Journal of Korean
Data & Information Science Society
2003, Vol. 14, No.4 pp. 751~758

Estimation of Bivariate Exponential Model under Censored Data[1)]

Kil-Ho Cho[2)] · Young-Il Kim[3)]

Abstract

We consider a life testing experiment in which several two-component shared parallel systems are put on test, and the test is terminated at a predesigned experiment time. The bivariate data obtained from such a system-level life testing can be classified into three cases: 1) the case of failed two components with known failures times, 2) the case of censored two components, and 3) the case of one censored component and the other failed component of which the failure time might be known or unknown. In this thesis, the likelihood estimators for Freund's bivariate exponential life distribution under above censoring scheme are obtained. Results of comparative studies based on Monte Carlo simulation are presented.

Keywords : 부하분배체계, 순간고장률, 최우추정량, Freund 이변량지수모형

1. 머리말

두 개의 부품이나 구성요소로 구성된 체계(system)에서, 부품간에 서로 수명에 영향을 미치는 경우가 많다. 즉, 한 부품이 고장나면 고장난 부품이 분담하던 부하가 다른 고장나지 않은 부품(정상부품)에 전가되어, 정상부품의 고장률에 영향을 미치게된다. 이러한 병렬체계를 부하분배체계라 한다.

부하분배체계의 수명을 나타내는 확률모형은 여러 가지가 있다. X와 Y를 병렬체계를 이루는 두 부품 1과 2의 수명을 나타내는 확률변수라고 하자. 두 부품 1과 2의 순간 고장률을 각 각 α와 β라고 할 때, 부품 1이 x에서 먼저 고장나면 부품 2는 부품 1의 부하를 이전 받아 순간고장률이 β에서 β'로 변화하고, 부품 2가 y에서 먼저

---

1). 이 논문은 2002년도 경북대학교의 연구비에 의하여 연구되었음.
2). 대구광역시 북구 산격동 1370번지 경북대학교 통계학과 교수
E-mail : khcho@knu.ac.kr
3). 대구광역시 북구 산격동 1370번지 경북대학교 통계학과 석사과정

고장나면 부품 1는 부품 2의 부하를 이전 받아 순간고장률이 α에서 α'으로 변화한다. Freund(1961)는 위와 같은 모형의 X와 Y의 결합확률분포를 다음과 같이 유도하였다.

$$f(x,\ y) = \begin{cases} \alpha\beta' e^{-\beta' y - (\alpha+\beta-\beta')x}, & 0 < x < y \\ \beta\alpha' e^{-\alpha' x - (\alpha+\beta-\alpha')y}, & 0 < y < x \end{cases}$$

Freund는 위의 모형을 제안하고, 그 모형에 대한 통계적 성질을 조사하였다. 그 후 Hanagal과 Kale(1992), Hanagal(1996) 등이 부품의 수명자료가 완전히 얻어진 경우에 Freund 모형에 대한 추론을 연구하였다. 그러나 현실적으로 정상수명시험을 실시하는 경우에는 예정된 시험시간 내에 모두 고장나지 않거나 고장난다 하더라도 자료의 수가 적어지고, 시험시간을 연장하면 검사비용이 증가하게 된다. 이러한 문제점을 극복하기 위하여 실험 현장에서는 중도에 시험을 중단하거나 가속실험 등의 방법을 많이 이용한다.

중도에 시험을 중단하는 방법에는 여러 가지가 있는데, 홍연웅(1998)은 제2종 관측 중단된 자료를 통해 체계수명시험에서 얻어진 부품의 수명자료를 이용해서 Freund 모형에 대해서 추정하였는데, 본 연구에서는 Freund 모형을 따르는 n개의 부화분배체계를 미리 정해놓은 시간동안 시험하여 얻어진 부품의 수명자료(제1종 관측 중단된 자료)를 가지고, 그 모형의 모수에 대한 추정을 하고자 한다. 여기서 강조할 사항은 시험단위가 체계이지만 얻어지는 수명자료는 부품의 것이라는 점이다. 체계가 고장나면 각 부품의 수명은 관측 가능하며, 한 부품만 고장이면서 관측 중단된 체계는 부품의 수명이 관측 가능한 경우와 불가능한 경우로 나누어 생각한다.

2. 관측 중단된 자료의 최우추정량

2.1 관측 중단된 자료의 유형

$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \cdots,\ (x_n,\ y_n)$을 Freund 이변량지수분포에서 얻은 관측값이라 하고, 부품들의 관측 중단된 시간을 t 라 하자. 이때 관측된 i번째 부품들의 수명시간 $(x_i,\ y_i)$는 다음과 같이 주어진다.

$$(x_i,\ y_i) = \begin{cases} (x_i,\ y_i), & \max(x_i,\ y_i) < t \\ (x_i,\ t), & x_i < t < y_i \\ (t,\ y_i), & y_i < t < x_i \\ (t,\ t), & t < \min(x_i,\ y_i) \end{cases}$$

$I(.)$를 지시함수라 하고, $n_j\ (j=1,\ \cdots,\ 5)$를 다음과 같이 정의하자.

$$n_1 = \sum_{i=1}^{n} I(x_i < y_i < t), \quad n_2 = \sum_{i=1}^{n} I(y_i < x_i < t), \quad n_3 = \sum_{i=1}^{n} I(x_i < t < y_i)$$

$$n_4 = \sum_{i=1}^{n} I(y_i < t < x_i), \qquad n_5 = \sum_{i=1}^{n} I(\min(x_i,\ y_i) > t).$$

그리고 n_j $(j=1,\ \cdots,\ 5)$에 속하는 체계의 집합을 D_j라 하자.

2.2 최우추정량

수명시험이 종료된 n개의 체계에서는 하나의 부품만 고장인 체계가 포함될 수 있으며, 이러한 체계는 기능적으로 정상이지만 체계의 구조에 따라서는 i) 고장난 부품의 수명 측정이 가능한 경우, ii) 고장 사실은 알 수 있지만 수명 측정이 불가능한 경우, iii) 부품의 고장 사실조차 알 수 없는 경우의 세 가지로 구분 할 수 있다. 본 연구에서는 i)과 ii)만 다룬다.

2.2.1 한 부품만 고장난 체계의 부품수명을 알 수 있는 경우

수명시험의 종결 시점 t와 체계를 구성하는 부품의 수명을 비교하면, 두 부품이 모두 고장인 체계부터 한 부품도 고장이 발생하지 않은 체계까지 다섯 유형의 자료가 얻어질 수 있으며, 각 경우에 대하여 우도함수를 구할 수 있다.

(a) $0 < x_i < y_i < t$ 일 경우

부품 1과 2의 고장률은 0에서 x_i까지 각 각 α와 β를 가지며, 부품 1이 x_i 시점에서 고장나면 y_i까지 부품 2의 고장률은 β'이다. 따라서 하나의 체계에 대하여 이러한 경우가 발생할 확률밀도함수는

$$\alpha e^{-(\alpha+\beta)x_i}\beta' e^{\beta'(y_i - x_i)} = \alpha\beta' e^{-(\alpha+\beta-\beta')x_i - \beta' y_i}$$

이고, 고장난 n_1개의 체계에서 관측된 부품의 고장 자료에 대한 우도함수는 다음과 같다.

$$L_a = (\alpha\beta')^{n_1}\exp[-(\alpha+\beta-\beta')\sum_{i\in D_1} x_i - \beta' \sum_{i\in D_1} y_i] \tag{1}$$

(a)와 비슷한 방법으로 각 경우에 대한 우도함수를 구하면 다음과 같다.

(b) $0 < y_i < x_i < t$ 일 경우

$$L_b = (\alpha'\beta)^{n_2}\exp[-(\alpha+\beta-\alpha')\sum_{i\in D_2} y_i - \alpha' \sum_{i\in D_2} x_i] \tag{2}$$

(c) $0 < x_i < t < y_i$ 일 경우

$$L_c = (\alpha)^{n_3}\exp[-(\alpha+\beta-\beta')\sum_{i\in D_3} x_i - \beta' \sum_{i\in D_3} t] \tag{3}$$

(d) $0 < y_i < t < x_i$ 일 경우

$$L_d = (\beta)^{n_4}\exp[-(\alpha+\beta-\alpha')\sum_{i\in D_4} y_i - \alpha' \sum_{i\in D_4} t] \tag{4}$$

(e) $0 < t < \min(x_i,\ y_i)$ 일 경우

$$L_e = \exp[-(\alpha+\beta)\sum_{i\in D_5} t] \tag{5}$$

따라서 n개의 체계를 수명시험하여 얻어진 제1종 관측 중단된 자료에 대한 대수우도함수는 위의 우도함수들을 대수변환하고 합하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\ln L =& (n_1+n_2)\ln\alpha + (n_1+n_2)\ln\beta + n_2\ln\alpha' + n_1\ln\beta' \\ &-(\alpha+\beta)\Big(\sum_{i\in D_1} x_i + \sum_{i\in D_2} y_i + \sum_{i\in D_3} x_i + \sum_{i\in D_4} y_i + n_5 t\Big) \\ &+\alpha'\Big(\sum_{i\in D_2} y_i - \sum_{i\in D_2} x_i + \sum_{i\in D_4} y_i - n_4 t\Big) \\ &+\beta'\Big(\sum_{i\in D_1} x_i - \sum_{i\in D_1} y_i + \sum_{i\in D_3} y_i - n_3 t\Big)\end{aligned} \tag{6}$$

또한, 대수우도함수를 이용하여 각 모수에 대한 최우추정량을 구하면 다음과 같다.

$$\hat{\alpha} = \frac{n_1+n_3}{\sum_{i\in D_1} x_i + \sum_{i\in D_1} y_i + \sum_{i\in D_3} x_i + \sum_{i\in D_4} y_i + n_5 t}$$

$$\hat{\beta} = \frac{n_2+n_4}{\sum_{i\in D_1} x_i + \sum_{i\in D_1} y_i + \sum_{i\in D_3} x_i + \sum_{i\in D_4} y_i + n_5 t}$$

$$\widehat{\alpha'} = \frac{n_2}{\sum_{i\in D_2} (x_i - y_i) + \sum_{i\in D_4} (t - y_i)}$$

$$\widehat{\beta'} = \frac{n_1}{\sum_{i\in D_1} (y_i - x_i) + \sum_{i\in D_3} (t - x_i)}$$

2.2.2 한 부품만 고장난 체계의 부품수명을 알 수 없는 경우

시험의 종결 시점까지 하나의 부품에서 고장이 발생한 사실은 알 수 있으나 기술적, 물리적 또는 경제적 이유로 고장시간측정이 불가능하거나 비합리적인 경우, 고장난 부품의 수명을 처리하는 방법에 따라 추정 결과가 다르게 나타날 수 있다. 본 연구에서는 부품 1이 고장났어도 수명을 알 수 없을 때, 부품 1의 수명을 $p_1 t$라 하고 식 (3)에서 x_i를 $p_1 t$로 대치하여 식 (7)를 얻는다. 마찬가지로 부품 2가 고장이면 식 (4)에서 y_i를 $p_2 t$로 대치하여 식 (8)을 얻는다. 여기서, $p_i (0 \le p_i \le 1,\ i=1,\ 2)$는 주어진 값이다.

$$L_{c'} = (\alpha)^{n_3} \exp[-(\alpha+\beta-\beta') n_3 p_1 t - \beta' n_3 t] \tag{7}$$

$$L_{d'} = (\beta)^{n_4} \exp[-(\alpha+\beta-\alpha') n_4 p_2 t - \alpha' n_4 t] \tag{8}$$

따라서 대수우도함수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\ln L =& (n_1+n_3)\ln\alpha + (n_2+n_4)\ln\beta + n_2\ln\alpha' + n_1\ln\beta' \\ &-(\alpha+\beta)\Big(\sum_{i\in D_1} x_i + \sum_{i\in D_2} y_i + n_3 p_1 t + n_4 p_2 t + n_5 t\Big)\end{aligned}$$

$$+\alpha'\Big(\sum_{i\in D_2} y_i - \sum_{i\in D_2} x_i + n_4 p_2 t - n_4 t\Big) \qquad (9)$$
$$+\beta'\Big(\sum_{i\in D_1} x_i - \sum_{i\in D_1} y_i + n_3 p_1 t - n_3 t\Big)$$

식 (9)로부터 모수의 최우추정량을 구하면 다음과 같다.

$$\hat{\alpha}=\frac{n_1+n_3}{\sum_{i\in D_1\cup D_2}\min(x_i,\ y_i)+n_3p_1t+n_4p_2t+n_5t}$$

$$\hat{\beta}=\frac{n_2+n_4}{\sum_{i\in D_1\cup D_2}\min(x_i,\ y_i)+n_3p_1t+n_4p_2t+n_5t}$$

$$\widehat{\alpha'}=\frac{n_2}{\sum_{i\in D_2}(x_i-y_i)+(1-p_2)n_4t}$$

$$\widehat{\beta'}=\frac{n_1}{\sum_{i\in D_1}(y_i-x_i)+(1-p_1)n_3t}$$

3. 추정량들의 비교

Freund의 이변량지수분포를 따르는 자료를 생성시키기 위해 Friday와 Patil(1977)의 방법을 사용한다. 즉 지수분포를 따르는 독립인 두 확률변수 Y_1과 Y_2로부터 이변량 지수분포를 따르는 확률변수 X_1과 X_2로의 선형변환식은

$$X_1=\begin{cases} Y_1\alpha^{-1}, & \beta Y_1<\alpha Y_2 \\ Y_1\alpha'^{-1}-(\alpha-\alpha')Y_2(\alpha'\beta)^{-1}, & \beta Y_1>\alpha Y_2 \end{cases}$$

$$X_2=\begin{cases} Y_2\beta'^{-1}-(\beta-\beta')Y_1(\alpha\beta')^{-1}, & \beta Y_1<\alpha Y_2 \\ Y_2\beta^{-1}, & \beta Y_1>\alpha Y_2 \end{cases}$$

이다. 이 식으로부터 Freund의 이변량지수분포를 따르는 표본을 만들 수 있다. $\alpha=1.0$, $\beta=1.2$, $\alpha'=1.4$, $\beta'=1.6$에 대하여 크기 20인 이변량지수분포의 자료를 생성하면 (0.1108, *1.0436), (*1.9114, *1.1770), (0.4427, 0.8641), (*2.0757, *1.7080), (*1.1279, 0.7692), (0.7574, 0.2299), (0.4276, 0.5089), (0.4570, 0.9725), (0.7193, 0.0923), (0.6278, 0.1091), (0.0274, *1.0545), (0.8133, *3.1939), (0.0422, 0.5610), (0.2026, *2.2919), (0.3452, 0.2763), (*2.0534, 0.3410), (*1.7942, 0.3911), (*1,2158, 0.0070), (0.5583, 0.0318), (*2.7110, *3.2619) 이다. $t=1.0$이라 하면, *표시된 값은 관측중단되어 계산과정에서 1.0으로 대치되며, 밑줄친 값은 고장난 시간을 모를 경우에 $1.0*p$ $(0\le p\le 1)$로 대치된다. $p=p_1=p_2=0.0,\ 0.1,\ \cdots,\ 1.0$에 대하여 위의 데이터를 이용하여 모수의 최우추정량에 대한 편의의 합과 평균제곱오차의 합을 구하면 <표 1>과 <표 2>와 같다. 표로부터 편의에 절대값을 취해 합한 총절대편의와 평균제

곱오차를 합한 총평균제곱오차는 p값이 0.5 부근일수록 p값을 아는 경우의 총절대편의와 총평균제곱오차보다 작다는 것을 알 수 있다.

표본의 크기가 20, 40, 60일 때, 관측중단시간의 변화에 따른 모수의 최우추정량의 총절대편의와 총평균제곱오차를 $p=p_1=p_2=0.1,\ 0.2,\ \cdots,\ 0.9$일 때 5,000회 반복하여 계산한 결과, $p=0.5$이면 표본의 크기와 관측중단시간에 무관하게 총절대편의와 총평균제곱오차 모두 고장난 부품의 수명을 아는 경우보다 작다는 것을 알 수 있었다.

<표 1> 최우추정량의 편의

p	최우추정량의 편의와 총절대편의				
	α	α'	β	β'	총절대편의
※	0.029	−0.350	−0.042	−0..0687	1.108
0.0	0.566	−0.602	0.562	−0.878	2.608
0.1	0.354	−0.548	0.323	−0.821	2.046
0.2	0.192	−0.486	0.142	−0.756	1.575
0.3	0.065	−0.414	−0.001	−0.678	1.158
0.4	−0.037	−0.329	−0.117	−0.584	1.067
0.5	−0.122	−0.229	−0.212	−0.469	1.031
0.6	−0.193	−0.108	−0.292	−0.325	0.917
0.7	−0.253	0.042	−0.360	−0.139	0.793
0.8	−0.305	0.229	−0.418	0.111	1.064
0.9	−0.350	0.474	−0.469	0.465	1.757
1.0	−0.390	0.804	−0.513	1.002	2.709

<표 2> 최우추정량의 평균제곱오차

p	최우추정량의 평균제곱오차와 총평균제곱오차				
	α	α'	β	β'	총평균제곱오차
※	0.001	0.122	0.002	0.473	0.597
0.0	0.320	0.363	0.315	0.770	1.769
0.1	0.125	0.300	0.104	0.675	1.205
0.2	0.037	0.236	0.020	0.571	0.864
0.3	0.004	0.171	0.000	0.459	0.635
0.4	0.001	0.108	0.014	0.341	0.464
0.5	0.015	0.052	0.045	0.220	0.332
0.6	0.037	0.012	0.085	0.106	0.239
0.7	0.064	0.002	0.129	0.019	0.214
0.8	0.093	0.053	0.175	0.012	0.333
0.9	0.123	0.224	0.220	0.216	0.783
1.0	0.152	0.646	0.264	1.004	2.066

※는 고장난 부품의 수명을 아는 경우를 나타냄.

이상의 모의실험 결과로부터 부하분배체계의 수명시험에서 하나의 고장난 체계의 부품수명을 반드시 관측할 필요는 없다고 할 수 있으며, 관측이 어려울 경우 관측중단시간의 중간시점 또는 그 부근에서 고장이라 가정하고 분석하여도 무리가 없다는 것을 알 수 있다. 이러한 가정은 고장난 한 부품의 수명을 측정하는 것이 시간과 비용 측면에서 비경제적이거나 물리적으로 불가능할 경우에 적용될 수 있을 것이다.

참고문헌

1. 홍연웅(1998). 체계수명시험에서 얻어진 부품의 수명자료를 이용한 Freund 모형의 추정, 대한품질경영학회지, 26권, 2호, 27-38.
2. Freund, John E. (1961). A bivariate Extension of the Exponential distribution, *Journal of the American Statistical Association, 56, 971-977.*
3. Friday, D. S. and Patil, G. P. (1977). A Bivariate Exponential Model with

Applications ti Reliability and Computer Generation od Random Variables, *The Theory and Application of Reliability*, 1, 527-549.
4. Hanagal, David D. (1996). Estimation of System Reliability from Stress-Strength Relationship, *Communication in Statistics-Theory and Method*, 25, 1783-1797.
5. Hanagal, David D. and Kale, B. K. (1922). Large Sample Test of Independence for Absolutely Continuous Bivariate Exponential Dstribution, *Communication in Statistics-Theory and Method*, 20, 1301-1313.

[2003년 5월 접수, 2003년 7월 채택]