

시간적분형 운동방정식에 근거한 동점탄성 문제의 응력해석

심우진[†] · 이성희^{*}

(2003년 3월 24일 접수, 2003년 7월 11일 심사완료)

Transient Linear Viscoelastic Stress Analysis Based on the Equations of Motion in Time Integral

Woo-Jin Sim and Sung-Hee Lee

Key Words: Dynamic Viscoelasticity(동점탄성), Convolution Integral(합성적분), Relaxation Function(이완함수), Finite Element(유한요소)

Abstract

In this paper, the finite element equations for the transient linear viscoelastic stress analysis are presented in time domain, whose variational formulation is derived by using the Galerkin's method based on the equations of motion in time integral. Since the inertia terms are not included in the variational formulation, the time integration schemes such as the Newmark's method widely used in the classical dynamic analysis based on the equations of motion in time differential are not required in the development of that formulation, resulting in a computationally simple and stable numerical algorithm. The viscoelastic material is assumed to behave as a standard linear solid in shear and an elastic solid in dilatation. To show the validity of the presented method, two numerical examples are solved under plane strain and plane stress conditions and good results are obtained.

1. 서론

동탄성이나 동점탄성 문제의 지배방정식들은 운동방정식, 변형률-변위 관계식, 그리고 응력-변형률 관계식으로 구성되는데, 응력-변형률 관계식(물성방정식)만이 다르고 나머지 관계식들은 동일하다. 그러므로, 동점탄성 문제의 해석에 있어서 동탄성 수치해법^(1~4)을 적용할 수가 있다.

점탄성 재료로 만들어진 연속체나 구조물의 동적 해석을 위한 변분원리에 관해서는 Leitman⁽⁵⁾과 Oden and Reddy⁽⁶⁾가 있으며, 단순한 형태의 동점

탄성 문제의 이론적 해석에 관해서는 Christensen,⁽⁷⁾ Flugge,⁽⁸⁾ 그리고 Haddad⁽⁹⁾를 참조한다. 동점탄성 문제의 수치적 해석에는 유한요소법^(10~15)과 경계요소법^(16~20)이 사용되고 있으며, 이 외에도 여러 가지 해석법^(21~23)이 있다.

저자들은 최근에 발표된 동탄성 문제의 해법에 관한 논문(Sim and Lee^(24,25))에서 시간에 관한 미분형 운동방정식 대신에 가속도를 포함하지 않는 적분형 운동방정식을 바탕으로 한 유한요소해법을 제시하였다. 본 논문은 이에 대한 응용의 연장으로서 적분형 운동방정식을 바탕으로 한 동점탄성 문제의 시간영역에서의 유한요소해법에 대하여 서술한다.

동점탄성 문제의 해석의 경우에 점탄성 모델에 대한 가정으로서, 프와송비가 일정하다거나, 2요소로 표현되는 맥스웰이나 켈빈 모델, 혹은 소수

[†] 책임저자, 회원, 금요공과대학교

E-mail : wjsim@knut.kumoh.ac.kr

TEL : (054)467-4224/4221 FAX : (054)467-4221

^{*} 금요공과대학교 생산기술연구소

지수형 도함수 모델^(19,21)을 사용하는데 반하여, 본 논문에서는 유한요소경식화 과정에 있어서, 점수압 변형시 탄성의 성질을 갖고, 전단 변형시에는 표준선형고체처럼 거동하는 점탄성 모델을 사용한다. 유한요소방정식은 최근 논문에서처럼 적분형 운동방정식에 근거한 변분식을 만들고, 종속함수의 시간축에 따른 분포에 대한 가정을 한 후에, 시간과 공간에 대한 적분을 통해 유도된다. 이때 시간축상의 적분은 안정적인 수치결과를 얻기 위해서 종속함수가 등분된 시간축상에서 일정하게 변한다는 가정을 사용하였다.

동점탄성 해석을 위한 유한요소방정식은 정적인 점탄성 해석을 위한 유한요소방정식⁽²⁰⁾과 유사하나 비선형적인 강성행렬과 질량행렬이 포함되어 전체 해석과정이 다소 복잡해지고, 계산시간도 많이 소요된다.

동점탄성 2, 3차원 문제의 경우에 특별한 경우 몇몇을 제외하고는 이론해가 거의 존재하지 않는다. 그리고 해가 물성에 따라 변하므로 비교할 해를 찾는 일이 쉽지가 않다. 본 논문에서는 제시된 유한요소방정식의 타당성을 보이기 위하여 해석된 수치결과를 1차원 문제의 경우에는 기존의 타 수치결과와 비교하였으며, 2차원 문제의 경우에는 비교할 해가 존재하지 않으므로 동탄성해를 근거로 비교 설명한다.

2. 동점탄성 유한요소방정식

선형 과도 동점탄성 문제의 지배방정식은 응력-변형률 관계식이 합성적분으로 표현되는 것을 제외하고, 선형 과도 동탄성 문제의 지배식과 유사하다:

i) 운동방정식

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) + \rho f_i(\mathbf{x}, t) = \rho \dot{u}_i(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

여기서, σ_{ij} 는 응력, $\sigma_{ij} \equiv \partial \sigma_{ij} / \partial x_j$ 는 공간변수에 관한 편미분, ρ 는 질량밀도, ρf_i 는 체적력, u_i 는 변위, \mathbf{x} 는 위치벡터, $\dot{u}_i \equiv \partial^2 u / \partial t^2$ 는 가속도, 그리고 t 는 시간이다.

ii) 변형률-변위 관계식

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \{ u_{i,j}(\mathbf{x}, t) + u_{j,i}(\mathbf{x}, t) \} \quad (2)$$

여기서, ϵ_{ij} 는 미소변형 가정에 따른 변형률이다.

iii) 응력-변형률 관계식

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) &= D_{ijkl}(t) * d\epsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) \\ &= \int_0^t D_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{kl}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (3a) \\ &= \epsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) * dD_{ijkl}(t) \quad (3b) \end{aligned}$$

여기서, D_{ijkl} 은 점탄성 이완함수(물성함수)이며, $t < 0$ 에서 $u_i(\mathbf{x}, t) = \epsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = 0$ 의 조건을 갖는다. 그리고 *는 합성적분(Stieltjes convolution)⁽⁷⁻⁹⁾ 기호이다.

위와 같은 지배방정식들을 풀기 위한 경계조건 및 초기조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, t) &= \hat{u}_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \Gamma_u \\ t_i(\mathbf{x}, t) &= \hat{t}_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \Gamma_t \\ u_i(\mathbf{x}, t) &= d_i(\mathbf{x}) \quad \text{at } t=0 \\ \dot{u}_i(\mathbf{x}, t) &= v_i(\mathbf{x}) \quad \text{at } t=0 \quad (4) \end{aligned}$$

여기서, t_i 는 표면력으로서 단위외향벡터가 n_j 인 물체표면($\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t$)에서 $t_i \equiv \sigma_{ij} n_j$ 의 관계를 가지며, \hat{u}_i 와 \hat{t}_i 는 물체표면에서 변위와 표면력에 관해 알려진 함수이고, d_i 와 v_i 는 초기 변위와 속도로서 주어진 함수이다.

Gurtin⁽²⁷⁾은 시간적분형 동탄성 운동방정식이 극값으로 얻어지는 동탄성 범함수를 유도하였으며, Leitman⁽⁸⁾은 이 이론을 확대시켜서 시간적분형 동점탄성 운동방정식이 극값이 되는 동점탄성 범함수를 유도하였다.

본 논문에서는, 이전의 동탄성 해석^(24,25)에서처럼, 가속도를 포함하는 시간미분형 동점탄성 운동방정식에 라플라스 변환을 적용하고 간단한 수학적 연산과 역변환을 취하여, 다음과 같은 가속도 항이 제거된 시간적분형 동점탄성 운동방정식을 바탕으로 수치해석을 전개한다.

$$g * \sigma_{ij} + g * \rho f_i - \rho \{ -tv_i - d_i + u_i \} = 0 \quad (5)$$

여기서, $g = g(t) = t$ 이다.

식 (5)에 변분을 곱하고 영역적분한 후 부분적분을 하고 정리하면(겔러킨 방법), 다음과 같은 변분식이 얻어진다(체적력 무시).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g * \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \rho u_i \delta u_i d\Omega = \\ \int_{\Gamma} g * t_i \delta u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \rho (tv_i + d_i) \delta u_i d\Omega \quad (6) \end{aligned}$$

식 (6)을 이산 전개하기 위해서 종속함수인 변

위를 변수가 분리된, 즉, 시간함수와 공간함수의 곱의 급수로 가정한다. 이때 시간함수는 각 시간구간에서 일정하거나, 선형적으로, 혹은 그 이상의 차수의 식으로 가정할 수가 있다. 본 논문에서는 시간축을 등간격(시간증분 Δt)으로 나누고, 안정적인 수치결과를 얻기 위해서 각 시간구간에서 종속함수가 일정하다고 가정하였다.^(24,25)

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^N \Phi_n(t) u_i^n(\mathbf{x}) \quad 0 < t \leq t_N \quad (7)$$

여기서, $\Phi_n(t)$ 는 전 시간축상의 시간절점에 관한 내삽함수로서 구간 $t_{n-1} \leq t \leq t_n$ 에서는 1, 그리고 나머지 구간에서는 0이다. 그리고, 임의의 시간절점은 $t_n = n\Delta t$ 로 정의되며, 현재시각은 $t_N = N\Delta t$ 이다. $u_i^n(\mathbf{x})$ 는 시간절점 n 이 속하는 시간구간 $t_{n-1} \leq t \leq t_n$ 에서의 종속함수이다.

식 (6)의 첫째 항에 식 (3a)를 대입하면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} g^*(D_{ijk} * d\epsilon_{kl}) \delta \epsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \rho u_i \delta u_i d\Omega = \int_{\Gamma} g^* t_i \delta u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \rho (t v_i + d_i) \delta u_i d\Omega \quad (8)$$

합성적분의 교환법칙을 이용해서 식 (8)의 첫째 항을 다음처럼 표기한다.

$$\int_{\Omega} E_{ijk} * d\epsilon_{kl} \delta \epsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \rho u_i \delta u_i d\Omega = \int_{\Gamma} g^* t_i \delta u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \rho (t v_i + d_i) \delta u_i d\Omega \quad (9)$$

여기서,

$$E_{ijk}(t) = g(t) * D_{ijk}(t) \quad (10)$$

식 (9)의 첫째 항에 나타나는 $E_{ijk}(t)$ 는 정적인 점탄성 해석⁽²⁶⁾에서는 이완함수 $D_{ijk}(t)$, 탄성문제에서는 탄성행렬 $[D]$ 와 유사하다. 그런데 이완함수 $D_{ijk}(t)$ 의 행렬은 지수함수(3.1절 참조)로만 구성되어 있는데 반하여, $E_{ijk}(t)$ 의 요소들은 식 (10)에서 보듯이 $g(t)$, 즉, t 와 지수함수의 곱으로 구성되어 비선형적 특성이 증가하게 된다. 그러므로, 강성행렬의 수치계산시에 많은 시간이 걸리는 요인이 된다.

식 (9)의 첫째 항의 유전적분은 부분적분을 통해서 다음처럼 변화된다.

$$E_{ijk}(t) * d\epsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) = \int_{0^+}^t E_{ijk}(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{kl}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (11a)$$

$$= E_{ijk}(0) \epsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) - \int_{0^+}^t \epsilon_{kl}(\mathbf{x}, \tau) \frac{dE_{ijk}(t-\tau)}{d\tau} d\tau \quad (11b)$$

$\epsilon_{kl}(\mathbf{x}, t)$ 가 시간구간에서 일정하다면 식 (11a)에서 미분항이 0이 되므로, 식 (11b)의 결과를 이용하는 것이 유리하다. 물론, 시간구간에서 선형적이라면 어느 쪽을 사용해도 문제가 없다. 한편, 변형률도 다음과 같이 근사적으로 가정할 수 있다. 즉,

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^N \Phi_n(t) \epsilon_{ij}^n(\mathbf{x}) \quad (12)$$

여기서, $\epsilon_{ij}^n(\mathbf{x})$ 는 $t_{n-1} \leq t \leq t_n$ 구간에서의 변형률이다. 식 (12)를 식 (11b)의 둘째 항에 대입하고 전개하면 다음처럼 된다. 이하 전개에서 $E_{ijk} = E$ 로 약해서 표기한다.

$$\begin{aligned} & - \int_{0^+}^t \epsilon_{kl}(\tau) \frac{dE(t-\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= - \int_{0^+}^t \sum_{n=1}^N \Phi_n(\tau) \epsilon_{kl}^n(\mathbf{x}) \frac{dE(t-\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= - \sum_{n=1}^N \int_{0^+}^t \Phi_n(\tau) \frac{dE(t-\tau)}{d\tau} d\tau \epsilon_{kl}^n(\mathbf{x}) \\ &= - \sum_{n=1}^N \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \frac{dE(t-\tau)}{d\tau} d\tau \epsilon_{kl}^n(\mathbf{x}) \\ &= - \sum_{n=1}^N [E(t-\tau)]_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \epsilon_{kl}^n(\mathbf{x}) \\ &= - \sum_{n=1}^N [E(t-n\Delta t) - E(t-(n-1)\Delta t)] \epsilon_{kl}^n(\mathbf{x}) \\ &= - \sum_{n=1}^N [E\{(N-n)\Delta t\} - E\{(N-(n-1))\Delta t\}] \\ & \quad \epsilon_{kl}^n(\mathbf{x}) \\ &= - \sum_{n=1}^N C_{ijk}(n\Delta t) \epsilon_{kl}^n(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서,

$$C_{ijk}(n\Delta t) = E\{(N-n)\Delta t\} - E\{(N-(n-1))\Delta t\}$$

식 (13)을 식 (11b)에 대입시키고 정리하면,

$$\begin{aligned} E_{ijk}(t) * d\epsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) &= \\ & E_{ijk}(0) \epsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) - \sum_{n=1}^{N-1} C_{ijk}(n\Delta t) \epsilon_{kl}^n(\mathbf{x}) \\ & - [E_{ijk}(0) - E_{ijk}(\Delta t)] \epsilon_{kl}^N(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$= - \sum_{n=1}^{N-1} C_{ijk}(n\Delta t) \epsilon_{ki}^n(\mathbf{x}) + E_{ijk}(\Delta t) \epsilon_{ki}^N(\mathbf{x}) \quad (14)$$

식 (14)의 유도에 있어서, $\epsilon_{ki}(\mathbf{x}, t) = \epsilon_{ki}^N(\mathbf{x})$ 의 관계가 사용되었다. 식 (14)를 식 (9)의 첫항에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} E_{ijk}(\Delta t) \epsilon_{ki}^N(\mathbf{x}) \delta \epsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \rho u_i \delta u_i d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \mathbf{g}^* \cdot \mathbf{t}_i \delta u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \rho (t v_i + d_i) \delta u_i d\Omega + \\ & \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\Omega} C_{ijk}(n\Delta t) \epsilon_{ki}^n(\mathbf{x}) \delta \epsilon_{ij} d\Omega \quad (15) \end{aligned}$$

식 (15)의 등식 우측의 첫째 항, 즉, 표면력 적분식은 주어진 하중조건에 따라 계산되는데, 힘이 초기에 가해지고 일정하게 유지될 경우를 예를 들어 계산하면 다음과 같다. 즉,

$$\int_{\Gamma} \mathbf{g}^* \cdot \mathbf{t}_i \delta u_i d\Gamma = \frac{f^2}{2} \int_{\Gamma} \hat{t}_i(\mathbf{x}) \delta u_i d\Gamma \quad (16)$$

여기서, $t_i(\mathbf{x}, t) = \hat{t}_i(\mathbf{x}) H(t)$, $H(t)$ 는 단위계단함수이다.

식 (16)을 식 (15)에 대입하고, 식 (15) 전체를 행렬식을 이용해서 표기하면 다음처럼 된다.

$$\begin{aligned} & \int [B]^T [E(\Delta t)] [B] d\Omega \{u_i\}^N + \\ & \int_{\Omega} \rho [N]^T [N] d\Omega \{u_i\}^N = \\ & \frac{f^2}{2} \int_{\Gamma} [N]^T \{ \hat{t}_i(\mathbf{x}) \} d\Gamma + \\ & \int_{\Omega} [M]^T \rho (t v_i + d_i) d\Omega + \\ & \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\Omega} [B]^T [C(n\Delta t)] [B] d\Omega \{u_i\}^n \quad (17) \end{aligned}$$

식 (17)의 유도에 있어서, 다음의 관계식이 사용되었다.

$$\begin{aligned} \delta u_i(\mathbf{x}, t) &= [M]^T \{ \delta u_i \}^N, \\ \delta \epsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) &= [B]^T \{ \delta u_i \}^N \quad (18) \end{aligned}$$

여기서, $\{ \delta u_i \}^N$ 은 $t = t_N$ 에서 임의의 절점의 가상변위이며, $[M]$ 은 형상함수 행렬, $[B]$ 는 변형률-변위행렬, $[C(n\Delta t)] = [C_{ijk}(n\Delta t)]$ 와 $[E(\Delta t)] = [E_{ijk}(\Delta t)]$ 는 앞으로 유도될 물성행렬들이다.

식 (10)으로부터,

$$\begin{aligned} E_{ijk}(t) &= \mathbf{g}(t) * D_{ijk}(t) \\ &= \int_0^t \mathbf{g}(t-\tau) D_{ijk}(\tau) d\tau = \int_0^t (t-\tau) D_{ijk}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= [(t-\tau) \bar{D}_{ijk}(\tau)]_0^t - \int_0^t (-1) \bar{D}_{ijk}(\tau) d\tau \\ &= -t \bar{D}_{ijk}(0) + [\bar{D}_{ijk}(\tau)]_0^t \\ &= -t \bar{D}_{ijk}(0) + \bar{D}_{ijk}(t) - \bar{D}_{ijk}(0) \quad (19) \end{aligned}$$

여기서,

$$\bar{D}_{ijk}(t) = \int_0^t D_{ijk}(\tau) d\tau, \quad (20)$$

$$\bar{\bar{D}}_{ijk}(t) = \int_0^t \bar{D}_{ijk}(\tau) d\tau \quad (21)$$

3. 응력 계산

수치계산을 위하여 정수압 변형시 탄성의 성질을 갖고, 전단 변형시에는 3요소로 표현되는 표준선형고체(standard linear solid) 모델의 거동 특성을 지닌 점탄성 재료를 택한다. 즉,

$$\begin{aligned} G(t) &= G_0(\alpha + (1-\alpha)e^{-\lambda t}) \\ K(t) &= K_0 \quad (22) \end{aligned}$$

여기서, $G(t)$, $K(t)$ 는 전단과 정수압 변형에 관한 이완함수이며, G_0 , K_0 , α , λ 는 상수들이다.

3.1 점탄성 물성행렬 $[D(t)]$ 와 $[\bar{D}(t)]$

등방성, 선형 점탄성 재료의 평면응력의 경우에 대한 점탄성 이완행렬 $[D(t)]$ 는 다음과 같다.⁽²⁶⁾

$$[D(t)] = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) & 0 \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & d_{33}(t) \end{bmatrix} \quad (23)$$

여기서,

$$\begin{aligned} d_{11}(t) &= d_{22}(t) = p_1 + p_2 e^{-\gamma_1 t} + p_3 e^{-\gamma_2 t} \\ d_{12}(t) &= d_{21}(t) = q_1 + q_2 e^{-\gamma_1 t} + q_3 e^{-\gamma_2 t} \\ d_{33}(t) &= w_1 + w_2 e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

그리고 계수들 p_1 , p_2 , p_3 , q_1 , q_2 , q_3 , w_1 및 w_2 는 부록을 참조한다.

식 (20)은 식 (23)의 성분들을 정적분하여 구할 수 있으며, $[\bar{D}(t)]$ 행렬은 다음처럼 계산된다.

$$[\bar{D}(t)] = \begin{bmatrix} \bar{d}_{11}(t) & \bar{d}_{12}(t) & 0 \\ \bar{d}_{21}(t) & \bar{d}_{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{d}_{33}(t) \end{bmatrix} \quad (24)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \overline{d_{11}}(t) &= \overline{d_{22}}(t) = \int_0^t \{p_1 + p_2 e^{-\gamma_1 t} + p_3 e^{-\gamma_2 t}\} dt \\ &= \left(\frac{p_2}{\gamma_1} + \frac{p_3}{\gamma_2}\right) + p_1 t - \left(\frac{p_2}{\gamma_1} e^{-\gamma_1 t} + \frac{p_3}{\gamma_2} e^{-\gamma_2 t}\right) \end{aligned}$$

마찬가지로,

$$\begin{aligned} \overline{d_{12}}(t) &= \overline{d_{21}}(t) = \left(\frac{q_2}{\gamma_1} + \frac{q_3}{\gamma_2}\right) + q_1 t - \left(\frac{q_2}{\gamma_1} e^{-\gamma_1 t} + \frac{q_3}{\gamma_2} e^{-\gamma_2 t}\right) \\ \overline{d_{33}}(t) &= \frac{w_2}{\lambda} + w_1 t - \frac{w_2}{\lambda} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

식 (24)를 한번 더 적분하면 $[\overline{D}(t)]$ 가 된다.

$$[\overline{D}(t)] = \begin{bmatrix} \overline{d_{11}}(t) & \overline{d_{12}}(t) & 0 \\ \overline{d_{21}}(t) & \overline{d_{22}}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \overline{d_{33}}(t) \end{bmatrix} \quad (25)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \overline{d_{11}}(t) &= \overline{d_{22}}(t) = -\left(\frac{p_2}{\gamma_1^2} + \frac{p_3}{\gamma_2^2}\right) + \left(\frac{p_2}{\gamma_1} + \frac{p_3}{\gamma_2}\right)t + \frac{p_1}{2} t^2 \\ &\quad + \left(\frac{p_2}{\gamma_1} e^{-\gamma_1 t} + \frac{p_3}{\gamma_2} e^{-\gamma_2 t}\right) \\ \overline{d_{12}}(t) &= \overline{d_{21}}(t) = -\left(\frac{q_2}{\gamma_1^2} + \frac{q_3}{\gamma_2^2}\right) + \left(\frac{q_2}{\gamma_1} + \frac{q_3}{\gamma_2}\right)t + \frac{q_1}{2} t^2 \\ &\quad + \left(\frac{q_2}{\gamma_1} e^{-\gamma_1 t} + \frac{q_3}{\gamma_2} e^{-\gamma_2 t}\right) \\ \overline{d_{33}}(t) &= -\frac{w_2}{\lambda^2} + \frac{w_2}{\lambda} t + \frac{w_1}{2} t^2 + \frac{w_2}{\lambda^2} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

식 (24)와 (25)로부터,

$$\therefore [\overline{D}(0)] = [\overline{D}(0)] = 0 \quad (26)$$

그러므로, 식 (26)을 식 (19)에 대입하면,

$$\therefore E_{ijk}(t) = \overline{D}_{ijk}(t) \quad (27)$$

이 됨을 알 수가 있다. 한편, $E_{ijk}(\Delta t)$ 는 식 (27)에서 t 대신 Δt 를 대입함으로써 구해진다. 이와 같은 결과들을 바탕으로 식 (13)의 $C_{ijk}(n\Delta t)$ 행

렬을 계산하면 다음과 같다.

$$[C(n\Delta t)] = \begin{bmatrix} c_{11}(n\Delta t) & c_{12}(n\Delta t) & 0 \\ c_{21}(n\Delta t) & c_{22}(n\Delta t) & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}(n\Delta t) \end{bmatrix} \quad (28)$$

여기서,

$$\begin{aligned} c_{11}(n\Delta t) &= c_{22}(n\Delta t) = -\left(\frac{p_2}{\gamma_1} + \frac{p_3}{\gamma_2}\right)\Delta t \\ &\quad - \frac{p_1}{2}(2N-2n+1)(\Delta t)^2 \\ &\quad + \frac{p_2}{\gamma_1} e^{-\gamma_1(N-n)\Delta t}(1-e^{-\gamma_1 \Delta t}) \\ &\quad + \frac{p_3}{\gamma_2} e^{-\gamma_2(N-n)\Delta t}(1-e^{-\gamma_2 \Delta t}) \\ c_{12}(n\Delta t) &= c_{21}(n\Delta t) = -\left(\frac{q_2}{\gamma_1} + \frac{q_3}{\gamma_2}\right)\Delta t \\ &\quad - \frac{q_1}{2}(2N-2n+1)(\Delta t)^2 \\ &\quad + \frac{q_2}{\gamma_1} e^{-\gamma_1(N-n)\Delta t}(1-e^{-\gamma_1 \Delta t}) \\ &\quad + \frac{q_3}{\gamma_2} e^{-\gamma_2(N-n)\Delta t}(1-e^{-\gamma_2 \Delta t}) \\ c_{33}(n\Delta t) &= -\frac{w_2}{\lambda} \Delta t \\ &\quad - \frac{w_1}{2}(2N-2n+1)(\Delta t)^2 \\ &\quad + \frac{w_2}{\lambda^2} e^{-\lambda(N-n)\Delta t}(1-e^{-\lambda \Delta t}) \end{aligned}$$

한편, 평면변형률의 경우에 대한 점탄성 이완행렬 $[D(t)]$ 도 식 (23)처럼 표현되나, 그 요소들은 다음과 같이 정의되며 관련 계수들 $p_4, p_5, p_6, q_4, q_5, q_6, w_1$ 및 w_2 는 부록을 참조한다.

$$\begin{aligned} d_{11}(t) &= d_{22}(t) = p_4 + p_5 e^{-\xi_1 t} + p_6 e^{-\xi_2 t} \\ d_{12}(t) &= d_{21}(t) = q_4 + q_5 e^{-\xi_1 t} + q_6 e^{-\xi_2 t} \\ d_{33}(t) &= w_1 + w_2 e^{-\lambda t} \end{aligned} \quad (29)$$

3.2 응력 계산

응력 계산은 식 (3a)나 (3b)를 이용해서 구할 수 있으며, 여기서는 후자를 사용한다.

$$\begin{aligned} \{\sigma(\mathbf{x}, t)\}^T &= \int_0^t \{\varepsilon(\mathbf{x}, t-\tau)\}^T \frac{d}{d\tau} [D(\tau)]^T d\tau \\ &= \{\varepsilon(\mathbf{x}, t)\}^T [D(0)]^T - \\ &\quad \int_0^t \{\varepsilon(\mathbf{x}, \tau)\}^T \frac{d}{d\tau} [D(t-\tau)]^T d\tau \end{aligned} \quad (30)$$

식 (30)은 식 (3)의 행렬식 표현으로 상점자 T 는 선치행렬을 의미한다.

식 (12)에서처럼, 각 시간구간에서 변형률이 일정하다고 가정할 경우에 그 변형률은 다음처럼 행렬식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \{\varepsilon(\mathbf{x}, t)\} &= \sum_{n=1}^N \Phi_n(t) \{\varepsilon_n^0(\mathbf{x})\} \\ &= \sum_{n=1}^N \Phi_n(t) \{\varepsilon(\mathbf{x}, n\Delta t)\} \end{aligned} \quad (31)$$

식 (31)을 식 (30)에 대입하여 정리하면,

$$\begin{aligned} \{\sigma(\mathbf{x}, t)\}^T &= \{\varepsilon(\mathbf{x}, t)\}^T [D(0)]^T - \\ &\quad \sum_{n=1}^N \{\varepsilon(\mathbf{x}, n\Delta t)\}^T \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \frac{d}{d\tau} [D(t-\tau)]^T d\tau \\ &= \{\varepsilon(\mathbf{x}, t)\}^T [D(0)]^T - \sum_{n=1}^N \{\varepsilon(\mathbf{x}, n\Delta t)\}^T \\ &\quad [D((N-n)\Delta t) - D((N-n+1)\Delta t)]^T \end{aligned} \quad (32)$$

식 (32)에서 \sum 기호는 $n=1$ 부터 N 항까지의 합을 취한다는 점이 식 (17)과 구별이 된다.

4. 수치 예제

본 논문의 동점탄성 해석에서 사용된 표준선형 고체 모델은 Fig. 1에서처럼 점성 (η) 및 스프링 (G_0, R) 요소로 구성된다. 그리고 모델의 거동은 응력-변형률 관계식으로 표현되는데, 식 (3)처럼 적분형이나 다음과 같은 미분형⁽⁸⁾으로 나타낼 수 있다.

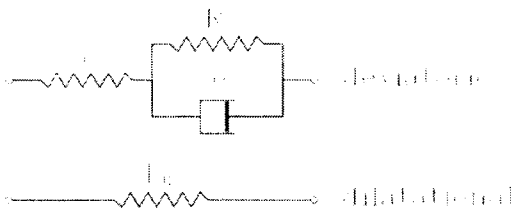


Fig. 1 Standard linear solid model

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon} \quad (33)$$

여기서, $p_1 = \eta / (G_0 + R)$, $q_0 = G_0 R / (G_0 + R)$, 그리고 $q_1 = G_0 \eta / (G_0 + R)$ 이다.

식 (33)과 식 (22)의 전단이완함수의 계수들 사이에는 다음과 같은 상관 관계를 갖는다.

$$\begin{aligned} G_0 &= q_1 / p_1, \quad a = q_0 p_1 / q_1 = R / (G_0 + R), \\ \lambda &= t_R^{-1} = p_1^{-1} = (G_0 + R) / \eta \end{aligned} \quad (34)$$

여기서, a 는 후기탄성계수(asymptotic modulus)와 초기탄성계수(impact modulus) 사이의 비이며, λ 는 전단이완시간 t_R 의 역수이다. 그리고 수치해석에서 사용될 물성 데이터들은 로켓트의 추진에 사용되는 불활성 고체원료와 유사하며 다음과 같다.⁽¹²⁾

$$\begin{aligned} \rho &= 1.8 \times 10^{-5} \text{ Nsec}^2/\text{cm}^4 \\ G_0 &= 1.275 \times 10^5 \text{ N/cm}^2 \\ K_0 &= 2.35 \times 10^5 \text{ N/cm}^2 \\ a &= 0.098, \quad \lambda = 1 \times 10^6 \text{ sec}^{-1} \\ \eta &= 0.1413 \text{ Nsec/cm}^2 \\ R &= 1.386 \times 10^4 \text{ N/cm}^2 \\ c &= 1.5 \times 10^5 \text{ cm/sec} \end{aligned}$$

여기서, c 는 종파속도이다.

4.1 균일한 충격하중을 받는 반-무한 점탄성체 등방성, 선형, 반-무한 점탄성체가 Fig. 2(a)에서처럼 표면에서 균일한 충격하중 $\sigma_0 H(t)$ 를 받고 있다. 변위와 응력을 해석하기 위한 유한요소모델과 경계조건은 Fig. 2(b)처럼 평면변형률 모델

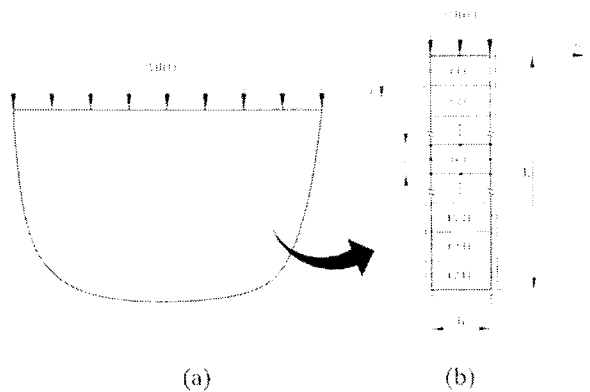


Fig. 2 (a) Viscoelastic half-space subject to a uniform impact load (b) Finite element model

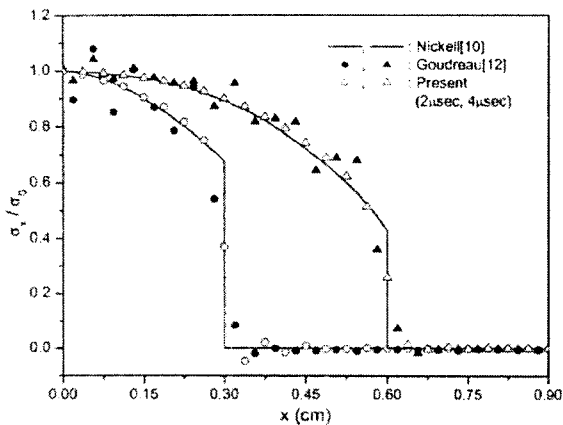


Fig. 3 σ_x variation at $t=2, 4\mu\text{sec}$

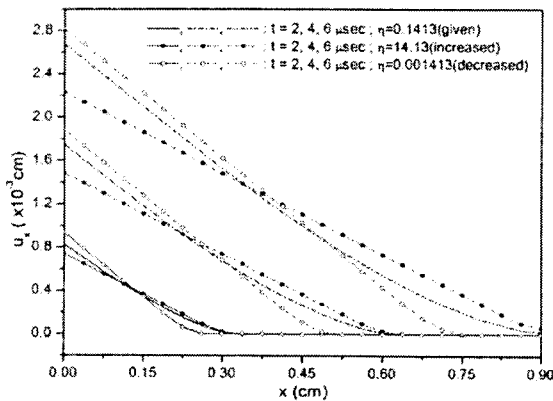


Fig. 4 Effects of viscosity on u_x due to the time variation

로 가정하였다, 여기서 길이(L)와 폭(h)의 비는 9:1이다.

Nickell^(10,11)은 이 문제에 대한 라플라스 영역에서의 변환해를 시간영역으로 역변환시켜서 이론해에 가까운 해석적 결과를 얻었다. 한편 Goudreau⁽¹²⁾는 미분형과 적분형 운동방정식에 기초한 점탄성 문제의 유한요소해법들을 소개하였다. 그러나 후 해법의 경우 변분식의 시간축 적분에 있어서, Newmark^(1,2) 방법과 유사한 전향적 시간적분법을 제시했으며 실제로 예제 해석에 적용하지는 않았다.

Fig. 3에는 시간이 $t=2, 4\mu\text{sec}$ 만큼 경과한 후, 점탄성체의 길이 방향으로 24개의 유한요소를 사용하여 해석한 종방향 응력(σ_x)의 계산 결과를 Nickell과 Goudreau의 결과들과 함께 비교 도시하였는데, 본 논문의 결과가 전자의 해와 잘 일치함을 알 수 있다. 참고로, 12개의 유한요소를 사용하여 수치계산을 해 보았었는데, 변위 결과는 거의 같았으나, 응력 결과에 있어서 24개의 유한

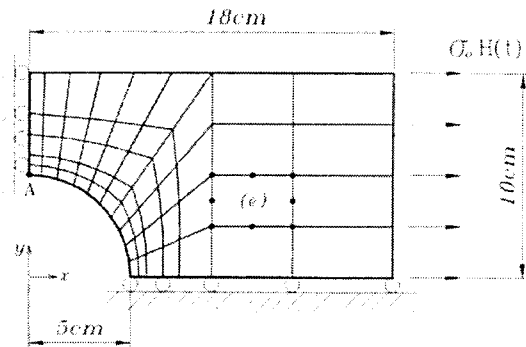


Fig. 5 Finite element model for the viscoelastic plate with a circular hole

요소를 사용한 수치결과가 종파의 선단에서의 불연속성을 더 잘 묘사함을 보였다.

Fig. 4에는 $t=2, 4, 6\mu\text{sec}$ 에서 점성(η)이 변위 분포에 미치는 영향을 도시하였는데, 점성을 아주 작게 하면 이완시간이 짧아서 바로 후기탄성변형률에 도달하고, 전체적인 강성이 떨어져서 변형률이 더 커진다. 반면에 점성을 아주 크게 하면 이완시간이 길어서 오랜 시간 후에 후기탄성변형률에 도달하며, 전체적인 강성이 커져서 변형률이 더 작아진다.

4.2 원공이 존재하는 점탄성 평판

중양에 지름이 10cm 인 원공을 지닌 점탄성 평판 ($36\text{cm} \times 20\text{cm} \times 1\text{cm}$)이 양단에서 균일한 충격인장하중 $\sigma_0 H(t)$ 를 받고 있다. 이 문제는 2개의 대칭면을 가지므로 평판의 1/4 만을 해석하고 그에 따른 유한요소 메쉬의 형상은 Fig. 5와 같다. 이때 사용된 유한요소는 등매개 2차요소이며, 총요소수는 58개, 총절점수는 209개로 하고, 평면응력 조건하에서, 수치해석을 수행하였다. 이 문제에서 관심의 대상은 응력이 집중되는 원공 주위의 A점에서의 x-방향 수직응력과 y-방향 변위를 조사한다. 여기서 사용된 물성치는 앞 예제와 동일하다.

Fig. 6, 7에서는 각각 A점에서, α 의 변화(0.98, 0.8)에 따른 동점탄성의 x-방향 응력과 y-방향 변위를 도시하였다. 기존에 비교할만한 이론해나 수치해가 존재하지 않으므로, α 를 증가시켜 1에 접근시키면 동점탄성해가 동탄성해에 접근한다는 사실을 근거로 동탄성 프로그램^(24,25)을 수행시켜서 얻은 수치결과를 비교 데이터로 사용하였다.

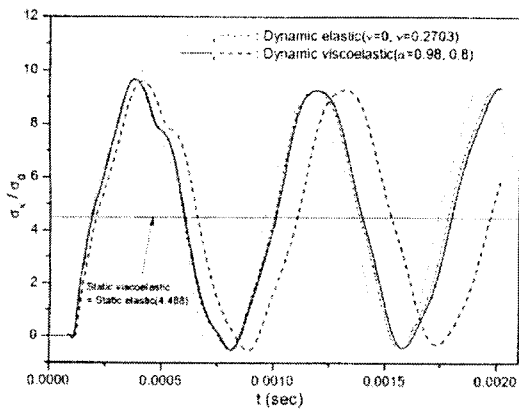


Fig. 6 Axial stresses at point A

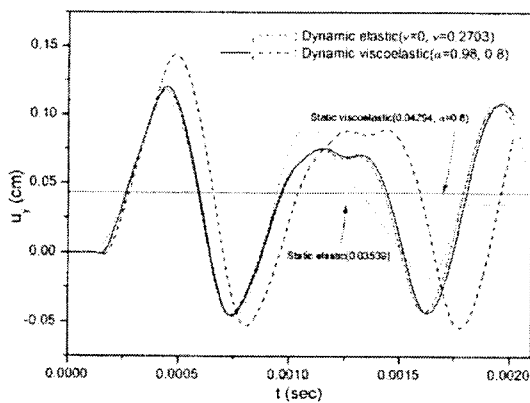


Fig. 7 Vertical displacements at point A

α 를 감소시키므로써 파의 y-방향 변위와 폭이 증가하며, 응력이나 변위의 극값이 우측으로 조금씩 이동됨을 알 수 있다. 여기서 $\nu=0.2703$ 은 점탄성 이완함수의 초기치 물성값이다.

5. 결론

등방성 선형 과도 동점탄성 문제의 일반적인 해석을 위하여 시간적분형 운동방정식을 근거로 한 변분식을 이용해서 행렬식 형태의 유한요소방정식을 유도·제시하였다. 변분식에 미분항이 포함되어 있지 않으므로 동적 문제의 일반적 해석에서 사용되는 Newmark와 같은 유한차분적 시간적분법을 사용하지 않았다. 종속함수를 시간과 공간 함수의 곱의 급수로 가정하였으며, 수치해석의 안정성을 위하여 각 시간구간에서는 종속함

수가 일정하다고 가정하여 변분식을 이산화시켰다. 이때 점탄성 재료는 정수압 변형시 탄성의 성질을 갖고, 전단변형시에는 3요소 표준고체모델로 가정하여 수식을 전개하였다. 유도·제시된 유한요소방정식의 타당성과 응용성을 입증하기 위하여, 평면응력 및 평면변형률 문제들을 택하고, 응력과 변형률을 해석하여 좋은 결과가 얻어짐을 보였다. 그리고 점탄성 재료의 변화가 수치결과에 미치는 영향과 동탄성해와의 상호관계를 조사하였다.

시스템 해석을 위해서 최종적으로 얻어진 유한요소방정식은 정적인 점탄성 해석을 위한 유한요소방정식의 경우와는 달리 비선형성이 증가된 강성행렬과 질량행렬이 포함되어 해석과정이 좀더 복잡해지고 계산시간이 많이 걸린다. 그러므로, 앞으로의 과제중의 하나는 계산시간을 줄이고 정확성을 갖는 효과적인 알고리즘의 개발이라고 할 수 있겠다.

후 기

위 논문은 2002년도 금오공과대학교 학술연구비 지원을 받아 연구하였음.

참고문헌

- (1) Reddy, J.N., 1993, *An Introduction to the Finite Element Method* (2nd edn.), McGraw-Hill, London.
- (2) Bathe, K.J., 1996, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- (3) Manolis, G.D., Beskos D.E., 1988, *Boundary Element Methods in Elastodynamics*, Routledge London.
- (4) Dominguez, J., 1993, *Boundary Elements Methods in Dynamics*, Elsevier, Amsterdam.
- (5) Leitman, M.J., "Variational Principles in the Linear Dynamic Theory of Viscoelasticity," *Q. Appl. Math.*, Vol. 24, No. 1, pp. 37~46, 1966.
- (6) Oden, J.T. and Reddy, J.N., 1976, *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin.
- (7) Christensen R.M., 1982, *Theory of Viscoelasticity*, Academic Press, New York.

- (8) Flügge, W., 1975, *Viscoelasticity*, 2nd edition, Spriger-Verlag, Berlin.
- (9) Haddad, Y.M., *Viscoelasticity of Engineering Materials*, Chapman and Hall, London, 1995.
- (10) Nickell, R.E., 1968, *Stress Wave Analysis in Layered Thermoviscoelastic Materials by the Extended Ritz Method*, Technical Report S-175, VII, Rohm and Haas Co., Redstone Research Laboratories, Huntsville, Alabama.
- (11) Becker, E.B. and Nickell, R.E., "Stress Wave Propagation Using the Extended Ritz Method," *AIAA/ASME 10th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, pp. 336~348, 1969.
- (12) Goudreau, G.L., 1970, *Evaluation of Discrete Methods for the Linear Dynamic Response of Elastic and Viscoelastic Solids*, Structures and Material Research, Report No. 69-15, Structural Engineering Laboratory, University of California, Berkeley, California.
- (13) Golla, D.F. and Hughes, P.C., "Dynamics of Viscoelastic Structures - A Time Domain Finite Element Formulation," *J. Appl. Mech.*, Vol. 52, pp. 897~906, 1985.
- (14) Spyrakos, C.C., "Exact Finite Element Method Analysis of Viscoelastic Tapered Structures to Transient Loads," Edited by W.Pilkey and B.Pilkey, *NASA 58th Shock and Vibration Symposium*, Vol. 1, pp. 361~375, NASA, Washington D.C., 1987.
- (15) Ha, T. Santos, J.E. and Sheen, D., 2002, "Nonconforming Finite Element Methods for the Simulation of Waves in Viscoelastic Solids," *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 191, pp. 5647~5670.
- (16) Manolis, G.D. and Beskos, D.E., 1981, "Dynamic Stress Concentration Studies by Boundary Integrals and Laplace Transform," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 17, pp. 573~599.
- (17) Luco, J.E. and De Barros, F.C.P., "Dynamic Displacements and Stresses in the Vicinity of a Cylindrical Cavity Embedded in a Half-Space," *Earthquake engineering and Structural Dynamics*, Vol. 23, pp. 321~340, 1994.
- (18) Danyluk, M.J. Geubelle, P.H. and Hilton, H.H., 1998, "Two-Dimensional Dynamic and Three-Dimensional Fracture in Viscoelastic Materials," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 35, Nos. 28-29, pp. 3831~3853.
- (19) Gaul, L. and Schanz, M., 1999, "A Comparative Study of Three Boundary Element Approaches to Calculate the Transient Response of Viscoelastic Solids with Unbounded Domains," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 179, pp. 111~123.
- (20) Perez-Gavilan, J.J. and Aliabadi, M.H., 2001, "A symmetric Galerkin Boundary Element Method for Dynamic Frequency Domain Viscoelastic Problems," *Computers and Structures*, Vol. 79, pp. 2621~2633.
- (21) Eldred, L.B. Baker, W.P. and Palazotto, A.N., 1996, "Numerical Application of Fractional Derivative Model Constitutive Relations for Viscoelastic Materials," *Computers and Structures*, Vol. 60, No. 6, pp. 875~882.
- (22) Abu-Alshaikh, I. Turhan, D. and Mengi, Y., 2001, "Propagation of Transient Out-of-Plane Shear Waves in Viscoelastic Layered Media," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 43, pp. 2911~2928.
- (23) Biwa, S., 2001, "Independent Scattering and Wave Attenuation in Viscoelastic Composites," *Mechanics of Materials*, Vol. 33, pp. 635~647.
- (24) Woo-Jin Sim and Sung-Hee Lee, 2001, "A Time-Domain Finite Element Formulation for Transient Dynamic Linear Elasticity," *Transactions of the KSME A*, Vol. 25, No. 4, pp. 574~581.
- (25) Sim, W.J. and Lee, S.H., 2002, "Transient Linear Elastodynamic Analysis in Time Domain Based on the Integro-differential Equations," *Int. J. Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 14, No. 1, pp. 71~84.
- (26) Woo-Jin Sim and Ho-Seop Lee, 1992, "Time-Domain Finite Element Formulation for Linear Viscoelastic Analysis Based on a Hereditary Type Constitutive Law," *Transactions of the KSME A*, Vol. 16, No. 8, pp. 1429~1437.
- (27) Gurtin M.E., 1964, "Variational Principles for Linear Elastodynamics," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 16, pp. 34~50.

부 록

점탄성 이완행렬의 상수 계수들

$$\begin{aligned}
m_1 &= 12 K_0 G_0 + 4 G_0^2 \\
m_2 &= 12 K_0 G_0 \lambda + 12 K_0 G_0 \alpha \lambda + 8 G_0^2 \alpha \lambda \\
m_3 &= 12 K_0 G_0 \alpha \lambda^2 + 4 G_0^2 \alpha^2 \lambda^2 \\
m_4 &= 3 K_0 G_0 + 4 G_0^2 \\
m_5 &= 3 K_0 G_0 \lambda + 3 K_0 G_0 \alpha \lambda + 8 G_0^2 \alpha \lambda \\
m_6 &= 3 K_0 G_0 \alpha \lambda^2 + 4 G_0^2 \alpha^2 \lambda^2 \\
n_1 &= 6 K_0 G_0 - 4 G_0^2 \\
n_2 &= 6 K_0 G_0 \lambda + 6 K_0 G_0 \alpha \lambda - 8 G_0^2 \alpha \lambda \\
n_3 &= 6 K_0 G_0 \alpha \lambda^2 - 4 G_0^2 \alpha^2 \lambda^2 \\
n_4 &= 3 K_0 G_0 - 2 G_0^2 \\
n_5 &= 3 K_0 G_0 \lambda + 3 K_0 G_0 \alpha \lambda - 4 G_0^2 \alpha \lambda \\
n_6 &= 3 K_0 G_0 \alpha \lambda^2 - 2 G_0^2 \alpha^2 \lambda^2 \\
a_1 &= 3 K_0 + 4 G_0 \\
a_2 &= 3 G_0 \\
b_1 &= 6 K_0 \lambda + 4 G_0 \alpha \lambda + 4 G_0 \lambda \\
b_2 &= 3 G_0 \lambda + 3 G_0 \alpha \lambda \\
c_1 &= 3 K_0 \lambda^2 + 4 G_0 \alpha \lambda^2 \\
c_2 &= 3 G_0 \alpha \lambda^2 \\
\gamma_1, \gamma_2 &= -\frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1} \\
\xi_1, \xi_2 &= -\frac{-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}}{2a_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{m_3}{a_1 \gamma_1 \gamma_2} \\
p_2 &= \frac{m_1(-\gamma_1)^2 + m_2(-\gamma_1) + m_3}{\gamma_1 a_1 (\gamma_1 - \gamma_2)} \\
p_3 &= \frac{m_1(-\gamma_2)^2 + m_2(-\gamma_2) + m_3}{\gamma_2 a_1 (\gamma_2 - \gamma_1)} \\
p_4 &= \frac{m_6}{a_2 \xi_1 \xi_2} \\
p_5 &= \frac{m_4(-\xi_1)^2 + m_5(-\xi_1) + m_6}{\xi_1 a_2 (\xi_1 - \xi_2)} \\
p_6 &= \frac{m_4(-\xi_2)^2 + m_5(-\xi_2) + m_6}{\xi_2 a_2 (\xi_2 - \xi_1)} \\
q_1 &= \frac{n_3}{a_1 \gamma_1 \gamma_2} \\
q_2 &= \frac{n_1(-\gamma_1)^2 + n_2(-\gamma_1) + n_3}{\gamma_1 a_1 (\gamma_1 - \gamma_2)} \\
q_3 &= \frac{n_1(-\gamma_2)^2 + n_2(-\gamma_2) + n_3}{\gamma_2 a_1 (\gamma_2 - \gamma_1)} \\
q_4 &= \frac{n_6}{a_2 \xi_1 \xi_2} \\
q_5 &= \frac{n_4(-\xi_1)^2 + n_5(-\xi_1) + n_6}{\xi_1 a_2 (\xi_1 - \xi_2)} \\
q_6 &= \frac{n_4(-\xi_2)^2 + n_5(-\xi_2) + n_6}{\xi_2 a_2 (\xi_2 - \xi_1)} \\
w_1 &= G_0 \alpha \\
w_2 &= \frac{G_0 \lambda - G_0 \alpha \lambda}{\lambda}
\end{aligned}$$