Journal of Korean
Data & Information Science Society
2003, Vol. 14, No.3 pp. 571~578

Reliability for Series System in Bivariate Weibull Model under Bivariate Type I Censorship

Jang Sik Cho[1] · Kil Ho Cho[2]

Abstract

In this paper, we consider two components system which have bivariate weibull model with bivariate type I censored data. We proposed maximum likelihood estimator and relative frequency estimator for the reliability of series system. Also, we construct approximate confidence intervals for the reliability based on the two proposed estimators. And we present a numerical study.

Keywords : Bivariate Type I censored data, Bivariate weibull model, Confidence interval, maximum likelihood estimator, relative frequency estimator, Reliability, Series system.

1. 서론

두 개의 부품이 직렬구조로 구성되어 있는 시스템에서 두 부품의 수명시간을 (X, Y)로 둔다면, X와 Y는 일반적으로 서로 종속적인 확률변수로 가정하는 것이 현실적인 경우가 많다. 이는 두 개의 부품을 가지는 시스템에서 한 부품이 고장나면 고장난 부품이 분담하던 부하가 정상부품에 전가되어 정상부품의 고장률에 영향을 미치기 때문이다. 예를 들어 사람의 양쪽 눈, 양쪽 콩팥 등 두 부품이 쌍으로 이루어진 시스템을 생각하면 각 쌍들의 수명은 서로 종속적인 관계에 있다.

이와 같이 부품의 수명이 서로 종속관계에 있는 시스템의 수명시간에 대한 모형으로서 Freund(1961), Marshall과 Olkin(1967), Block과 Basu(1974)등은 지수분포에 기초한 이변량 지수모형를 제안하면서 그 분포의 여러 가지 중요한 성질을 밝혔다. Lu(1989, 1992)와 Lu와 Bhattacharyya(1988, 1990)는 Freund와 Marshall-Olkin의 이

---

1) Corresponding Author. Associate Professor, Department of Statistical Information Science, Kyungsung University, Busan, 608-736, Korea.
E-mail : jscho@star.ks.ac.kr

2) Professor, Department of Statistics, Kyungpook National University, Daegu, 702-701, Korea.

변량 지수모형을 확장한 모형으로서, 수명모형에서 폭넓게 적용할 수 있는 이변량 와이블(BVW : bivariate weibull) 모형을 소개하면서 여러 가지 성질들을 밝혔다. Cho, Cha 그리고 Lee(2003), Cho, Kim 그리고 Kang(2003)은 완전 자료 및 일변량 중단자료로 관측된 경우 시스템의 신뢰도를 추정하는 문제를 연구하였다.

한편, 현실적으로 부품들의 수명이 실험자의 의도에 의해서 또는 실험환경의 제약에 의해서 두 부품에 대한 중단시간이 다른 제 1종 이변량 중단된 자료(bivariate type I censored data)로 관찰되는 경우가 많이 발생한다. 예를 들어 두 부품의 수명이 동일한 분포를 갖지 않는 경우 두 부품의 중단시간을 일변량 중단모형보다 이변량 중단모형으로 하는 것이 타당하다. 여기서 제 1종 이변량 중단모형에서 두 부품의 중단시간이 서로 같을 경우는 제 1종 일변량 중단모형이 된다.

본 논문에서는 이변량 와이블모형을 따르는 두 개의 부품으로 구성된 직렬 시스템에서, 수명시간들이 제 1종 이변량 중단된 자료(bivariate type I censored data)로 관찰되는 경우, 시스템의 신뢰도에 대한 최우추정량 및 상대도수에 기초한 추정량을 각각 구하고, 그 추정량의 근사적 정규성을 밝힌다. 또한 추정량들의 근사적 정규분포에 기초해서 직렬시스템의 신뢰도에 대한 근사적 신뢰구간을 구하고 몬테칼로 모의실험을 통하여 제안된 두 추정법들을 각각 비교한다.

2. 개요

확률변수 (X, Y)를 두 부품의 수명시간이라 하자. 그리고 수명시간에 대한 분포를 모수 $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \rho)$인 BVW 모형을 따른다고 가정한다면 결합확률밀도 함수는 식 (1)과 같이 주어진다.

$$
\begin{aligned}
&f(x, y; \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \rho) \\
&= \begin{cases} \zeta_1(\zeta_2+\zeta_3)\rho^2 x^{\rho-1} y^{\rho-1}\exp[-\zeta_1 x^\rho - (\zeta_2+\zeta_3)y^\rho], & 0<x<y<\infty, \\ \zeta_2(\zeta_1+\zeta_3)\rho^2 x^{\rho-1} y^{\rho-1}\exp[-(\zeta_1+\zeta_3)x^\rho - \zeta_2 y^\rho], & 0<y<x<\infty, \\ \zeta_3 \rho x^{\rho-1}\exp[-\zeta x^\rho], & 0<x=y<\infty, \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

여기서 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \rho > 0$ 이고, $\zeta = \zeta_1+\zeta_2+\zeta_3$이다.

그러면 (X, Y)에 대한 결합 신뢰도 함수는 식 (2)와 같이 주어지며,

$$
\begin{aligned}
\overline{F}(x, y) &= P(X>x,\ Y>y) \\
&= \exp[-(\zeta_1 x^\rho + \zeta_2 y^\rho + \zeta_3 \max(x, y)^\rho)],
\end{aligned}
\tag{2}
$$

(X, Y) 에 대한 조건부 신뢰도 함수는 각각 식(3)과 식(4)로 주어진다.

$$
\begin{aligned}
\overline{F}_{X \mid Y=y}(x) &= P(X>x \mid Y=y) \\
&= \begin{cases} \exp(-\zeta_1 x^\rho), & y>x \\ \zeta_2(\zeta_2+\zeta_3)^{-1}\exp(-(\zeta_1+\zeta_3)x^\rho + \zeta_3 y^\rho), & x \ge y, \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$\begin{aligned}\overline{F}_{Y\mid X=x}(y) &= P(Y>y\mid X=x)\\ &= \begin{cases}\exp(-\zeta_2 y^{\rho}), & x>y\\ \zeta_1(\zeta_1+\zeta_3)^{-1}\exp(-(\zeta_2+\zeta_3)y^{\rho}+\zeta_3 x^{\rho}), & x\le y.\end{cases}\end{aligned} \tag{4}$$

위의 식 (1)에서 $\zeta_1=\zeta_2$이면 두 부품의 수명시간에 대한 분포는 동일하며, $\zeta_3=0$이면 (X,Y)는 서로 독립인 와이블 분포를 따른다. 또한 $\rho=1$인 경우, (X,Y)는 이변량 지수분포와 동일하다.

한편, 임무시간 x_o에 대해서 직렬시스템의 신뢰도는 식 (5)와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}R &= P[\min(X,Y) > x_o]\\ &= \overline{F}(x_o,x_o) = \exp[-\zeta x_o^{\rho}].\end{aligned} \tag{5}$$

$j=1,2;\ k=1,2,3;\ i=1,2,\cdots,n$에 대하여 본 논문에서 사용되는 기호들을 소개하면 다음과 같다.

(1) (c_x, c_y) : 시스템의 i번째 관찰치의 이변량 중단시간.

(2) $G_{1i}=I(X_i>c_x)$, $G_{2i}=I(Y_i>c_y)$, $G^*_{ji}=1-G_{ji}$.

(3) $R_{1i}=I(X_i<Y_i)$, $R_{2i}=I(X_i>Y_i)$, $R_{3i}=I(X_i=Y_i)$, $R^*_{ki}=1-R_{ki}$.

(4) $\underset{\sim}{\zeta}=(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$.

제 1종 이변량 중단된 자료가 관찰되는 경우, 각각의 부품들에 대해서 다음과 같은 세 가지 경우가 발생할 수 있다.

(1) 두 개의 부품들이 모두 관찰되는 경우($G^*_{1i}G^*_{2i}=1$).

(2) 하나의 부품만 관찰되고 다른 하나의 부품은 중단되는 경우($G_{1i}G^*_{2i}+G^*_{1i}G_{2i}=1$).

(3) 두 개의 부품들이 모두 중단되는 경우($G_{1i}G_{2i}=1$).

따라서 부품들의 i번째 수명시간 (x_i,y_i)은 식 (6)과 같이 관찰된다.

$$(x_i,y_i) = \begin{cases}(x_i,y_i), & x_i<c_x\ ,\ y_i<c_y\\ (c_x,y_i), & x_i>c_x\ ,\ y_i<c_x\\ (x_i,c_y), & x_i<c_x\ ,\ y_i>c_y\\ (c_x,c_y), & x_i>c_x\ ,\ y_i>c_y\ ,\end{cases} \tag{6}$$

여기서 중단시간 c_x와 c_y, $i=1,2,\cdots,n$는 미리 정해진 값이며, 특히 $c_x=c_y$인 경우는 제 1종 일변량 중단모형이 된다.

따라서 우도함수는 식 (7)과 같이 계산될 수 있다.

$$L(\underset{\sim}{\zeta})=\prod_{i=1}^{n}\{[f(x_i,y_i)]^{G^*_{1i}G^*_{2i}}\cdot[\overline{F}(x_i,y_i)]^{G_{1i}G_{2i}}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot [\ \overline{F}_{X \mid Y=y}(x_i) f_Y(y_i)]^{G_{1i}G_{2i}^*} \cdot [\ \overline{F}_{Y \mid X=x}(y_i) f_X(x_i)]^{G_{1i}^* G_{2i}} \}^{(R_{1i}+R_{2i}+R_{3i})} \\
&= \zeta_1^{D_1} \zeta_2^{D_2} \zeta_3^{D_3} (\zeta_1+\zeta_3)^{D_4} (\zeta_2+\zeta_3)^{D_5} \rho^{D_6} \\
&\cdot x_i^{(\rho-1)G_{1i}^*} y_i^{(\rho-1)G_{2i}^*(1-R_{3i}G_{1i}^*)} \exp[-\zeta_1 x_s - \zeta_2 y_s - \zeta_3 (x_s + y_s - t_s)], \qquad (7)
\end{aligned}
$$

여기서 $f_X(x) = \rho(\zeta_1+\zeta_3) x_1^{\rho-1} \cdot \exp(-(\zeta_1+\zeta_3)x^\rho)$,

$f_Y(y) = \rho(\zeta_2+\zeta_3) y^{\rho-1} \cdot \exp(-(\zeta_2+\zeta_3)y^\rho)$,

$D_1 = \sum_{i=1}^n (R_{1i}G_{1i}^*G_{2i}^* + R_{2i}^*G_{1i}^*G_{2i})$, $D_2 = \sum_{i=1}^n (R_{2i}G_{1i}^*G_{2i}^* + R_{1i}^*G_{1i}G_{2i}^*)$,

$D_3 = \sum_{i=1}^n R_{3i}G_{1i}^*G_{2i}^*$, $D_4 = \sum_{i=1}^n R_{2i}G_{1i}^*$, $D_5 = \sum_{i=1}^n R_{1i}G_{2i}^*$,

$D_6 = \sum_{i=1}^n \{R_{3i}^*G_{1i}^*G_{2i}^* + (1-G_{1i}G_{2i})\}$, $x_s = \sum_{i=1}^n x_i^\rho$, $y_s = \sum_{i=1}^n y_i^\rho$, $t_s = \sum_{i=1}^n \min(x_i, y_i)^\rho$.

그리고 $D_1, D_2, \cdots, D_6$는 확률변수이며, 이들의 기대값은 다음과 같이 계산되어 진다. 먼저 $E(D_1) = \sum_{i=1}^n E(R_{1i}G_{1i}^*G_{2i}^* + R_{2i}^*G_{1i}^*G_{2i})$이므로, 각각의 요소에 대해서 기대값을 계산하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
E(R_{1i}G_{1i}^*G_{2i}^*) &= P(0 < X_i < c_x,\ 0 < Y_i < c_y,\ X_i < Y_i) \\
&= \int_0^{c_x} \int_x^{c_y} \zeta_1(\zeta_2+\zeta_3)\rho^2 x^{\rho-1} y^{\rho-1} \exp(-\zeta_1 x^\rho - (\zeta_2+\zeta_3)y^\rho)\, dy dx \\
&= \zeta_1/\zeta - \zeta_1 \exp(-\zeta\, c^\rho{}_x)/\zeta + \exp(-\zeta\, c^\rho{}_y) - \exp(-(\zeta_2+\zeta_3)\, c^\rho{}_y),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(R_{2i}^*G_{1i}^*G_{2i}) &= E(R_{1i}G_{1i}^*G_{2i} + R_{3i}G_{1i}^*G_{2i}) \\
&= P(X_i < c_x,\ Y_i > c_y,\ X_i < Y_i) + P(X_i < c_x,\ Y_i > c_y,\ X_i = Y_i) \\
&= \int_{t_{x_{2i}}}^{\infty} \int_0^{c_x} \rho^2 x_1^{\rho-1} x_2^{\rho-1} \zeta_1(\zeta_2+\zeta_3) \exp(-\zeta_1 x_1^\rho - (\zeta_2+\zeta_3)x_2^\rho)\, dx_1 dx_2 \cdot I(c_x < t_{x_{2i}}) \\
&\quad + \int_{c_y}^{c_x} \zeta_3 \rho x_1^{\rho-1} \exp(-\zeta x_1^\rho)\, dx_1 \cdot I(c_y < c_x) \\
&= (1 - \exp(-\zeta_1\, c^\rho{}_x)) \cdot \exp(-(\zeta_2+\zeta_3)\, c^\rho{}_y) \cdot I(c_x < c_y) \\
&\quad + \zeta_3(\exp(-\zeta\, c^\rho{}_y) - \exp(-\zeta\, c^\rho{}_x))/\zeta \cdot I(c_y < c_x).
\end{aligned}
$$

따라서,

$$
\begin{aligned}
E(D_1) = \sum_{i=1}^n \{ &\zeta_1/\zeta - \zeta_1 \exp(-\zeta\, c^\rho{}_x)/\zeta + \exp(-\zeta\, c^\rho{}_y) - \exp(-(\zeta_2+\zeta_3)\, c^\rho{}_y) \\
&+ (1 - \exp(-\zeta_1\, c^\rho{}_x)) \cdot \exp(-(\zeta_2+\zeta_3)\, c^\rho{}_y) \cdot I(c_x < c_y)
\end{aligned}
$$

$$+\zeta_3(\exp(-\zeta c^{\rho}{}_y)-\exp(-\zeta c^{\rho}{}_x))/\zeta \cdot I(c_y < c_x)\}.$$

같은 방법으로 계산을 한다면,

$$E(D_2)=\sum_{i=1}^{n}\{\zeta_2/\zeta-\zeta_2\exp(-\zeta c^{\rho}{}_y)/\zeta+\exp(-(\zeta_1+\zeta_3)c^{\rho}{}_x-\zeta_2 c^{\rho}{}_y)$$
$$-\exp(-(\zeta_1+\zeta_3)c^{\rho}{}_x)$$
$$+(1-\exp(-\zeta_2 c^{\rho}{}_y))\cdot\exp(-(\zeta_1+\zeta_3)c^{\rho}{}_x)\cdot I(t_{y_i} < t_{x_i})$$
$$+\zeta_3(\exp(-\zeta c^{\rho}{}_x)-\exp(-\zeta c^{\rho}{}_y)))/\zeta\cdot I(c_x < c_y)\},$$

$$E(D_3)=\sum_{i=1}^{n}\{(\zeta_3-\zeta_3\exp(-\zeta\min(c^{\rho}{}_x,\ c^{\rho}{}_y)))/\zeta\},$$

$$E(D_4)=\sum_{i=1}^{n}\{\zeta_2/\zeta-\zeta_2\exp(-\zeta c^{\rho}{}_y)/\zeta+\exp(-(\zeta_1+\zeta_3)c^{\rho}{}_x-\zeta_2 c^{\rho}{}_y)$$
$$-\exp(-(\zeta_1+\zeta_3)c^{\rho}{}_x)+[\exp(-\zeta_2 c^{\rho}{}_y)\cdot[1-\exp(-(\zeta_1+\zeta_3)c^{\rho}{}_x)]$$
$$+(\zeta_1+\zeta_3)\cdot(\exp(-\zeta c^{\rho}{}_x)-1)/\zeta]\cdot I(c_x > c_y)\},$$

$$E(D_5)=\sum_{i=1}^{n}\{\zeta_1/\zeta-\zeta_1\exp(-\zeta c^{\rho}{}_x)/\zeta+\exp(-\zeta c^{\rho}{}_y)-\exp(-(\zeta_2+\zeta_3)c^{\rho}{}_y)$$
$$+\zeta_1\exp(-\zeta c^{\rho}{}_x)/\zeta-\exp(-(\zeta_2+\zeta_3)c^{\rho}{}_y-\zeta_1 c^{\rho}{}_x)\}.$$

본 논문에서는 고정된 ρ 값에 대해서만 초점을 맞추고자 한다. 그러면 최우추정량을 구하기 위한 로그-우도함수는 식 (8)과 같이 주어진다.

$$\log L(\underset{\sim}{\zeta})=D_1\log\zeta_1+D_2\log\zeta_2+D_3\log\zeta_3+D_4\log(\zeta_1+\zeta_3)+D_5\log(\zeta_2+\zeta_3)$$
$$+D_6\log(\rho)+\sum_{i=1}^{n}\{(\rho-1)G^{*}_{1i}\log(x_i)+(\rho-1)G_{2i}(1-R_{3i}G^{*}_{1i})\log(y_i)\}$$
$$-\zeta_1 x_s-\zeta_2 y_s-\zeta_3(x_s+y_s-t_s). \tag{8}$$

따라서 식 (8)의 로그-우도함수를 모수들에 대해서 일차 편미분한 우도방정식은 각각 식 (9) - 식 (11)과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\log L(\underset{\sim}{\zeta})=\frac{D_1}{\zeta_1}+\frac{D_4}{\zeta_1+\zeta_3}-x_s=0. \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\log L(\underset{\sim}{\zeta})=\frac{D_2}{\zeta_2}+\frac{D_5}{\zeta_2+\zeta_3}-y_s=0. \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta_3}\log L(\underset{\sim}{\zeta})=\frac{D_3}{\zeta_3}+\frac{D_4}{\zeta_1+\zeta_3}+\frac{D_5}{\zeta_2+\zeta_3}-(x_s+y_s-t_s)=0. \tag{11}$$

모수 $\underset{\sim}{\zeta}$에 대한 최우추정량 $\hat{\underset{\sim}{\zeta}}$은 위의 우도방정식 (9)-(11)을 뉴턴-랍슨과 같은 수치해석적 방법에 의해 얻을 수 있다.

따라서 $\sqrt{n}\ (\hat{\underset{\sim}{\zeta}}^T-\underset{\sim}{\zeta}^T)$의 분포는 표본의 크기가 증가하면서 근사적으로 평균벡터가 영이고 분산-공분산행렬이 $I^{-1}(\underset{\sim}{\zeta})$인 다변량 정규분포를 따름을 알 수 있다

(Lehmann(1983), 6장 참조).
그리고 피셔의 정보행렬은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$I(\zeta)=((I_{ij}))$, 여기서 $I_{ij}=E\left[-\frac{\partial^2}{\partial\zeta_i\partial\zeta_j}\log L(\zeta)\right]$; $i,j=1,2,3$이며,

$$I_{11}=E(D_1)/\zeta_1^2+E(D_4)/(\zeta_1+\zeta_3)^2,\quad I_{12}=0,\quad I_{13}=E(D_4)/(\zeta_1+\zeta_3)^2,$$
$$I_{22}=E(D_2)/\zeta_2^2+E(D_5)/(\zeta_2+\zeta_3)^2,\ I_{23}=E(D_5)/(\zeta_2+\zeta_3)^2,$$
$$I_{33}=E(D_3)/\zeta_3^2+E(D_4)/(\zeta_1+\zeta_3)^2+E(D_5)/(\zeta_2+\zeta_3)^2.$$

3. 시스템의 신뢰도 추정

이 장에서는 직렬시스템의 신뢰도 R에 대한 최우 추정량 및 상대빈도 추정량을 제안하고자 한다. 또한 이 신뢰도에 대한 근사적 신뢰구간을 최우추정량 및 상대빈도 추정량에 기초해서 각각 유도하고자 한다.

먼저 임무시간 x_o에 대해서, 모수 $\underset{\sim}{\zeta}$에 대한 최우추정치 $\hat{\underset{\sim}{\zeta}}$에 기초해서 시스템의 신뢰도에 대한 최우추정치는 식 (12)과 같이 주어진다.

$$\hat{R}_{MLE}=\exp[-\hat{\zeta}\cdot x_o^{\rho}],\quad \hat{\zeta}=\hat{\zeta}_1+\hat{\zeta}_2+\hat{\zeta}_3. \tag{12}$$

최우추정량의 일치성과 델타 방법을 적용한다면, $\hat{R}_{MLE}$의 분포는 근사적으로 평균이 R이고 분산이 $\Xi\cdot[I^{-1}(\underset{\sim}{\zeta})/n]\cdot\Xi'$인 정규분포를 따름을 알 수 있다.
여기서 $\Xi=\left(-x_o^{\rho}\cdot\exp(-\zeta x_o^{\rho}),\ -x_o^{\rho}\cdot\exp(-\zeta x_o^{\rho}),\ -x_o^{\rho}\cdot\exp(-\zeta x_o^{\rho})\right)$이다.

그러므로, 최우추정량에 기초한 R의 $100(1-\alpha)\%$ 근사적 신뢰구간은 식 (13)과 같이 주어진다.

$$\left(\hat{R}_{1M}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\hat{\Xi}\cdot I^{-1}(\hat{\underset{\sim}{\zeta}})\cdot\hat{\Xi}'/n},\ \hat{R}_{1M}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\hat{\Xi}\cdot I^{-1}(\hat{\underset{\sim}{\zeta}})\cdot\hat{\Xi}'/n}\right), \tag{13}$$

여기서 $\hat{\Xi}=\left(-x_o^{\rho}\cdot\exp(-\hat{\zeta}x_o^{\rho}),\ -x_o^{\rho}\cdot\exp(-\hat{\zeta}x_o^{\rho}),\ -x_o^{\rho}\cdot\exp(-\hat{\zeta}x_o^{\rho})\right)$이고, z_α는 표준정규분포의 $100\cdot\alpha$백분율을 나타낸다.

다음으로 상대빈도 추정치에 기초해서 직렬시스템의 신뢰도에 대한 추정량과 근사적 신뢰구간을 구성해 보자. $|K|$을 표본에서 $\min(x_i,y_i)>x_o$인 개수라 한다면 $|K|$의 분포는 이항분포 (n,R)를 따름을 알 수 있다. 따라서 $|K|$에 기초해서 R에 대한 상대빈도 추정량을 식 (14)와 같이 계산할 수 있다.

$$\hat{R}_{RFE}=|K|/n. \tag{14}$$

여기서 $\hat{R}_{RFE}=|K|/n$의 분포는 근사적으로 평균이 R이고 분산이 $R(1-R)/n$인 정규분포를 따름을 알 수 있다. 따라서 상대빈도 추정량에 기초한 R의 $100(1-\alpha)\%$ 근사적 신뢰구간은 식 (15)과 같이 구성할 수 있다.

$$\left(\hat{R}_{RFE} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{R}_{RFE} \cdot (1 - \hat{R}_{RFE})/n}\ ,\ \hat{R}_{RFE} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{R}_{RFE} \cdot (1 - \hat{R}_{RFE})/n} \right). \tag{15}$$

4. 모의실험

이 장에서는 난수생성기에 의해 생성된 가상자료를 이용하여 3장에서 구성한 두 가지의 추정치들과 근사적 신뢰구간들을 비교하고자 한다.

먼저 모수 ($\zeta_1 = 1.5,\ \zeta_2 = 1.4,\ \zeta_3 = 0.2,\ \rho = 2.0$)인 이변량 와이블 분포로부터 표본크기 30인 두 부품의 수명시간에 해당하는 난수를 발생시켰다. 제 1종 이변량 중단시간은 $c_x = 1.224,\ c_y = 1.183$로 설정하였으며, 관측된 자료는 아래 <표>와 같다. 여기서 *는 제 1종 이변량 중단된 자료를 나타낸다.

<표>의 자료로부터 모수에 대한 최우추정량은 $\hat{\zeta}_1 = 1.5472$, $\hat{\zeta}_2 = 1.4298$, $\hat{\zeta}_3 = 0.2011$와 같이 계산되며, $|K| = 26$으로 계산된다. 이러한 모수들의 최우추정치 $\hat{\underset{\sim}{\zeta}}$로부터 직렬시스템의 신뢰도는 식 (12)에 의해서 $\hat{R}_{MLE} = 0.8806$로 추정되며, 95% 근사적 신뢰구간은 식 (13)에 의해서 (0.8500, 0.9112)로 계산된다.

같은 방법으로 상대도수에 기초한 추정치는 식 (14)에 의해서 $\hat{R}_{RFE} = 0.8666$로 계산되며, 95% 근사적 신뢰구간은 식 (15)에 의해서 (0.7450, 0.9883)로 계산된다.

위의 결과들로부터 두 가지 추정법(최우추정치 및 상대도수) 각각을 비교해 보면, 상대도수 추정량에 비해서 최우추정량이 다소 좋은 결과를 보임을 알 수 있다.

그러나 모수의 값, 중단비율 및 표본크기 등에 대한 다양한 조합에 대해서도 본 논문에서 제안한 두 가지 추정량의 효율성을 비교하는 것도 의미가 있으며, 다른 이변량 수명분포로 확장해서 제안된 추정량을 적용하는 연구는 향후 과제로 남겨두고자 한다.

<표> 이변량 와이블 분포로부터 생성된 자료

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	0.4083	0.3199	11	0.3241	0.5148	21	0.6822	0.7936
2	0.7354	0.4891	12	0.7827	0.4182	22	0.0300	1.1832*
3	1.0722	0.8106	13	0.5487	0.1339	23	0.9692	1.1832*
4	0.6453	0.5875	14	0.4381	1.1832*	24	1.0366	0.2821
5	1.2166	0.7953	15	0.6212	0.6649	25	0.5303	0.6050
6	1.2247*	0.9185	16	0.1601	0.7212	26	0.7089	0.4062
7	0.6128	0.4346	17	0.5514	0.2459	27	0.5517	0.5517
8	0.0985	0.0985	18	0.9058	0.3971	28	0.4734	0.8971
9	0.5352	0.3154	19	0.7476	1.1832*	29	0.5134	0.5944
10	0.7827	1.1832*	20	0.6608	0.7463	30	1.2247*	0.6148

참고문헌

1. Block, H. W. and Basu, A. P. (1974). A Continuous Bivariate Exponential Extension, *Journal of the American Statistical Association*, 69, 1031-1037.
2. Cho, J. S., Cha, Y. J., Lee, J. M. (2003). Estimation of System Reliability in Bivariate Weibull Distribution, *Journal of The Korean Data Analysis Society*, Vol. 5(1), 11-16, 2003.
3. Cho, J. S., Kim, H. J., Kang, S. G. (2003). Estimation of Reliabilities in Bivariate Weibull Model under Random Censorship, *Journal of The Korean Data Analysis Society*, Vol. 5(2), 145-152, 2003.
4. Freund, J. E. (1961). A bivariate extension of the exponential distribution, Journal of the American Statistical Association, 971-977.
5. Lehmann, E.L.(1983), *Theory of Point Estimation*, John Wiley and Sons. New York.
6. Lu, J.C. (1989). Weibull extensions of the Freund and Marshall-Olkin bivariate exponential models, *IEEE Transactions on Reliability*, 38, 615-619.
7. Lu, J.C. (1992). Bayes parameter estimation for the bivariate Weibull model of Marshall-Olkin for censored data, *IEEE Transactions on Reliability*, 41(4), 608-615.
8. Lu, J.C. and Bhattacharyya, G.K. (1988). Some bivariate extensions of the Weibull distribution, *Technical Report No. 821, Department of Statistics*, University of Wisconsin, Madison.
9. Lu, J.C. and Bhattacharyya, G.K. (1990). Some new constructions of bivariate Weibull models, *Annals Institute Statistical Mathematics,* 42, 543-559.
10. Marshall, A.W. and Olkin, I. (1967). A Multivariate Exponential Distribution, Journal of the American Statistical Association, 62, 30-44.

[2003년 6월 접수, 2003년 8월 채택]