Journal of Korean
Data & Information Science Society
2003, Vol. 14, No.4 pp. 837~844

Reliability Estimation in Bivariate Pareto Model with Bivariate Type I Censored Data

Jang Sik Cho[1] · Kil Ho Cho[2] · Sang Gil Kang[3]

Abstract

In this paper, we obtain the estimator of system reliability for the bivariate Pareto model with bivariate type 1 censored data. We obtain the estimators and approximated confidence intervals of the reliability for the parallel system based on likelihood function and the relative frequency, respectively. Also we present a numerical example by giving a data set which is generated by computer.

Key Words : Bivariate Pareto model; Bivariate Type I censored data; Random censored data; Maximum likelihood estimator; Parallel system; Series system.

1. 서론

두 개의 부품으로 구성되어 있는 시스템에서 두 부품의 수명시간을 일반적으로 서로 종속적인 확률변수로 가정하는 경우가 많다. 이는 두 개의 부품을 가지는 병렬체계에서 한 부품이 고장나면 고장난 부품의 부하가 정상부품에 전가되어 정상부품의 고장률에 영향을 주기 때문이다. 이와 같이 부품의 수명이 서로 종속관계에 있는 시스템의 수명시간에 대한 연구로서 Marshall과 Olkin(1967), Bemis, Bain과 Higgins(1972), Hanagal과 Kale(1992) 등이 있다.

한편 Lindley와 Singpurwalla(1986)는 위와 같은 상황에서 실험환경이 변하는 상황까지 고려한 시스템의 수명모형으로서 이변량 파레토(BVP : bivariate pareto) 모형을 제안하면서 여러 가지 성질들을 밝혔다. 완전자료가 관찰된 BVP 모형과 관련된 연구

---

1) Corresponding Author. Associate Professor, Department of Statistical Information Science, Kyungsung University, Busan, 608-736, Korea
E-mail : jscho@star.ks.ac.kr

2) Professor, Department of Statistics, Kyungpook National Universtity, Daegu, 702-701, Korea

3) Assistant Professor, Department of Applied Statistics, Sangji University, Wonju, 220-702, Korea

로서 Bandyapadhyay와 Basu(1990), Veenus와 Nair(1994), Hanagal(1996), Jeevanand (1997), Cho, Cho와 Cha(2003) 등이 있다.

한편 두 부품에 대한 중단시간이 동일한 일변량 중단된 자료(univariate censored data)로 관찰되는 경우 Cho, Cho, Lee(2003)은 신뢰도에 대한 최우추정량을 구하였다.

그러나 현실적으로, 부품들의 수명이 실험자의 의도에 의해서 또는 실험환경의 제약에 의해서 두 부품에 대한 중단시간이 다른 제 1종 이변량 중단된 자료(bivariate type I censored data)로 관찰되는 경우가 많이 발생한다. 예를 들어 두 부품의 수명이 동일한 분포를 갖지 않는 경우 두 부품의 중단시간을 일변량 중단모형보다 이변량 중단모형으로 하는 것이 타당하다.

본 논문에서는 BVP 모형을 따르는 두 부품의 수명이 제 1종 이변량 중단된 자료(bivariate type I censored data)로 관찰되는 경우, 우도함수 및 상대 빈도에 기초해서 병렬시스템의 신뢰도에 대한 추정량을 제안하고 근사적 정규성을 밝힌다. 또한 몬테칼로 모의실험을 통하여 제안된 추정량을 계산한다.

2. 개요

확률변수 (X, Y)를 모수 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \delta)$를 갖는 BVP 모형을 따르다고 한다면 결합 확률밀도 함수는 식 (1)과 같이 주어진다.

$$f(x, y : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \delta)$$
$$= \begin{cases} \lambda_1(\lambda_2+\lambda_3)\delta^{\lambda} x^{-\lambda_1-1} y^{-(\lambda_2+\lambda_3)-1}, & \delta < x < y < \infty, \\ \lambda_2(\lambda_1+\lambda_3)\delta^{\lambda} x^{-(\lambda_1+\lambda_3)-1} y^{-(\lambda_2+\lambda_3)-1}, & \delta < y < x < \infty, \\ \lambda_3\delta^{\lambda} x^{-\lambda-1}, \delta < x = y < \infty, \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \delta > 0$ 이며 $\lambda = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$이다.

그리고 (X, Y)에 대한 결합 신뢰도 함수는 식 (2)와 같이 주어진다.

$$\overline{F}(x, y) = P(X > x \ , \ \ Y > y)$$
$$= \left(\frac{x}{\delta}\right)^{-\lambda_1} \cdot \left(\frac{y}{\delta}\right)^{-\lambda_2} \cdot \max\left(\frac{x}{\delta}, \frac{y}{\delta}\right)^{-\lambda_3}, \quad \delta \le \min(x, y) < \infty. \tag{2}$$

BVP 모형에서 $\delta = 1$을 가정한다면, (X, Y)의 결합 신뢰도 함수는 식 (3)과 같이 주어진다.

$$\overline{F}(x, y) = x^{-\lambda_1} \cdot y^{-\lambda_2} \cdot (\max(x, y))^{-\lambda_3}. \tag{3}$$

식 (3)을 제 2종 BVP 모형이라 하고, 식 (2)를 제 1종 BVP 모형이라 한다.

그리고 각각의 확률변수에 대한 조건부 생존함수들은 다음과 같이 각각 계산될 수 있다.

$$\overline{F}_{X|Y=y}(x) = P(X > x \mid Y = y)$$
$$= \begin{cases} \exp(-\lambda_1 x), & y > x \\ \lambda_2(\lambda_2+\lambda_3)^{-1}\exp(-(\lambda_1+\lambda_3)x+\lambda_3 y), & x \ge y, \end{cases} \tag{4}$$

$$\overline{F}_{Y|X=x}(y) = P(Y > y \mid X = x)$$
$$= \begin{cases} \exp(-\lambda_2 y), & x > y \\ \lambda_1(\lambda_1+\lambda_3)^{-1}\exp(-(\lambda_2+\lambda_3)y+\lambda_3 x), & x \le y. \end{cases} \quad (5)$$

또한 임무 시간 $z_o > \delta$에 대해서 병렬 시스템의 신뢰도는 식 (6)와 같이 주어진다.

$$R = P[\max(X, Y) > z_o] = (\delta/z_o)^{\lambda_1+\lambda_3} + (\delta/z_o)^{\lambda_2+\lambda_3} - (\delta/z_o)^{\lambda}. \quad (6)$$

한편 $i = 1, 2, \cdots, n$에 대하여 본 논문에서는 아래의 기호를 약속하자.

(c_x, c_y) : 시스템의 i번째 관찰치의 이변량 중단시간.

$I(\cdot)$: 지시함수.

$G_{1i} = I(X_i > c_x)$, $G^*_{1i} = 1 - G_{1i}$, $G_{2i} = I(Y_i > c_y)$, $G^*_{2i} = 1 - G_{2i}$.

$R_{1i} = I(X_i < Y_i)$, $R^*_{1i} = 1 - R_{1i}$, $R_{2i} = I(X_i > Y_i)$, $R^*_{2i} = 1 - R_{2i}$.

$R_{3i} = I(X_i = Y_i)$, $R^*_{3i} = 1 - R_{3i}$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

제 1종 이변량 중단된 자료가 관찰되는 경우, 각각의 부품들에 대해서 다음과 같이 세가지 경우가 발생한다.

(1) 두 개의 부품들이 모두 관찰되는 경우($G^*_{1i}G^*_{2i} = 1$).

(2) 하나의 부품만 관찰되고 다른 하나의 부품은 중단되는 경우
($G_{1i}G^*_{2i} + G^*_{1i}G_{2i} = 1$).

(3) 두 개의 부품들이 모두 중단되는 경우($G_{1i}G_{2i} = 1$).

따라서 부품들의 i번째 수명시간 (x_i, y_i)는 다음과 같이 관찰된다.

$$(x_i, y_i) = \begin{cases} (x_i, y_i), & x_i < c_x \ , \ y_i < c_y \\ (c_x, y_i), & x_i > c_x \ , \ y_i < c_x \\ (x_i, c_y), & x_i < c_x \ , \ y_i > c_y \\ (c_x, c_y), & x_i > c_x \ , \ y_i > c_y \ , \end{cases} \quad (7)$$

여기서 중단시간 c_x와 c_y는 미리 정해진 값이며, 같은 값으로 하는 경우가 많다. 특히, $c_x = c_y$인 경우는 일변량 1종 중단모형이 된다.

본 논문에서는 제 2종 BVP 모형에 대해서만 연구의 초점을 맞추고자 한다. 그러면 우도함수는 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \{[f(x_i, y_i)]^{G^*_{1i}G^*_{2i}} \cdot [\overline{F}(x_i, y_i)]^{G_{1i}G_{2i}}$$
$$\cdot [\overline{F}_{X|Y=y}(x_i) f_Y(y_i)]^{G_{1i}G^*_{2i}}$$

$$\cdot [\ \overline{F}_{Y|X=x}(y_i) f_X(x_i)]^{G_{1i}^* G_{2i}} \}^{(R_{1i}+R_{2i}+R_{3i})}$$
$$= \lambda_1^{N_1} \lambda_2^{N_2} \lambda_3^{N_3} (\lambda_1+\lambda_3)^{N_4} (\lambda_2+\lambda_3)^{N_5} \exp[-\lambda_1 x_s - \lambda_2 y_s - \lambda_3 (x_s + y_s - t_s)]. \quad (8)$$

여기서 $f_X(x) = (\lambda_1+\lambda_3) \cdot \exp(-(\lambda_1+\lambda_3)x)$,

$f_Y(y) = (\lambda_2+\lambda_3) \cdot \exp(-(\lambda_2+\lambda_3)y)$,

$$N_1 = \sum_{i=1}^{n} (R_{1i} G_{1i}^* G_{2i}^* + R_{2i}^* G_{1i}^* G_{2i}), \quad N_2 = \sum_{i=1}^{n} (R_{2i} G_{1i}^* G_{2i}^* + R_{1i}^* G_{1i} G_{2i}^*),$$

$$N_3 = \sum_{i=1}^{n} R_{3i} G_{1i}^* G_{2i}^*, \quad N_4 = \sum_{i=1}^{n} R_{2i} G_{1i}^*, \quad N_5 = \sum_{i=1}^{n} R_{1i} G_{2i}^*,$$

$$x_s = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad y_s = \sum_{i=1}^{n} y_i, \quad t_s = \sum_{i=1}^{n} \min(x_i, y_i).$$

그리고 $N_1, N_2, \cdots, N_5$는 확률변수이며, 이들의 기대값은 다음과 같이 계산되어 진다.

$$\begin{aligned} E(N_1) = \sum_{i=1}^{n} \{ & \lambda_1/\lambda - \lambda_1 \exp(-\lambda c_x)/\lambda + \exp(-\lambda c_y) - \exp(-(\lambda_2+\lambda_3)c_y) \\ & + (1-\exp(-\lambda_1 c_x)) \cdot \exp(-(\lambda_2+\lambda_3)c_y) \cdot I(c_x < c_y) \\ & + \lambda_3(\exp(-\lambda c_y) - \exp(-\lambda c_x))/\lambda \cdot I(c_y < c_x)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(N_2) = \sum_{i=1}^{n} \{ & \lambda_2/\lambda - \lambda_2 \exp(-\lambda c_y)/\lambda + \exp(-(\lambda_1+\lambda_3)c_x - \lambda_2 c_y) \\ & - \exp(-(\lambda_1+\lambda_3)c_x) \\ & + (1-\exp(-\lambda_2 c_y)) \cdot \exp(-(\lambda_1+\lambda_3)c_x) \cdot I(c_y < c_x) \\ & + \lambda_3(\exp(-\lambda c_x) - \exp(-\lambda c_y)))/\lambda \cdot I(c_x < c_y)\}, \end{aligned}$$

$$E(N_3) = \sum_{i=1}^{n} \{(\lambda_3 - \lambda_3 \exp(-\lambda \min(c_x, c_y)))/\lambda\},$$

$$\begin{aligned} E(N_4) = \sum_{i=1}^{n} \{ & \lambda_2/\lambda - \lambda_2 \exp(-\lambda c_y)/\lambda + \exp(-(\lambda_1+\lambda_3)c_x - \lambda_2 c_y) \\ & - \exp(-(\lambda_1+\lambda_3)c_x) \\ & + [\exp(-\lambda_2 c_y) \cdot [1-\exp(-(\lambda_1+\lambda_3)c_x)] \\ & + (\lambda_1+\lambda_3) \cdot (\exp(-\lambda c_x) - 1)/\lambda] \cdot I(c_x > c_y)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(N_5) = \sum_{i=1}^{n} \{ & \lambda_1/\lambda - \lambda_1 \exp(-\lambda c_x)/\lambda + \exp(-\lambda c_y) - \exp(-(\lambda_2+\lambda_3)c_y) \\ & + \lambda_1 \exp(-\lambda c_x)/\lambda - \exp(-(\lambda_2+\lambda_3)c_y - \lambda_1 c_x)\}. \end{aligned}$$

또한 로그-우도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\log L(\lambda) = N_1 \log\lambda_1 + N_2 \log\lambda_2 + N_3 \log\lambda_3 + N_4 \log(\lambda_1+\lambda_3) + N_5 \log(\lambda_2+\lambda_3)$$
$$-\lambda_1 x_s - \lambda_2 y_s - \lambda_3 (x_s + y_s - t_s). \tag{9}$$

따라서 식 (9)의 로그-우도함수를 모수들에 대해서 일차 편미분한 우도방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\log L(\lambda) = \frac{N_1}{\lambda_1} + \frac{N_4}{\lambda_1+\lambda_3} - x_s = 0. \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\log L(\lambda) = \frac{N_2}{\lambda_2} + \frac{N_5}{\lambda_2+\lambda_3} - y_s = 0. \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_3}\log L(\lambda) = \frac{N_3}{\lambda_3} + \frac{N_4}{\lambda_1+\lambda_3} + \frac{N_5}{\lambda_2+\lambda_3} - (x_s + y_s - t_s) = 0. \tag{12}$$

모수 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$에 대한 최우추정량($\widehat{\lambda_1^*}, \widehat{\lambda_2^*}, \widehat{\lambda_3^*}$)은 위의 우도방정식 (10)-(11)을 뉴턴-랍슨과 같은 반복적 방법에 의해 얻을 수 있다.

따라서 $\sqrt{n}\ ((\widehat{\lambda_1^*}, \widehat{\lambda_2^*}, \widehat{\lambda_3^*})^T - (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T)$의 분포는 표본의 크기가 증가하면서 근사적으로 평균벡터가 영이고 분산-공분산행렬이 $I^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$인 다변량 정규분포를 따름을 알 수 있다.

그리고 $I(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = ((I_{ij}))$, 여기서 $I_{ij} = E\left[-\frac{\partial^2}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}\log L(\lambda)\right]$; $i, j = 1, 2, 3$이며,

$$I_{11} = E(N_1)/\lambda_1^2 + E(N_4)/(\lambda_1+\lambda_3)^2,\ \ I_{12} = 0,\ \ I_{13} = E(N_4)/(\lambda_1+\lambda_3)^2,$$
$$I_{22} = E(N_2)/\lambda_2^2 + E(N_5)/(\lambda_2+\lambda_3)^2,\ I_{23} = E(N_5)/(\lambda_2+\lambda_3)^2,$$
$$I_{33} = E(N_3)/\lambda_3^2 + E(N_4)/(\lambda_1+\lambda_3)^2 + E(N_5)/(\lambda_2+\lambda_3)^2.$$

3. 시스템 신뢰도 추정

병렬시스템의 신뢰도 R에 대한 최우 추정량 및 상대빈도 추정량을 제안하고자 한다. 또한 병렬시스템의 신뢰도에 대한 근사적 신뢰구간을 최우추정량 및 상대빈도 추정량에 기초해서 유도하고자 한다.

임무시간 $z_o > \delta$에 대해서 병렬시스템의 신뢰도에 대한 최우추정량은 식 (13)과 같이 주어진다.

$$R_{MLE} = (\delta/z_o)^{\widehat{\lambda_1} + \widehat{\lambda_3}} + (\delta/z_o)^{\widehat{\lambda_2} + \widehat{\lambda_3}} - (\delta/z_o)^{\widehat{\lambda}}. \tag{13}$$

같은 방법으로 $\widehat{R}_{MLE}$ 의 분포는 평균이 R이고 분산이 $\varDelta \cdot [I^{-1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)/n] \cdot \varDelta'$ 인 근사적 정규분포를 따른다. 여기서 $\varDelta = (\varDelta_1, \varDelta_2, \varDelta_3)$이며,

$$\Delta_1 = \log(\delta/z_o)\cdot\left((\delta/z_o)^{\lambda_1+\lambda_3} - (\delta/z_o)^{\lambda}\right),$$
$$\Delta_2 = \log(\delta/z_o)\cdot\left((\delta/z_o)^{\lambda_2+\lambda_3} - (\delta/z_o)^{\lambda}\right),$$
$$\Delta_3 = \log(\delta/z_o)\cdot\left((\delta/z_o)^{\lambda_1+\lambda_3} + (\delta/z_o)^{\lambda_2+\lambda_3} - (\delta/z_o)^{\lambda}\right).$$

따라서 최우추정량에 기초한 R의 $100(1-\alpha)\%$ 근사적 신뢰구간은 식 (14)와 같이 구성할 수 있다.

$$\left(\widehat{R}_{MLE} - z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\widehat{\Delta}\cdot I(\widehat{\lambda_1},\widehat{\lambda_2},\widehat{\lambda_3})\cdot\widehat{\Delta}'/n},\right.$$
$$\left.\widehat{R}_{MLE} + z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\widehat{\Delta}\cdot I(\widehat{\lambda_1},\widehat{\lambda_2},\widehat{\lambda_3})\cdot\widehat{\Delta}'/n}\right), \quad (14)$$

여기서 $\widehat{\Delta}=(\widehat{\Delta}_1,\ \widehat{\Delta}_2,\ \widehat{\Delta}_1)$이며,

$$\widehat{\Delta_1} = \log(\delta/z_o)\cdot\left((\delta/z_o)^{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_3} - (\delta/z_o)^{\widehat{\lambda}}\right),$$
$$\widehat{\Delta_2} = \log(\delta/z_o)\cdot\left((\delta/z_o)^{\widehat{\lambda}_2+\widehat{\lambda}_3} - (\delta/z_o)^{\widehat{\lambda}}\right),$$
$$\widehat{\Delta_3} = \log(\delta/z_o)\cdot\left((\delta/z_o)^{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_3} + (\delta/z_o)^{\widehat{\lambda}_2+\widehat{\lambda}_3} - (\delta/z_o)^{\widehat{\lambda}}\right)$$ 이다.

다음으로 상대빈도에 기초한 병렬시스템의 신뢰도에 대한 추정량과 근사적 신뢰구간을 구성해 보자. $|K|$을 표본에서 $\max(x_i, y_i) > z_o$인 개수라 한다면 $|K|$의 분포는 이항분포 (n, R)를 따름을 알 수 있다. 따라서 $|K|$에 기초해서 R에 대한 추정량을 상대빈도인 $\widehat{R}_{NE} = |K|/n$로 계산할 수 있다. 여기서 $\widehat{R}_{NE} = |K|/n$의 분포는 근사적으로 평균이 R이고 분산이 $R(1-R)/n$인 정규분포를 따름을 알 수 있다. 따라서 $|K|$에 기초한 R의 $100(1-\alpha)\%$ 근사적 신뢰구간은 식 (15)과 같이 구성할 수 있다.

$$\left(\widehat{R}_{NE} - z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\widehat{R}_{NE}\cdot(1-\widehat{R}_{NE})/n},\right.$$
$$\left.\widehat{R}_{NE} + z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\widehat{R}_{NE}\cdot(1-\widehat{R}_{NE})/n}\right). \quad (15)$$

4. 모의실험

이 장에서는 난수생성기에 의해 생성된 가상자료를 이용하여 3장에서 제안한 병렬시스템의 신뢰도에 대한 두 가지의 추정량과 근사적 신뢰구간을 비교하고자 한다. 먼저 모수 $(\lambda_1=1.0,\ \lambda_2=1.2,\ \lambda_3=0.5,\ \delta=1)$인 이변량 파레토 분포로부터 표본크기 30인 난수를 발생시키고, 제 1종 이변량 중단시간은 $c_x=4.4816$, $c_y=3.6693$으로 설정하였다. 관측된 자료는 아래 <표>와 같으며, 여기서 *는 제 1종 이변량 중단된 자료를 나타낸다. 그리고 임무시간을 $z_o=1.5$로 설정했으며, 이때 병렬시스템의 신뢰도의 참 값은 $R=0.7116$로 계산된다.

제 3절에서 제안한 방법으로 모수들에 대한 최우추정치를 구해보면 $\widehat{\lambda_1}=0.9967$, $\widehat{\lambda_2}=1.2385$, $\widehat{\lambda_3}=0.4208$로 계산된다.

그러면 병렬시스템의 신뢰도에 대한 최우추정량과 근사적 신뢰구간을 구해보자. 최우추정량과 상대빈도에 기초해서 병렬시스템의 신뢰도에 대한 추정치들은 각각 $\widehat{R}_{MLE}=0.7324$와 $\widehat{R}_{NE}=0.7667$로 계산된다. 역시 이들 추정량들에 기초해서 신뢰도에 대한 95% 근사적 신뢰구간들은 각각 (0.6277, 0.8371)와 (0.6153, 0.9180)으로 계산된다.

<표> 이변량 파레토 분포로부터 생성된 자료

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	3.9519	1.6678	11	2.7284	1.1253	21	2.4046	1.3258
2	1.1923	1.2322	12	1.3182	1.3182	22	1.9361	3.6693*
3	1.8998	2.5300	13	3.1625	1.3714	23	1.8204	1.8215
4	1.1713	1.1713	14	2.5876	1.1906	24	1.5036	1.2933
5	1.3187	1.2523	15	1.0168	3.6693*	25	1.8319	3.5384
6	1.2082	2.7046	16	1.7365	1.0382	26	2.2784	3.6693*
7	3.4264	1.0795	17	1.0877	1.0877	27	1.2957	1.2699
8	4.4816*	2.8998	18	1.4443	1.4562	28	1.6659	2.5826
9	2.1928	2.1928	19	4.4816*	1.4110	29	2.7568	1.0688
10	1.8016	1.8016	20	1.2082	3.4039	30	2.0760	1.0777

위의 결과들로부터 병렬시스템의 신뢰도에 대한 각각의 추정량과 근사적 신뢰구간에 대한 결과에서 알 수 있는 바와 같이, 상대빈도에 기초한 추정량에 비해서 최우추정량에 기초한 추정량이 편의와 신뢰구간의 길이 측면에서 다소 좋은 결과임을 알 수 있다.

그러나 모수의 값, 중단비율 및 표본크기 등에 대한 다양한 조합에 대해서도 본 논문에서 제안한 두 가지 추정방법의 효율성을 비교하는 것도 의미가 있으며, 다른 이변량 수명분포로 확장해서 제안된 추정량을 적용하는 연구는 향후 과제로 남겨두고자 한다.

참고문헌

1. Bandyapadhyay, D. and Basu, A.P. (1990). On generalization of a model by Lindley and Singpurwallam, *Advanced Applied Probability*, 22, 498-500.
2. Bemis, B.M., Bain, L.T. and Higgins, J.J.(1972). Estimation and Hypothesis Testing for the Parameters of a Bivariate Exponential

Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 67, 927-929.

3. Cho, J. S., Cho, K. H. and Cha, Y. J. (2003). System Reliability From Stress-Strength Relationship in Bivariate Pareto Distribution, *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, Vol. 14(1), 113-118.
4. Cho, J. S., Cho, K. H. and Lee W. D. (2003). Reliability for Series and Parallel Systems in Bivariate Pareto model : random censorship case, *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, Vol. 14(3), 461-469.
5. Hanagal,D.D. and Kale, B.K. (1992). Large Sample Tests for Testing Symmetry and Independence in Some Bivariate Exponential Model, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, 21(9), 2625-2643.
6. Hanagal, D.D. (1996). A multivariate Pareto distribution, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, 25(7), 1471-1488.
7. Jeevanand, E.S. (1997). Bayes estimation of $P(X_2 < X_1)$ for a bivariate Pareto distribution, *The Statistician*, 46(1), 93-99.
8. Lindley, D.V. and Singpurwalla, N.D. (1986). Multivariate distributions for the life lengths of components of a system sharing a common environment, *Journal of Applied Probability*, 23, 418-431.
9. Marshall, A.W. and Olkin, I. (1967). A Multivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 62, 30-44.
10. Veenus, P. and Nair, K.R.M. (1994). Characterization of a bivariate Pareto distribution, *Journal of Indian Statistical Association*, 32, 15-20.

[2003년 9월 접수, 2003년 10월 채택]