0 \quad (17)$$

여기서 L_{OS}와 L_{SQ}는 다음과 같다.

$$L_{OS}=i\alpha U(k^2-D^2)+i\alpha U''+\frac{1}{Re}(k^2-D^2)^2 \quad (18)$$

$$L_{SQ}=i\alpha U+\frac{1}{Re}(k^2-D^2) \quad (19)$$

고유치 식 (17)은 다음과 같이 될 수 있다.

$$\hat{q}=\begin{pmatrix}\tilde{v}\\ \tilde{\eta}\end{pmatrix} \quad (20)$$

$$L\hat{q}=i\omega M\hat{q} \quad (21)$$

$$A\hat{q}\equiv(i\alpha M)^{-1}L\hat{q}=C\hat{q} \quad (22)$$

여기서 M, L은 다음과 같다.

$$M=\begin{bmatrix}k^2-D^2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad (23)$$

$$L=\begin{bmatrix}L_{OS} & 0\\ i\beta U' & L_{SQ}\end{bmatrix} \quad (24)$$

2.2 준안정 정의

Orr-Sommerfeld식과 Squire 식의 고유값을 수치적으로 구할 때, 안정방정식에서 작은 교란에 대한 그들의 민감도 문제를 고려할 필요가 있다. 이러한 교란의 대표적 두가지 원인은 연속적인 방정식을 차분화 함으로써 생기는 것과 컴퓨터 계산의 유한성 때문에 생기는 것이다.

이전의 연구에 의하면 Orr-Sommerfeld spectrum은 작은 교란에 매우 민감함이 밝혀졌다. 이러한 민감성은 비직교한 eigenfunction 때문이다. 비직교한 eigenfunction을 가지고 있는 계의 특성은 모든 고유값이 안정하더라도 과도상태(transient)에서 큰 성장을 할 수 있다. 이러한 가능성을 살펴 볼 수 있는 방법이 준안정 해석이다.

준안정의 정의는 다음과 같다.

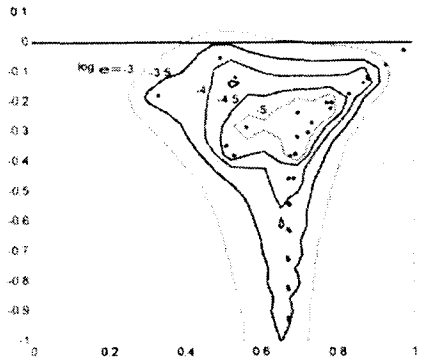

Fig. 1 Resolvent norm contours and spectrum of plane Poiseuille flow at Re=1000, α =0.84 and β=1.535(Θ=28.7°)

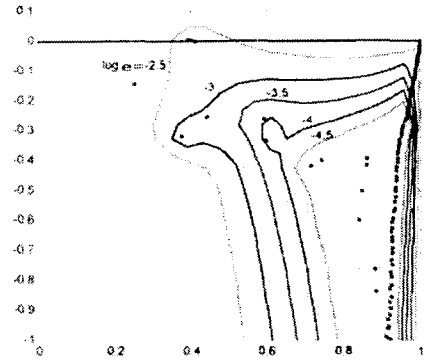

Fig. 3 Resolvent norm contours and spectrum of Blasius flow at Re=316, α=0.52 and β=0(Θ=90°)

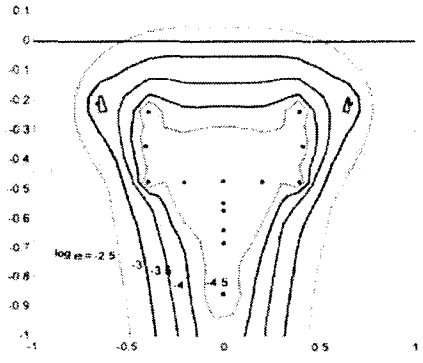

Fig. 2 Resolvent norm contours and spectrum of plane Couette flow Re=360, α=0.6 and β=1.7(Θ=19.4°)

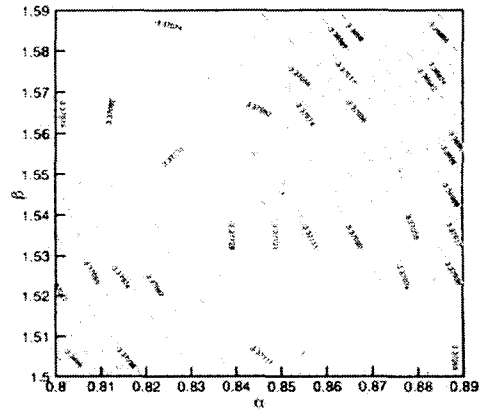

Fig. 4 The minimum value of log ε to cross X axis in plane Poiseuille flow

정의 1. 만약 z가 $\hat{A}=A+E$ 의 고유치라면 z는 A의 ε-pseudo-eigenvalue라 한다. 여기서 $\|E\|\leq\varepsilon$이다.

정의 2. 만약 z가 $\|(zI-A)^{-1}\|\geq\varepsilon^{-1}$을 만족한다면, z는 A의 ε-pseudo- eigenvalue이다

정의 1과 정의 2는 같은 것이다.[9]

3. 계산결과 및 토의

우리는 관 유동과 Blasius 유동의 안정성을 해석하기 위하여 식 (22)번을 이용하여 고유치를 구하였다. 계산된 고유치들은 Fig. 1~3에 점으로 그려졌다. 우리가 시간에 따른 안정성을 고려할 때, 위상 속도 (phase velocity) C의 허수 부분의 부호는 매우 중요하다. Ci>0 일 때, 교란 속도 v는 시간에 따라 증가하고 결국 유동은 불안정해진다.

Fig. 1~3에서 볼 수 있듯이 모든 고유치들은 안정된 영역(Ci<0)에 있다. 평행 Poiseuille 유동의 경우 Re=1000에서는 선형안정성이론에 의하면 어떠한 천이도 일어나지 않는다.[10] 그러나, Carlson 등[11]의 실험에 의하면 이 레이놀즈수에서 천이가 일어남이 밝혀졌다. 또한 평행 Couette 유동의 경우 이론적으로는 항상 안정하다. 그러나, Tillmark 등[4]의 실험에 의하면 Re=360에서 천이가 일어난다고 알려져 있다. Blasius 유동의 경우는 Re=400 부근에서 천이가 일어난다고 이론적으로 알려져 있다.[12] 이와 같

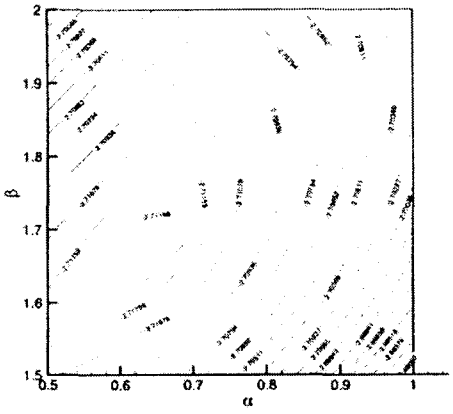

Fig. 5 The minimum value of $\log \varepsilon$ to cross X axis in plane Couette flow

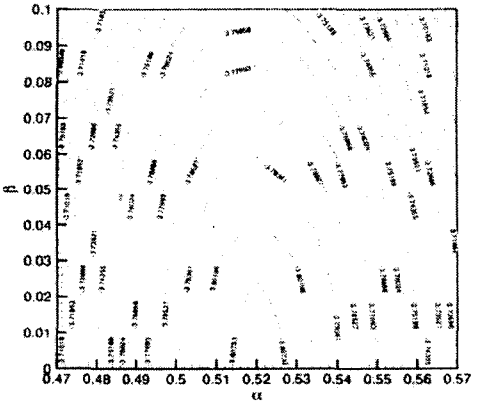

Fig. 6 The minimum value of log ε to cross X axis in Blasius flow

은 사실을 살펴볼 때, 천이가 교란에 의해서 시작됨을 알 수 있다. 그러므로, 일정한 교란하에서의 resolvent norm contour를 조사하는 것이 필요하다.

Resolvent norm은 유동에 진동수 ω의 교란이 들어갔을 때 유동의 반응을 나타낸다. Fig. 1~3의 값은 log ε이다. 여기서 ε는 시스템 A에 가해준 외부 교란 행렬의 절대값(norm)이다.

Fig. 1~3에서 볼 수 있듯이 심지어 매우 작은 교란도 고유치의 위치를 크게 바뀐다. 종종 모든 고유치가 안정된 영역에 있을 때에도 resolvent norm contour는 x축을 지날 수 있다. 이것은

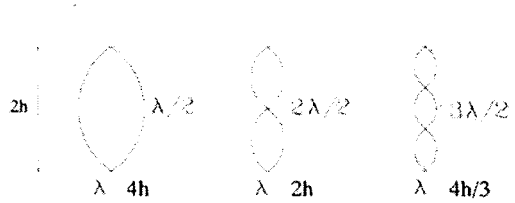

Fig. 7 Standing waves in channel flows

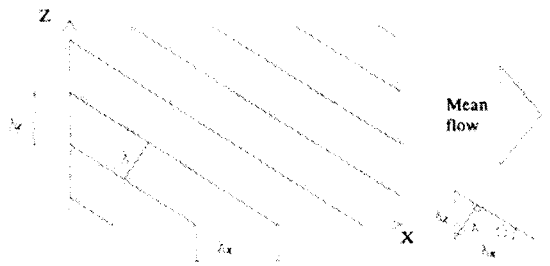

Fig. 8 Wave propagating at an angle to the mean flow U, with streamwise wavelength λx and spanwise wavelength λz

매우 작은 교란에 의해서 유동이 불안정해 질 수 있음을 의미한다.

작은 교란은 두 가지 요인에 의해서 발생한다. 연속식을 이산식으로 나타냄으로써 그리고 컴퓨터 계산시 유한 정밀성 때문에 발생한다. Fig. 4~6은 α, β의 변화에 따라 resolvent norm contour가 X축을 넘는 최소값을 나타낸 그림이다. Fig. 4에서 볼 수 있듯이 평행 Poiseuille 유동의 천이에서 가장 불안정한 교란은 α=0.84, β=1.535일 때이다. Fig. 5에서 볼 수 있듯이 평행 Couette 유동의 천이에서 가장 불안정한 교란은 α=0.6, β=1.7 일 때이다. Fig. 6에서 볼 수 있듯이 Blasius 유동에서는 가장 불안정한 교란은 α=0.052, β=0 일 때이다.

관에서 음파의 정상파를 생각해 보면, 그림 7과 같다. 파장은 $\frac{n}{2}\lambda = 2h$ 이와 같은 관계를 가진다. 따라서 기본 파장은 $\lambda_1 = 4h$이다. 우리의 계산에서 가장 불안정한 교란은, 평행 Poiseuille 유동의 경우 $\lambda_P = 3.59h$(fig. 8), 평행 Couette 유동의

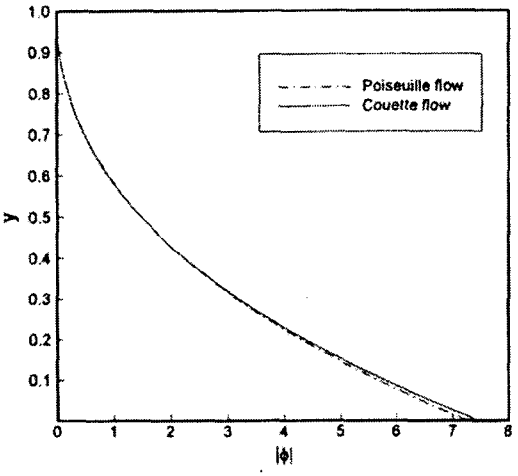

Fig. 9 Comparison of shear sheltering between Poiseuille flow and Couette flow

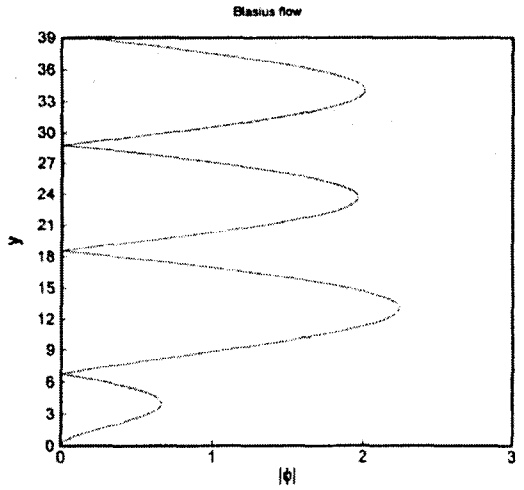

Fig. 10 Shear sheltering in Blasius flow

경우 $\lambda_C = 3.49\,h$, Blasius 유동의 경우 $\lambda_B = 3.44\,\delta_{.999}$($\delta_{.999} \approx 6$은 경계층 두께이다. boundary layer thickness). 이들값은 기본 파장과 조금의 차이가 있다. 이것은 shear sheltering[13] 이라는 현상 때문이다. Shear sheltering이란 전단응력이 존재할때 교란이 전단층 내로 들어 가는데 방해를 받는 것을 말한다.

우리의 경우 전단층이 존재하여 교란이 퍼져 나가는 길이는 원래의 길이 2h보다 작아져서 계산으로 나온 가장 불안정한 교란들의 값이 기본 파장과 차이를 보이는 것이다. Fig. 9~10은 shear sheltering의 그림으로써 식 (15)의 Orr-Sommerfeld 식에 교란이 들어 갔을 경우를 Runge-Kutta 방법을 이용하여 구하였다. 또한 평행 Poiseuille 유동의 경우는 벽면 근처에서는 전단응력이 강하나 관의 중심으로 갈수록 전단응력이 약해져서 관 전체에 응력이 일정한 Couette 유동에 비해 파장이 길어졌다. Blasius 유동의 경우도 shear sheltering이 존재하여 기본 파장과 다르게 나왔다.

이와 같은 shear sheltering을 Fig. 9~10에 나타내었다. Fig. 9에서는 교란이 0.9 부근에서 급격히 감소함을 볼 수 있다. 이것은 이곳에서 shear sheltering이 일어났고, 이것의 길이는 0.1 정도로 기본파장과 계산으로 구한 가장불안정한 파장과의 차이 대략 0.4(Poiseuille flow)인 것의 1/4인데 이것은 관내에서 벽면은 위와 아래 그리고 관내의 파는 전체파의 반 임으로 정량적으로 일치한다. 또한 그림을 확대하여 살펴 보면 벽면으로 갈수록 Couette flow의 교란이 빨리 감소한다. 이것은 계산으로 구한 가장 불안정한 파의 파장이 Couette flow가 Poiseuille flow 보다 작기 때문에 그만큼 shear sheltering이 먼저 일어나기 때문이다. Fig. 10을 보면 교란이 3부근에서 급격히 감소한다. 이것은 계산에서 구한 Blasius flow의 가장 불안정한 경우의 파장이 $3.44\delta_{.999}$ ($\delta_{.999} \approx 6$) 인데, 이것 역시 기본 파동의 파장과 $0.56\delta_{.999} \approx 3.36$의 차이와 일치함을 볼 수 있다.

4. 결 론

우리는 이번 연구를 통하여 관 유동과 Blasius 유동에서 가장 불안정한 교란을 구하였고, 이러한 가장 불안정한 교란은 기본 파장과 관계가 있으나 약간의 차이가 생김을 보았다. 이것은 shear sheltering에 의해서 교란이 전파되는 경로가 좁아졌기 때문임을 알 수 있었다.

후 기

본 연구는 국가지정연구실(NC21531)의 지원을 받아 수행되었습니다.

참고문헌

(1) Orszab, S. A. and Petera, A. T., 1983, "Secondary Instability of Wall-Bounded Shear Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 128, pp. 347~385.

(2) Herbert, T., 1988, "Secondary Instability of Boundary Layer," *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 20, pp. 487~526.

(3) Klingmann, B. G. B., 1992 "On Transition Due to Three-Dimensional Disturbances in Plane Poiseuille Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 240, pp. 167~195.

(4) Reddy, S. C., Schmid, P. J., Baggett, Jeffrey S. and Henningson, D. S., 1998, "On Stability of Streawise Streaks and Transition Thresholds in Plane Channel Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 365, pp. 269~303.

(5) Tillmark, N and Alfredsson, P. H., 1992, "Experiments on Transition in Plane Couette Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 235, pp. 89~102.

(6) Schmid, P. J. and Henningson, D. S., 1992, "A New Mechanism for Rapid Transition Involving a Pair of Oblique Waves," *Phys. Fluids*, A 4, pp. 1986~1989.

(7) Elofsson, P. A. and Alfredsson, P. H., 1995, "Experiments on Nonlinear Interaction Between Oblique Tollmien-Schlichting Waves." *In Laminar-Turbulent Transition* (ed. R. Kobayashi), Springer.

(8) Berlin, S. , Lundbladh, A. and Henningson, D. S., 1994, "Spatial Simulations of Oblique Transition." ,*Phys. Fluids*, A 6, pp. 1949~1951.

(9) Reddy, S. C., and Henningson, D. S., 1993, "Energygrowth in Viscous Channel Flows," *J. Fluid Mech.*, Vol. 252, pp. 209~238.

(10) Schmid, P. J. and Henningson, D. S., 2001, "Stability and Transition in Shear Flows," Springer.

(11) Carlson, D. R., Widnall, S. E. and Peters, M. F., 1982, "A Flow-Visualization study of transition in Plane Poiseuille Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 121, pp. 487~505.

(12) Saric, W. S. and Nayfeh, A. H., 1975, "Nonparallel Sability of Boundary-Layer Flows," *Physics of Fluids*, Vol. 18, No. 8, pp. 945~950.

(13) Jacobs, R. G. and Durbin, P. A., 1998, "Shear Sheltering and the Continuous Spectrum of the Orr-Sommerfeld Equation," *Physics of Fluids*, Vol. 10, No. 8, pp. 2006~2011.