E-체계들을 위한 루트리-마이어 의미론

양 은 석 (연세대)

【요약문】 이 논문에서 우리는 (축약 원리가 없는) 연관 체계 EW의 이웃 체계들을 다룬다. 구체적으로 우리는 확장 원리를 포함하지만 축약 원리를 포함하지 않는 E (Ee-W) 체계, 특수 주장 specialized assertion(sa) 원리를 포함하지 않는 Ee-W (Ee-Wsa) 체계, 자기 배분 self-distribution(sd) 원리를 포함하지 않는 Ee-W (Ee-Wsd) 체계, 그리고 체인chain(c) 원리와 축약 원리를 포함하는 Ee 체계들의 확장 Eec-Wsa, Eec-Wsd, Eec-W, Eec를 다룬다. 우리는 루트리 마이어 의미론을 사용해서 이 체계들을 위한 완전성을 보인다.
【주제어】 축약원리, 연관체계, 루트리, 마이어

1. 들어가는 말

이 논문에서 우리는 확장expansion 공리를 갖는 E의 변형 체계들 특히 축약contraction (W) 공리를 포함하지 않는 E의 변형 체계들을 다룬다.[1] 확장 원리는 다음의 두 가지 점에서 흥미롭다. 첫째, (자기-함의 self-implication와 함께) 확장 원리를 사용해서 혼합mingle 원리를 정리로 얻을 수 있다. 그러나 일반적으로 그 역은 성립하지 않는다. 둘째, 확장 원리는 축약 원리의 정반대이다. 크립키[5]가 지적하듯이, "결정가능성 정리 decidability theorem"를 위한 "일반적 방법"은 "혼합 원리의 정반대의 출현에 의존한다". 이는 확장 원리가 결정가능성에 유용하고 중요한 원리라는 것을 의미한다.

구체적으로 우리는 확장 원리를 포함하지만 축약 원리를 포함하지 않는 E (Ee-W) 체계, 특수 주장specialized assertion(sa) 원리를 포함하지 않는 Ee-W (Ee-Wsa) 체계, 자기 배분self-distribution(sd) 원리를 포함

---

1) 우리는 이러한 체계들을 간단히 E-체계들로 명명한다. 특히 확장 원리를 포함하는 E-체계들을 Ee-체계들로, 확장 원리를 포함하지만 축약 원리를 포함하지 않는 체계들을 Ee-W 체계들로 명명한다.

하지 않는 Ee-W (Ee-Wsd) 체계, 그리고 체인chain(c) 원리와 축약 원리를 포함하는 Ee 체계들의 확장 Eec-Wsa, Eec-Wsd, Eec-W, Eec를 다룬다. 우리는 각 체계들을 위한 루트리-마이어 의미론을 제시한다. 그리고 그것을 통해 각 체계의 완전성을 다룬다.

편의상 특별히 각 체계를 구별할 필요가 없다면 우리는 Ee(c-W) 체계들 더 간단히 Ee(c-W)에 의해 위에서 언급한 각 체계들을 함께 표현할 것이다. 그러나 문맥에 따라 독자는 어떤 체계를 의미하는 지를 충분히 알 수 있을 것이다. 또 Ee(-W)에 의해 체인 원리를 갖지 않는 Ee-W 체계들을 나타낼 것이다. 루트리-마이어[6, 7, 8]와 던[1, 2]에 의존해서 우리는 Ee-체계들을 위한 완전성을 줄 수 있다.

2. Ee(c-W)를 위한 공리 도식과 규칙들

편의상 우리는 이 절에서 Ee(c-W)를 위한 공리 도식과 추론 규칙만을 제시한다. 나머지 것들에 대해서는 통상의 기보법과 용어법을 따른다. Ee(c-W)는 다음의 공리 도식과 추론 규칙을 통해 형식화될 수 있다.

[공리도식1] Ee(c-W)의 공리 도식은 다음의 형식으로 주어진다:

A1.	$A \to A$	(자기-함의)
A2.	$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$	(접미화)
A3.	$(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$	(접두화)
A4.	$(A \to B) \to (A \to (A \to B))$	(확장)
A5.	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	(자기배분)
A6.	$(A \to (A \to A)) \to A$	(양상화)
A7.	$(A \to (A \to B)) \to B$	(양상화)
A8.	$A \wedge B \to A,\ \ A \wedge B \to B$	(∧-제거)
A9.	$((A \to B) \wedge (A \to C)) \to (A \to (B \wedge C))$	(∧-도입)
A10.	$A \to A \vee B,\ \ B \to A \vee B$	(∨-도입)
A11.	$((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$	(∨-제거)

A12. $(A \wedge (B \vee C)) \to ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ (배분)
A13. $(\Box A \wedge \Box B) \to \Box (A \wedge B)$, where $\Box A := (A \to A) \to A$
A14. $\sim\sim A \to A$ (이중부정)
A15. $(A \to \sim B) \to (B \to \sim A)$ (대우)
A16. $(A \to (A \to B)) \to (A \to B))$ (축약)
A17. $(A \to \sim A) \to \sim A$ (귀류)
A18. $(A \to B) \vee (B \to A)$ (체인)

[추론규칙2] Ee(c-W)의 추론 규칙은 다음과 같다:
(MP) 긍정식: A와 A→B로부터 B를 추론할 수 있다;
(AD) 선접: A와 B로부터 A∧B를 추론할 수 있다.

[정의3]
(df1) $A \circ B := \sim(A \to \sim B)$

[체계들4]
Ee-Wsa: A1 – A6 + A8 – A15;
Ee-Wsd: A1 – A4 + A7 – A15;
Ee-W: Ee-Wsd + A5;
Ee: Ee-W + A16, A17;
Eec-Wsa: Ee-Wsa + A18;
Eec-Wsd: Ee-Wsd + A18;
Eec-W: Ee-W + A18;
Eec: Ee + A18.;

3. Ee(c-W)를 위한 루트리-마이어 프레임과 모델

우리는 연관relevant 모델 구조를 루트리-마이어 프레임이라고 부른다. [1, 2, 4]을 따라서, 우리는 (루트리-마이어) 프레임을 정의한다. 프레임은

다음 정의와 공준을 만족하는 (U, $\sqsubseteq$, R, Z) 이 좌 주장 프레임left assertional frame[2]이고 * 가 U 위에서 일항 연산인 구조 S = (U, $\sqsubseteq$, R, Z, *) 이다: ($\zeta \in$ U)

df2. $\alpha \sqsubseteq \beta := \exists\zeta(R\zeta\alpha\beta)$

df3. $R2\alpha\beta\gamma\delta := \exists x(R\alpha\beta x \ \&\ Rx\gamma\delta)$

df4. $R2\alpha(\beta\gamma)\delta := \exists x(R\alpha x\delta \ \&\ R\beta\gamma x)$

df5. $S\alpha := \forall x,y(R\alpha xy \Rightarrow \exists\zeta(R\zeta xy))$

(편의상 다음 공준들에 관한 한 어떤 ζ를 표현하기 위해 루트리와 마이어가 그들 의미론에서 취한 0을 취한다. 우리가 어떤 ζ를 표현하는 데 사용한 0은 Z의 원소라는 데 주의하기 바란다.[3])

p0. $R\alpha\beta\gamma$이고 $\alpha' \sqsubseteq \alpha$는 $R\alpha'\beta\gamma$를 함의한다. (단조성)

p1. $R0\alpha\alpha$

p2. $R2\alpha\beta\gamma\delta \Rightarrow R2\beta(\alpha\gamma)\delta$

p3. $R2\alpha\beta\gamma\delta \Rightarrow R2\alpha(\beta\gamma)\delta$

p4. $R\alpha\beta\gamma \Rightarrow \exists x(Rx\beta\alpha \ \&\ R\alpha\beta\gamma)$

p5. $R2\alpha\beta\gamma\delta \ \&\ R\beta\gamma\eta \Rightarrow \exists x(R\alpha\gamma x \ \&\ Rx\eta\delta)$

p6. $R\alpha 0\alpha$

p7. $\forall\alpha\exists x(Sx \ \&\ R\alpha x\alpha)$

p8. $R\alpha\alpha\alpha$

p9. $R\alpha\beta\gamma \Rightarrow R\alpha\gamma^*\beta^*$

---

2) 즉 U는 집합, Z($\subseteq$U)는 다음 (*)를 만족하는 좌 하 동일성left lower identity($Z \circ A \subseteq A$),
(*) $\exists\zeta, \in Z, R\zeta\alpha\beta$ iff $\alpha \sqsubseteq \beta$
$R \subseteq U3$, 그리고 $\sqsubseteq$이 다음을 만족하는 부분-순서이다:
$R\alpha\beta\gamma$ & $\alpha' \sqsubseteq \alpha$ 는 $R\alpha'\beta\gamma$를 함의한다,
$R\alpha\beta\gamma$ & $\beta' \sqsubseteq \beta$ 는 $R\alpha\beta'\gamma$를 함의한다,
$R\alpha\beta\gamma$ & $\gamma' \sqsubseteq \gamma$ 는 $R\alpha\beta\gamma'$를 함의한다.
좌 주장 프레임에 대한 보다 자세한 이해를 위해서는 [4]를 참조.

3) 특별히 구별할 필요가 없는 한 3.4, 3.5절의 증명에서 *0*에 의해 어떤 ζ를 애매하게 나타낸다.

p10. $a^{**} = a$

p11. $Ra\beta\gamma \Rightarrow R2a\beta\beta\gamma$

p12. $Raa^{*}a$

p13. $R0a\beta$ or $R0\beta a$

Ee-Wsa를 위하여	df1 − df5 + p0 − p6, p8 − p10;
Ee-Wsd를 위하여	df1 − df5 + p0 − p4, p7 − p10;
Ee-W를 위하여	Ee-Wsd의 정의, 공준 + p5;
Ee를 위하여	Ee-W의 정의, 공준 + p12;
Eec-Wsa를 위하여	Ee-Wsa의 정의, 공준 + p13;
Eec-Wsd를 위하여	Ee-Wsd의 정의, 공준 + p13;
Eec-W를 위하여	Ee-W의 정의, 공준 + p13;
Eec를 위하여	Ee의 정의, 공준 + p13.

여기서 E를 위한 각각의 공준 즉 p1, p2, p3, p6 − p12 는 [1, 2, 7]에 있는 것들이라는 데 주의하기 바란다. p4, p5, p13은 각각 A4, A5, A18 을 위한 공준이며 [9, 10]에 나와 있다. [2, 4]을 따라 p0를 포함한다. Ee-(W) 체계들 즉 Ee-Wsa, Ee-Wsd, Ee-W, Ee 에 관한 한 ⊑은 U 위에서 부분 순서이고, Eec-(W) 체계들 즉 Eec-Wsa, Eec-Wsd, Eec-W, Eec에 관한 한 선형 순서이다. 던과 하디그리의 [3, 4]를 따라, 우리는 U를 "정보 상태들"의 집합으로 간주한다. $a, \beta \in U$ 에 대하여, $a \sqsubseteq \beta$ 는 a의 정보가 β의 정보에 포함된다는 것을 의미한다.[4]

Ee(c-W)를 위한 모델에 의해, 우리는 $\langle U, \sqsubseteq, R, Z, {}^{*}\rangle$ 가 프레임이고 $\vDash$이 다음 조건을 만족하는 U로부터 Ee(c-W)로의 관계인 구조 $M. = \langle U, \sqsubseteq, R, Z, {}^{*}, \vDash\rangle$.을 의미한다.

(AHC) (명제 변항 p에 대하여) $a \vDash p$ 이고 $a \sqsubseteq \beta$ 이면, $\beta \vDash p$;

(EC) 식 A, B 에 대하여,

---

4) ⊑이 정보 순서이기 때문에 공준 p1을 생략할 수 있다는 데 유의하기 바란다.

(∧) $a \vDash A \wedge B \Leftrightarrow a \vDash A$ 그리고 $a \vDash B$;

(∨) $a \vDash A \vee B \Leftrightarrow a \vDash A$ 또는 $a \vDash B$;

(→) $a \vDash A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall \beta, \gamma \sqsupseteq a$ ($Ra\beta\gamma$ 이고 $\beta \vDash A$ 이면, $\beta \vDash B$);

(~) $a \vDash \sim A \Leftrightarrow a^* \nvDash A$.

$a \vDash A$ 인 경우에 식 A가 U의 a에서 v 위에서 참이다. ζ (특히 0), ∈ Z, $\vDash A$ 인 경우에 A는 M 위에서 입증된다verified. U에 속하는 모든 x에 대해 만약 $x \vDash A$ 라면 $x \vDash B$ 일 경우, A는 M 위에서 B를 함축한다 entails. 모든 모델에서 A가 B를 함축할 경우, A는 B를 Ee(c-W)-함축한다. A가 프레임 S 안의 모든 진리치에서 입증될 경우, A는 S에서 Ee(c-W)-타당하다valid. Σ를 프레임들의 집합이라고 하자. 문장 A가 Ee(c-W)-타당하다는 것 기호로 $\vDash$Ee(c-W) A 는 모든 S (∈ Σ)에 대하여, A가 S에서 Ee(c-W)-타당하다는 것과 동치iff이다.

4. Ee(c-W)의 건전성

[1, 2]를 따라 우리는 Ee(c-W)를 위한 건전성을 보인다. 이를 증명하기 위해 우리는 아래 입증 보조정리Verification Lemma를 필요로 한다. 먼저 A 위에서 귀납에 의해 우리는 쉽게 다음을 증명할 수 있다.

[보조정리5] 세습Hereditary 조건(HC)

임의의 식 A에 대하여, $a \vDash A$ 이고 $a \sqsubseteq \beta$ 이면, $\beta \vDash A$.

연결사 ~, ∧, ∨, → 에 관한 한 [1, 2, 8]에서와 같은 진리치를 갖기 때문에, 우리는 거기서의 입증 보조정리를 사용할 수 있다.

[보조정리6] 입증Verification 보조정리

v 위에서 A가 B를 함축한다면 A→B 는 입증된다. 즉 v 위 ζ (∈ Z)에서 참이다. 따라서 주어진 모델 M, = (U, ⊑, R, Z, *, ⊨),에서 B를 함

축한다면 A→B 는 그 모델에서 Ee(c-W)-타당하다valid. 즉 모든 x (∈ U)에 대해 만약 x ⊨ A 라면 x ⊨ B 일 경우, ζ ⊨ A→B 이다. 그리고 A가 B를 Ee(c-W)-함축한다면, A→B 는 Ee(c-W)-타당하다.

증명: [8]에 있는 보조정리 2, 3과 정의에 의해. ([보조정리5]를 사용해서, 우리는 이것을 또한 증명할 수 있다. [1, 2]을 보라.) □

⊢Ee(c-W) A 를 Ee(c-W)에서 A의 정리인 것이라고 하자. 위에서 진술한 각각의 공준이 [1, 2, 7, 8, 9, 10]에서 이미 사용되었기 때문에, Ee(c-W)를 위한 건전성은 즉각 따라 나온다.

[정리7] (약한weak) 건전성soundness

⊢Ee(c-W) A 이면, ⊨Ee(c-W) A 이다.

증명; 우리는 공리 도식 A5의 사례들이 모든 프레임에서 타당하다는 즉 Ee(c-W)-타당하다는 것만을 증명한다. A5를 위해 [보조정리6]에 의해 p5가 타당하고holds α ⊨ A→(B→C) 라는 것을 가정하고서 α ⊨ (A→B)→(A→C) 임을 보이는 것으로 충분하다. 후자를 보이기 위해 우리는 Rαβγ와 β ⊨ A→B 를 가정하고서 γ ⊨ A→C 를 보인다. 따라서 우리는 다시 Rγδη, δ ⊨ A, Rβδι 를 가정하고서 Rαδχ와 Rχιη이고 따라서 η ⊨ C 인 χ가 있다는 것을 보인다. df3에 의해 R2αβδη이고 가정 β ⊨ A→B, δ ⊨ A, Rβδι 와 (→)에 의해 ι ⊨ B 이다. (→)을 사용해서 위 가정들로부터 χ ⊨ B→C 이다. 이로부터 Rαδχ와 Rχιη라는 것을 얻는다. 따라서 η ⊨ C 라는 것을 얻는다.

다른 공리 도식들의 사례들에 관한 한 다음을 주지하는 것으로 충분하다. [8]의 [보조정리4]에 의해 연언, 선언, 부정의 공리 도식들 A8 – A12, A14, A15의 사례들이 Ee(c-W)-타당하다는 것이 따라 나온다. [7]의 [보조정리5]에 의해 A1 – A3, A6, A16 의 사례들이 Ee(c-W)-타당하다는 것이 따라 나온다. [1]의 §48.6의 내용들로부터 A7, A13, A17의 사례들이 Ee(c-W)-타당하다는 것이 따라 나온다. [9]의 [명제1]로부터 A4, A18

의 사례들이 Ee(c-W)-타당하다는 것이 따라 나온다.

〔9〕의 〔명제1〕로부터 긍정식, 선접 규칙이 Ee(c-W)-타당성을 보존한다는 것이 따라 나온다. □

5. Ee(c-W)의 완전성

우리는 양상 논리의 (단 극대 이론maximal theries 대신 프라임 이론prime theories을 갖는) 헨킨 식 증명을 사용해 Ee(c-W)를 위한 완전성을 보인다. 이를 위해 몇몇 이론을 정의한다. 먼저 ⊢Ee(c-W)를 논리 Ee(c-W)의 연역적 귀결 관계로 해석한다. Ee(c-W)-이론Ee(c-W)-theory에 의해 우리는 연역성 즉 긍정식과 선접 아래 닫힌 문장들의 집합 T를 의미한다. 프라임 Ee(c-W)-이론prime Ee(c-W)-theory에 의해 A ∨ B ∈ T이면, A ∈ T 이거나 B ∈ T인 이론을 의미한다. 사소한 Ee(c-W)-이론trivial Ee(c-W)-theory에 의해 Ee(c-W)의 문장들의 전 집합을 의미한다. 덧이 〔3〕의 〔주의4〕에서 진술하듯이, 우리는 Ee(c-W)-이론 T가 Ee(c-W)의 모든 정리를 포함한다는 것에 주목한다. 따라서 그것은 연관 논리 저서에서 (정리를 포함하는) "정규 이론regular theory"이라고 부르는 것이다. 즉 Ee(c-W)-이론에 의해 우리는 정규 Ee(c-W)-이론을 의미한다. 이것은 또한 T가 공집합일 수 없다는 것을 의미한다. 아래의 결과에 의해 T는 또한 사소한 이론일 수 없다. 따라서 우리는 "Ee(c-W)-이론"에 의해 사소하지 않은 이론을 또한 의미한다.

이제 우리는 표준 Ee(c-W)-프레임canonical Ee(c-W)-frame이 ⊑can이 Ucan 위에서 정보 순서이고, Zcan이 임의의 프라임 Ee(c-W)이론 즉 ζcan의 집합이고, Zcan ⊆ Ucan 이고, Ucan이 ζcan을 확장하는 프라임 Ee(c-W)-이론들의 집합이라고 하고, Rcan이 Ucan에 제약된 아래의 R이고

(1) Rαβγ는 Ee(c-W)의 임의의 식 A, B에 대하여 A→B ∈ α 이고 A ∈ β 이면 B ∈ γ 이다와 동치이다.

*can이 Ucan에 제약된 * 인 구조 S = (Ucan, ⊑can, Rcan, Zcan, *can) 라고 하자. 우리는 Ee(c-W)의 각각의 공리 도식에 대하여 그에 상응하는 의미론적 공준이 타당할 경우 프레임이 Ee(c-W)에 적합fitting하다고 한다. α가 프라임 이론인 데서 α^* 가 ~A가 α에 속하지 않는 즉 $\alpha^* = \{A: \sim A \not\in \alpha\}$ 인 모든 식 A의 집합이라고 하자.

위에서 언급한 것처럼 우리는 헨킨 식 완전성 증명으로부터 증명의 아이디어를 얻는다. 따라서 기초 ζcan이 Ee(c-W)의 정리가 아닌 것들을 배제하는 즉 $\nvdash$Ee(c-W) A 인 A들을 배제하는 프라임 Ee(c-W)-이론으로 구성된다는 데 주목한다. 문맥상 우리가 의도한 것이 분명할 경우 0 즉 0can에 의해 (0 뿐만 아니라) ζcan을 표현한다는 데 또한 주목한다. 표준 Ee(c-W)-프레임의 부분 순서와 선형 순서는 Ucan에 제약된 ⊆에 의존한다. 그렇다면 우선 다음은 분명하다.

〔명제8〕 표준 Ee(c-W)-프레임은 부분적으로 순서 지어진다.

〔명제9〕 표준 Ee(c-W)-프레임은 연관된다 즉 선형적으로 순서 지어진다.

증명: 〔9〕의 〔명제3〕에 의해. □

〔정리10〕 표준적으로 정의된 Ee(c-W)-프레임은 Ee(c-W)에 적합한 프레임이다.

증명: 우리는 p5가 타당하다holds는 것을 예로서 증명한다. (다른 공준들에 대해서는 〔1〕의 §48.3의 〔정리1〕과 §48.6, 〔7〕의 〔보조정리6〕, 〔8〕의 〔보조정리13〕, 그리고 〔9〕의 〔명제4〕를 지적하는 것으로 충분하다.)

p5를 위하여 우리는 $R2\alpha\beta\gamma\delta$ 즉 $R\alpha\beta x$이고 $Rx\gamma\delta$인 x가 있고 $R\beta\gamma\eta$라는 것을 가정한다. 우리는 $R\alpha\gamma x$이고 $Rx\eta\delta$인 프라임 이론 x가 있다는 것을 보일 필요가 있다. $x0 = \{B: \exists A(A \rightarrow B \in \alpha \ \& \ A \in \gamma)\}$ 를 고려하자. $x0$의 정의는 $R\alpha\gamma x0$를 보증한다.

x0가 이론이라는 데 주목하자. 먼저 단지 이행성transitivity에 불과하기 때문에 x0가 함의 하에 닫혀있다는 것은 분명하다 ([1]의 1-2를 제외한 [사실1]이 Ee(c-W)의 정리라는데 주목하라). 그것은 또한 선접하에 닫혀있다. $A \to B$, $A' \to B' \in \alpha$ 이고 A, $A' \in \gamma$ 에 의하여 B, $B' \in x0$ 라고 하자. 그렇다면 $A \wedge A' \in \gamma$, $B \wedge B' \in x0$ 이기 때문에 [1]의 [사실1-5]에 의해 $A \wedge A' \to B \wedge B' \in \alpha$ 이다.

다음으로 우리는 $Rx0\delta\eta$를 입증한다. $A \to B \in x0$, $A \in \gamma$ 라고 하자. 먼저 가정과 x0의 정의에 의해 $C \to (A \to B) \in \alpha$ 인 C가 있다. 그렇다면 A5에 의해 $(C \to A) \to (C \to B) \in \alpha$ 이고, $R\beta\gamma\eta$에 의해 $C \to A \in \beta$ 이다. 따라서 $C \to B \in x$ 이고 이로 인해 우리가 원하던 대로 $B \in \delta$ 이다. [1]의 Squeeze 보조정리에 의해 x0는 프라임 이론일 수 있다. 그러므로 p5를 만족하는 프라임 이론이 있다. □

다음으로 우리는 S, = (Ucan, ⊑can, Rcan, Zcan, *can), 위에서 적절한 관계 ⊨을 정의할 필요가 있다. 우리는 그것을 다음으로 정의한다.

$$\alpha \models A \text{ iff } A \in \alpha$$

하지만 이것이 위의 AHC와 EC를 만족한다는 것을 입증할 필요가 있다. Ee(c-W)의 긍정 부분이 [1] §42.1의 [정의1]을 만족하기 때문에 우리는 R+를 위해 고려되는 §48.3의 [사실1], [사실2]를 직접 사용할 수 있고 따라서 같은 부분의 [정리2]를 사용할 수 있다.

[명제11] 표준적으로 정의된 (Ucan, ⊑can, Rcan, Zcan, *can ⊨)은 Ee(c-W)-모델이다.

증명: [9]의 [명제5]에 의하여. □

따라서 (Ucan, ⊑can, Rcan, Zcan, *can ⊨) 은 Ee(c-W) 모델이다. 그러므로 헨킨 식 구성에 의해 0 이 우리가 선택한 정리가 아닌 A를 배제하

고 ⊨의 표준적 정의가 속함memebership과 일치하기 때문에, 우리는 각각의 Ee(c-W)의 정리가 아닌 A에 대하여 A가 0 ⊭ A 인 Ee(c-W) 모델 A가 있다고 할 수 있다. 이는 우리가 다음과 같은 Ee(c-W)를 위한 (약한) 완전성(weak) completeness을 얻도록 한다.

〔정리12〕 (약한weak) 완전성completeness
⊨Ee(c-W) A 이면, ⊢Ee(c-W) A 이다.

다음으로 Ee(c-W)를 위한 강한 완전성strong completeness을 증명해보자. 우리는 A가 식들의 집합 Γ의 Ee(c-W) 귀결을 다음과 동치인 것으로 정의한다: 모든 Ee(c-W) 모델에 대하여, 모든 B ∈ Γ 에 대해 a ⊨ B 일 때마다 (0 뿐만 아니라) 모든 a ∈ U 에 대해 a ⊨ A 이다. 우리는 A가 Γ로부터 Ee(c-W)-연역될 수 있다deducible는 것이 A가 Γ를 포함하는 모든 이론에 속하는 것을 의미하는 것으로 정의한다. 그렇다면,

〔명제13〕 Γ ⊬Ee(c-W) A 이면, Γ ⊆ ζ 이고 A ∉ ζ 인 프라임 이론 ζ가 있다.

증명: Ee(c-W)의 정합식들의 열거 {An: n ∈ ω} 를 취하자. 우리는 집합들의 열을 귀납에 의해 다음처럼 정의한다:

ζ0 = {A′: Γ ⊢Ee(c-W) A′}
ζi+1 = Th(ζi ∪ {Ai+1}) ζi, Ai+1 ⊢Ee(c-W) A 가 아닐 경우
ζi 그 외

이제 ζ를 이러한 ζn들 모두의 합이라고 하자. ζ가 A를 포함하지 않는 이론이라는 것은 분명하다. 우리는 그것이 프라임이라는 것을 보인다.

(모순을 일으키기 위해) B∨C ∈ ζ 이고 B, C ∉ ζ 라고 하자. 그렇다면 ζ∪B 와 ζ∪C 로부터 얻어진 이론들은 모두 A를 포함해야한다. 이로부터 ζ′∧B ⊢Ee(c-W) A 이고 ζ′∧C ⊢Ee(c-W) A 인 ζ의 원소들의 연언

ζ'이 있다. (좀더 정확히, $\zeta1 \wedge B \vdash_{Ee(c\text{-}W)} A$ 이고 $\zeta2 \wedge C \vdash_{Ee(c\text{-}W)} A$ 인 $\zeta1$, $\zeta2$ 가 있고 ζ'은 $\zeta1$, $\zeta2$ 의 연언 즉 $\zeta1 \wedge \zeta2$ 이다.) $\vdash_{Ee(c\text{-}W)} A \rightarrow B$ 이면 $A \vdash_{Ee(c\text{-}W)} B$ 라는 데 주목하자. 그렇다면 A8과 긍정식에 의해 $(\zeta' \wedge B) \vee (\zeta' \wedge C) \vdash_{Ee(c\text{-}W)} A$ 를 얻는다. 그리고 A3, A12, 긍정식에 의해 $(\zeta' \wedge (B \vee C) \vdash_{Ee(c\text{-}W)} A$ 이다. 이로부터 $A \in \zeta$ 이고 이는 가정에 모순을 일으킨다. □

따라서 [명제11]과 [명제13]에 의해 다음의 강한 완전성을 보일 수 있다.

[정리14] (강한strong) 완전성completeness
$\Gamma \vDash_{Ee(c\text{-}W)} A$ 이면, $\Gamma \vdash_{Ee(c\text{-}W)} A$ 이다.

참고문헌

[1] A. R. Anderson, N. D. Belnap, and J. M. Dunn, *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, vol {2}, Princeton, Princeton Univ. Press, 1992.

[2] J. M. Dunn, "Relevance logic and entailment", *Handbook of Philosophical Logic*, D. Gabbay and F. Guenthner (eds.), Dordrecht, D. Reidel Publ. Co., 1986, pp. 117-224.

[3] J. M. Dunn, "Partiality and its Dual", *Studia Logica*, 66 (2000), pp. 5-40.

[4] J. M. Dunn and G. Hardegree, *Algebraic Methods in Philosophical Logic*, Oxford, Oxford Univ Press, 2001.

[5] S. Kripke, "A completeness theorem in modal logic", *Journal of Symbolic Logic*, 24. (1959) pp. 1-15.

〔6〕 R. Routley and R. K. Meyer, "The semantics of entailment (II)", *Journal of Philosophical Logic*, 1 (1972a), pp. 53-73.

〔7〕 R. Routley and R. K. Meyer, "The semantics of entailment (III)", *Journal of Philosophical Logic*, 1 (1972b), pp. 192-208.

〔8〕 R. Routley and R. K. Meyer, "The semantics of entailment (I)", *Truth, Syntax, and Modality*, H. Lebranc (ed.), Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1973, pp. 199-243.

〔9〕 E. Yang, "T-R, TE-R, TEc-R", *Bulletin of the Section of Logic*, 31/3 (2002), pp. 171-181.

〔10〕 E. Yang, "Routley-Meyer semantics for the weak Boolean Logic wB-SC and a Translation", manuscript (200+).

Institute of Yonsei Philosophy
Yonsei University, Rm 523
Inmun-gwan, seodaemun, seoul, 20-789, KOREA.
Email:yanges2@hanmail.net}