Journal of Korean
Data & Information Science Society
2003, Vol. 14, No.3 pp. 461 ~469

Reliability for Series and Parallel Systems in Bivariate Pareto Model : Random Censorship Case

Jang Sik Cho[1)]· Kil Ho Cho[2)] · Woo Dong Lee[3)]

Abstract

In this paper, we consider the series and parallel system which include two components. We assume that the lifetimes of two components follow the bivariate Pareto model with random censored data. We obtain the estimators and approximated confidence intervals of the reliabilities for series and parallel systems based on maximum likelihood estimator and the relative frequency, respectively. Also we present a numerical example by giving a data set which is generated by computer.

Key Words : Bivariate Pareto model; Random censored data; Maximum likelihood estimator; Parallel system; Series system.

1. 서 론

두 개의 부품으로 구성된 시스템에서 부품들의 수명시간들을 수학적 계산의 편이성 때문에 상호 독립을 가정하는 경우가 많다. 그러나 공통의 환경적 요인에 의해서 두 부품의 수명이 서로 상관관계가 있는 응용분야에서 현실성이 떨어지는 경우가 많이 있다. 예를 들어 사람의 양쪽 눈, 양쪽 콩팥 등 쌍으로 이루어진 시스템에서, 하나의 기관이 수명을 다 하면 두 개의 기관이 공동으로 분담하던 부하가 나머지 하나의 기관이 모두 부담하기 때문에 위험률이 영향을 받게 된다.

이와 같이 두 부품의 수명시간이 서로 관련이 있는 시스템의 수명시간에 대한 모

1) Corresponding Author. Associate Professor, Department of Statistical Information Science, Kyungsung University, Busan, 608-736, Korea
E-mail : jscho@star.ks.ac.kr

2) Professor, Department of Statistics, Kyungpook National Universtity, Daegu, 702-701, Korea

3) Faculty of Information and Science, Kyungsan University, Kyungsan, 712-715, Korea

형으로서 지수분포에 기초한 이변량 지수모형이 Freund(1961), Marshall과 Olkin(1967), Block과 Basu(1974) 등에 의해서 제안되었다.

그리고 Hanagal과 Kale(1991)은 이변량 지수모형에서 모수에 대한 최우추정량을 기초로 독립성 및 동일성에 대한 근사적 검정법을 제안하였다. 또한 그들은(1992) 시스템 신뢰도에 대한 추정량을 제안하였다.

한편, Lindley와 Singpurwalla(1986)는 실험환경이 변하는 상황까지 고려한 시스템의 수명모형으로서 이변량 파레토(BVP : bivariate pareto) 모형을 제안하면서 여러 가지 성질들을 밝혔다. Bandyapadhyay와 Basu(1990), 그리고 Veenus와 Nair(1994)는 몇 가지 형태의 BVP 모형을 제안하였고, Hanagal(1996)은 다변량 파레토 모형을 소개하였다. 그리고 Jeevanand (1997)는 스트레스-스트렝스의 신뢰도에 대한 베이즈 추정량을 제안하였으며, Cho, Cho와 Cha(2003)는 스트레스-스트렝스 관련성으로부터 신뢰도에 대한 추정량을 제안하였다.

그러나 현실적으로, 부품들의 수명시간이 실험자의 의도에 의해서 또는 실험환경의 제약에 의해서 두 부품에 대한 수명시간이 중단자료로 관찰되는 경우가 많이 발생한다.

본 논문에서는 두 개의 부품으로 구성된 시스템에서, 관찰된 두 부품의 수명시간이 임의 중단된 자료를 포함하는 이변량 파레토 모형을 가정한다. 직렬 시스템 및 병렬 시스템의 신뢰도 각각에 대한 두 가지 종류의 추정량을 제안하고, 두 가지 종류의 추정량에 기초해서 각각의 신뢰도에 대한 근사적 신뢰구간을 유도한다. 그리고 모의실험 자료를 이용하여 제안된 통계량을 계산하였다.

2. 개요

확률변수 (X, Y)를 두 부품의 수명시간이라 하자. 그리고 수명시간에 대한 분포는 모수 $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \delta)$를 갖는 BVP 모형을 따른다고 한다면 결합확률밀도 함수는 식 (1)과 같이 주어진다.

$$f(x, y : \rho_1, \rho_2, \rho_3, \delta) = \begin{cases} \rho_1(\rho_2+\rho_3)\delta^{\rho} x^{-\rho_1-1} y^{-(\rho_2+\rho_3)-1}, & \delta < x < y < \infty, \\ \rho_2(\rho_1+\rho_3)\delta^{\rho} x^{-(\rho_1+\rho_3)-1} y^{-(\rho_2+\rho_3)-1}, & \delta < y < x < \infty, \\ \rho_3 \delta^{\rho} x^{-\rho-1}, \ \delta < x = y < \infty, \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \delta > 0$ 이며 $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$이다.

그리고 (X, Y)에 대한 결합 신뢰도 함수는 식 (2)와 같이 주어진다.

$$\overline{F}(x, y) = P(X > x \ , \ \ Y > y)$$

$$=\left(\frac{x}{\delta}\right)^{-\rho_1}\cdot\left(\frac{y}{\delta}\right)^{-\rho_2}\cdot\max\left(\frac{x}{\delta},\frac{y}{\delta}\right)^{-\rho_3},\quad \delta\le\min(x,y)<\infty. \tag{2}$$

BVP 모형에서 $\delta=1$을 가정한다면, (X, Y)의 결합 신뢰도 함수는 식 (3)과 같이 주어진다.

$$\overline{F}(x,y)=x^{-\rho_1}\cdot y^{-\rho_2}\cdot(\max(x,y))^{-\rho_3}. \tag{3}$$

식 (3)을 제 2종 BVP 모형이라 하고, 식 (2)를 제 1종 BVP 모형이라 한다.

한편, 임무 시간 $z_o>\delta$에 대한 직렬시스템의 신뢰도는 식 (4)와 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} R_S &= P[\min(X, Y) > z_o] \\ &= \overline{F}(z_o, z_o) = [x_o/\delta]^{-\rho}. \end{aligned} \tag{4}$$

또한 임무 시간 $z_o>\delta$에 대한 병렬시스템의 신뢰도를 계산하기 위해서, 우선 $Z=\max(X, Y)$에 대한 분포함수를 계산해야 하는데, 복잡한 수학적 계산 후 아래와 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} H(z) &= P(\max(X, Y)<z_o) \\ &= P(X<z_o, Y<z_o, X<Y)+P(X<z_o, Y<z_o, X>Y) \\ &\quad +P(X<z_o, Y<z_o, X=Y) \\ &= 1-(\delta/z_o)^{\rho_1+\rho_3}-(\delta/z_o)^{\rho_2+\rho_3}+(\delta/z_o)^{\rho}. \end{aligned}$$

따라서 임무 시간 $z_o>\delta$에 대해서 병렬 시스템의 신뢰도는 식 (5)와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} R_P &= P[\max(X, Y)>z_o] \\ &= (\delta/z_o)^{\rho_1+\rho_3}+(\delta/z_o)^{\rho_2+\rho_3}-(\delta/z_o)^{\rho}. \end{aligned} \tag{5}$$

두 개의 부품으로 구성된 시스템을 n개 실험했을 때, i번째 시스템의 수명시간을 (x_i, y_i)라 하고, 임의중단 시간을 t_i라 두자. 또한 임의중단 시간 t_i는 확률밀도 함수 $f(t_i;\delta,\eta)=\eta\delta^{\eta}t_i^{-\eta-1}$, $t_i>\delta$를 갖는 파레토 분포에 따른다고 가정하자. 또한 임의중단 시간과 두 부품의 수명시간은 서로 독립이라 가정하자. 그러면 i번째 관측 자료 (x_i, y_i)는 식 (6)과 같이 구성된다.

$$(x_i, y_i) = \begin{cases} (x_i, y_i), & \text{만약 } \max(x_i, y_i)<t_i \\ (x_i, t_i), & \text{만약 } x_i<t_i<y_i \\ (t_i, y_i), & \text{만약 } y_i<t_i<x_i \\ (t_i, t_i), & \text{만약 } t_i<\min(x_i, y_i). \end{cases} \tag{6}$$

$I(\cdot)$를 지시함수라 하고, $|D_j|$ $(j=1,\cdots,6)$를 아래와 같이 정의하자.

$$|D_1| = \sum_{i=1}^{n} I(x_i < y_i < t_i), \quad |D_2| = \sum_{i=1}^{n} I(y_i < x_i < t_i),$$

$$|D_3| = \sum_{i=1}^{n} I(x_i = y_i < t_i), \quad |D_4| = \sum_{i=1}^{n} I(x_i < t_i < y_i),$$

$$|D_5| = \sum_{i=1}^{n} I(y_i < t_i < x_i), \quad |D_6| = \sum_{i=1}^{n} I(\min(x_i, y_i) > t_i).$$

그러면 복잡한 수학적 계산 후, $|D_j|$ $(j=1,\cdots,6)$에 대한 기대 값은 아래와 같이 계산된다.

$$E(|D_1|) = n\left(\frac{\rho_1}{\rho} + \frac{\eta(\rho_2+\rho_3)}{\rho(\rho+\eta)} - \frac{\eta}{(\rho_2+\rho_3+\eta)}\right),$$

$$E(|D_2|) = n\left(\frac{\rho_2}{\rho} + \frac{\eta(\rho_1+\rho_3)}{\rho(\rho+\eta)} - \frac{\eta}{(\rho_1+\rho_3+\eta)}\right), \quad E(|D_3|) = \frac{n\rho_3}{\rho+\eta},$$

$$E(|D_4|) = n\rho\left(\frac{1}{\eta+\rho_2+\rho_3} - \frac{1}{\rho+\eta}\right),$$

$$E(|D_5|) = n\rho\left(\frac{1}{\eta+\rho_1+\rho_3} - \frac{1}{\rho+\eta}\right), \quad E(|D_6|) = \frac{n\eta}{\rho+\eta}.$$

한편 모수에 대한 최우 추정량을 구하기 위해서 표본 크기 n일 때 우도함수를 구하면 식 (7)과 같이 계산된다.

$$L = \rho_1^{|D_1|+|D_4|} \cdot \rho_2^{|D_2|+|D_5|} \cdot \rho_3^{|D_3|} \cdot (\rho_1+\rho_3)^{|D_2|} \cdot (\rho_2+\rho_3)^{|D_1|}$$

$$\cdot \left[\prod_{i=1}^{n} y_i\right]^{-(\rho_2+1)} \cdot \left[\prod_{i=1}^{n} \max(x_i, y_i)\right]^{-\rho_3} \cdot \left[\prod_{\{i \mid x_i = y_i\}} x_i\right]^{-1} \cdot \delta^{n\rho} \cdot \left[\prod_{i=1}^{n} x_i\right]^{-(\rho_1+1)}$$

$$\cdot \eta^{|D_4|+|D_5|+|D_6|} \cdot \left[\prod_{i=1}^{n} \max(x_i, y_i)\right]^{-\eta}. \tag{7}$$

본 논문에서는 제 2종 이변량 파레토 모형에 대해서 연구의 초점을 맞추고자 한다. 그러면 아래의 (8)-(11)식을 만족하는 우도방정식이 얻어진다.

$$\frac{|D_1|+|D_4|}{\rho_1} + \frac{|D_2|}{\rho_1+\rho_3} - \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) = 0, \tag{8}$$

$$\frac{|D_2|+|D_5|}{\rho_2} + \frac{|D_1|}{\rho_2+\rho_3} - \sum_{i=1}^{n} \log(y_i) = 0, \tag{9}$$

$$\frac{|D_3|}{\rho_3} + \frac{|D_2|}{\rho_1+\rho_3} + \frac{|D_1|}{\rho_2+\rho_3} - \sum_{i=1}^{n} \log(\max(x_i, y_i)) = 0, \tag{10}$$

$$\frac{|D_4|+|D_5|+|D_6|}{\eta}-\sum_{i=1}^{n}\log(\max(x_i,y_i))=0. \tag{11}$$

그러나 위의 우도방정식 (8)-(10)은 쉽게 계산이 되지 않으므로 뉴턴-라프슨과 같은 수치해석적인 방법을 사용하여 모수에 대한 최우추정량 ($\widehat{\rho_1}$, $\widehat{\rho_2}$, $\widehat{\rho_3}$)을 계산할 수 있다. 그리고 Fisher의 정보행렬은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$I(\rho_1,\rho_2,\rho_3)=E\left[\frac{\partial^2 logL}{\partial\rho_i\partial\rho_j}\right]=n((I_{ij}))\ ;\ i,\ j=1,2,3, \tag{12}$$

여기서 $I_{11}=\left(\frac{E(|D_1|)+E(|D_4|)}{n\rho_1^2}+\frac{E(|D_2|)}{n(\rho_1+\rho_3)^2}\right),\ I_{12}=0,$

$$I_{13}=\frac{E(|D_2|)}{n(\rho_1+\rho_3)^2},\ \ I_{22}=\left(\frac{E(|D_2|)+E(|D_5|)}{n\rho_2^2}+\frac{E(|D_1|)}{n(\rho_2+\rho_3)^2}\right),$$

$$I_{23}=\frac{E(|D_1|)}{n(\rho_2+\rho_3)^2},\ \ \ I_{33}=\left(\frac{E(|D_1|)}{n(\rho_2+\rho_3)^2}+\frac{E(|D_2|)}{n(\rho_1+\rho_3)^2}+\frac{E(|D_3|)}{n\rho_3^2}\right).$$

따라서 $\sqrt{n}(\widehat{\underset{\sim}{\rho}}-\underset{\sim}{\rho})$의 분포는 근사적으로 평균벡터가 0 벡터이고 분산 공분산 행렬이 $I^{-1}(\underset{\sim}{\rho})=\frac{1}{n}((I^{ij}))\ ;\ i,j=1,2,3$인 다변량 정규분포를 따름을 알 수 있다. 여기서, $\widehat{\underset{\sim}{\rho}}=(\widehat{\rho_1},\ \widehat{\rho_2},\ \widehat{\rho_3})$이고 $\underset{\sim}{\rho}=(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$이다.

3. 시스템 신뢰도 추정

여기서는 직렬시스템과 병렬시스템 각각의 신뢰도 R_S, R_P에 대한 최우 추정량 및 상대빈도 추정량을 제안하고자 한다. 또한 각각의 신뢰도에 대한 근사적 신뢰구간을 최우추정량 및 상대빈도 추정량에 기초해서 유도하고자 한다.

3.1 직렬시스템의 신뢰도 추정

먼저 직렬 시스템의 신뢰도에 대한 추정량과 근사적 신뢰구간을 구성하는 문제를 생각해 보자. 모수 (ρ_1,ρ_2,ρ_3)에 대한 최우추정량에 기초해서, 임무시간 $z_o > \delta$에 대해서 직렬시스템의 신뢰도에 대한 최우추정량은 식 (11)과 같이 주어진다.

$$\widehat{R}_{S:MLE}=[z_o/\delta]^{-\widehat{\rho}},\ \ \widehat{\rho}=\widehat{\rho_1}+\widehat{\rho_2}+\widehat{\rho_3}. \tag{13}$$

최우추정량의 일치성과 델타 방법을 적용하면 $\widehat{R}_{S:MLE}$의 분포는 평균이 R_S이고 분산이 $\Lambda\cdot[I^{-1}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)/n]\cdot\Lambda'$인 근사적 정규분포를 따른다.(Lehmann (1983)).

여기서 $\Lambda=(-(z_o/\delta)^{-\rho}\cdot\log(z_o/\delta),\ -(z_o/\delta)^{-\rho}\cdot\log(z_o/\delta),$
$-(z_o/\delta)^{-\rho}\cdot\log(z_o/\delta)).$

따라서 최우추정량에 기초한 R_S의 $100(1-\alpha)\%$ 근사적 신뢰구간은 식 (14)와 같이 구성할 수 있다.

$$\Big(\widehat{R}_{S:MLE}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\widehat{\Lambda}\cdot I(\widehat{\rho_1},\widehat{\rho_2},\widehat{\rho_3})\cdot\widehat{\Lambda}'/n},$$
$$\widehat{R}_{S:MLE}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\widehat{\rho}\cdot I(\widehat{\rho_1},\widehat{\rho_2},\widehat{\rho_3})\cdot\widehat{\rho}'/n}\Big), \tag{14}$$

여기서 z_α는 표준정규분포의 $100\cdot\alpha$백분율을 나타낸다. 그리고 $\widehat{\Lambda}=(-(z_o/\delta)^{-\widehat{\rho}}\cdot\log(z_o/\delta),\ -(z_o/\delta)^{-\widehat{\rho}}\cdot\log(z_o/\delta),\ -(z_o/\delta)^{-\widehat{\rho}}\cdot\log(z_o/\delta))$이다.

다음으로 상대빈도에 기초해서 직렬시스템의 신뢰도에 대한 추정량과 근사적 신뢰구간을 구성해 보자. $|K_1|$을 표본에서 $\min(x_i,y_i)>z_o$인 개수라 한다면 $|K_1|$의 분포는 이항분포 (n,R_S)를 따름을 알 수 있다. 따라서 $|K_1|$에 기초해서 R_S에 대한 추정량을 상대빈도인 $\widehat{R}_{S:NE}=|K_1|/n$로 계산할 수 있다. 여기서 $\widehat{R}_{S:NE}=|K_1|/n$의 분포는 근사적으로 평균이 R_S이고 분산이 $R_S(1-R_S)/n$인 정규분포를 따름을 알 수 있다. 따라서 $|K_1|$에 기초한 R_S의 대한 $100(1-\alpha)\%$ 근사적 신뢰구간은 식 (15)과 같이 구성할 수 있다.

$$\Big(\widehat{R}_{S:NE}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\widehat{R}_{S:NE}\cdot(1-\widehat{R}_{S:NE})/n},$$
$$\widehat{R}_{S:NE}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\widehat{R}_{S:NE}\cdot(1-\widehat{R}_{S:NE})/n}\Big). \tag{15}$$

3.2 병렬시스템의 신뢰도 추정

병렬 시스템의 신뢰도 R_P에 대한 추정량과 근사적 신뢰구간을 구성하는 문제를 생각하자. 임무시간 $z_o>\delta$에 대해서 직렬시스템의 신뢰도에 대한 최우추정량은 식 (16)과 같이 주어진다.

$$R_{P:MLE}=(\delta/z_o)^{\widehat{\rho_1}+\widehat{\rho_3}}+(\delta/z_o)^{\widehat{\rho_2}+\widehat{\rho_3}}-(\delta/z_o)^{\widehat{\rho}}. \tag{16}$$

같은 방법으로 $\widehat{R}_{P:MLE}$의 분포는 평균이 R_P이고 분산이 $\Delta\cdot[I^{-1}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)/n]\cdot\Delta'$인 근사적 정규분포를 따른다. 여기서 $\Delta=(\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3)$이며, $\Delta_1=\log(\delta/z_o)\cdot\big((\delta/z_o)^{\rho_1+\rho_3}-(\delta/z_o)^{\rho}\big)$,

$\Delta_2=\log(\delta/z_o)\cdot\big((\delta/z_o)^{\rho_2+\rho_3}-(\delta/z_o)^{\rho}\big)$,

$\Delta_3=\log(\delta/z_o)\cdot\big((\delta/z_o)^{\rho_1+\rho_3}+(\delta/z_o)^{\rho_2+\rho_3}-(\delta/z_o)^{\rho}\big)$.

따라서 최우추정량에 기초한 R_P의 $100(1-\alpha)\%$ 근사적 신뢰구간은 식 (17)와 같이 구성할 수 있다.

$$\Big(\widehat{R}_{2MLE}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\widehat{\Delta}\cdot I(\widehat{\rho_1},\widehat{\rho_2},\widehat{\rho_3})\cdot\widehat{\Delta}'/n},$$

$$\widehat{R}_{2MLE}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\widehat{\Delta}\cdot I(\widehat{\rho_1},\widehat{\rho_2},\widehat{\rho_3})\cdot\widehat{\Delta}'/n}\Big),\quad(17)$$

여기서 $\widehat{\Delta}=(\widehat{\Delta}_1,\widehat{\Delta}_2,\widehat{\Delta}_1)$이며, $\widehat{\Delta_1}=\log(\delta/z_o)\cdot\left((\delta/z_o)^{\widehat{\rho_1}+\widehat{\rho_3}}-(\delta/z_o)^{\widehat{\rho}}\right)$,
$\widehat{\Delta_2}=\log(\delta/z_o)\cdot\left((\delta/z_o)^{\widehat{\rho_2}+\widehat{\rho_3}}-(\delta/z_o)^{\widehat{\rho}}\right)$,
$\widehat{\Delta_3}=\log(\delta/z_o)\cdot\left((\delta/z_o)^{\widehat{\rho_1}+\widehat{\rho_3}}+(\delta/z_o)^{\widehat{\rho_2}+\widehat{\rho_3}}-(\delta/z_o)^{\widehat{\rho}}\right)$이다.

다음으로 상대빈도에 기초한 병렬시스템의 신뢰도에 대한 추정량과 근사적 신뢰구간을 구성해 보자. $|K_2|$을 표본에서 $\max(x_i,y_i)>z_o$인 개수라 한다면 $|K_2|$의 분포는 이항분포 (n,R_P)를 따름을 알 수 있다. 따라서 $|K_2|$에 기초해서 R_P에 대한 추정량을 상대빈도인 $\widehat{R}_{P.NE}=|K_2|/n$로 계산할 수 있다. 여기서 $\widehat{R}_{P.NE}=|K_2|/n$의 분포는 근사적으로 평균이 R_P이고 분산이 $R_P(1-R_P)/n$인 정규분포를 따름을 알 수 있다. 따라서 $|K_2|$에 기초한 R_P의 $100(1-\alpha)\%$ 근사적 신뢰구간은 식 (18)과 같이 구성할 수 있다.

$$\Big(\widehat{R}_{S.NE}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\widehat{R}_{S.NE}\cdot(1-\widehat{R}_{S.NE})/n},$$
$$\widehat{R}_{S.NE}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\widehat{R}_{S.NE}\cdot(1-\widehat{R}_{S.NE})/n}\Big).\quad(18)$$

4. 모의실험

이 장에서는 난수생성기에 의해 생성된 가상자료를 이용하여 3장에서 제안한 직렬 및 병렬 시스템의 신뢰도들에 대한 두 가지의 추정량과 근사적 신뢰구간을 비교하고자 한다. 먼저 모수 ($\rho_1=1.0$, $\rho_2=1.0$, $\rho_3=0.5$, $\delta=1$)인 이변량 파레토 분포로부터 표본크기 30인 난수를 발생시키고, 역시 수명시간에 대응하는 임의중단시간으로 모수가 $\eta=0.3$, $\delta=1.0$인 파레토 분포로부터 표본크기 30인 자료를 독립적으로 생성했다. 그리고 임무시간을 $z_o=1.5$로 설정했다. 그러면 직렬시스템과 병렬시스템의 신뢰도의 참 값은 각각 $R_S=0.3628$, $R_P=0.7257$로 계산된다. 생성된 자료는 아래 <표>과 같다. 여기서 *는 임의중단된 자료를 나타낸다.

먼저 직렬시스템의 신뢰도에 대한 최우추정량과 근사적 신뢰구간을 구해보자. 모수들에 대한 최우추정치는 $\widehat{\rho_1}=0.9292$, $\widehat{\rho_2}=0.9562$, $\widehat{\rho_3}=0.4979$로 계산된다. 따라서 직렬시스템의 신뢰도에 대한 최우추정치와 상대빈도에 기초한 추정치는 각각 $\widehat{R}_{S.MLE}=0.3804$, $\widehat{R}_{S.NE}=0.4333$로 계산된다. 역시 최우추정량과 상대빈도에 기초한 추정량의 신뢰도에 대한 95% 근사적 신뢰구간은 각각 (0.2724, 0.4885)와 (0.2560, 0.6106)로 계산된다.

다음으로 병렬시스템의 신뢰도에 대한 최우추정량과 근사적 신뢰구간을 구해보자. 최우추정량과 상대빈도에 기초해서 직렬시스템의 신뢰도에 대한 추정치들은 각

각 $\widehat{R}_{P.MLE}=0.7347$와 $\widehat{R}_{P.NE}=0.7000$로 계산된다. 역시 이들 추정량들에 기초해서 신뢰도에 대한 95% 근사적 신뢰구간들은 각각 (0.6277, 0.8417)와 (0.5360, 0.8639)로 계산된다.

<표> 이변량 파레토 분포로부터 생성된 자료

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	1.6848	1.1751	11	1.9732	2.3823	21	1.0299*	1.0299*
2	3.5666	2.1349	12	1.6853	1.3431	22	2.7811	1.2649*
3	1.3830	1.3830	13	1.5409	1.3201	23	1.0092*	1.4960
4	1.1151*	1.1151*	14	6.3639	4.0887	24	2.5082	1.2985
5	1.8902	3.1654	15	1.0438	1.8972	25	1.5046*	1.7880
6	1.7049	1.7105	16	1.6986	1.6467	26	1.0155	4.6551
7	1.8696*	1.8696*	17	1.8989*	1.8989*	27	1.0421	1.0421
8	1.9891	1.9891	18	1.2639	1.2639	28	1.8618	2.2186
9	2.5183	1.3629	19	1.2808	1.1221*	29	1.3989	1.3989
10	1.3122	1.0502*	20	2.5336	2.6705	30	2.5805	8.2276

위의 결과들로부터 직렬시스템 및 병렬시스템의 신뢰도에 대한 각각의 근사적 신뢰구간에 대한 결과가 상대빈도에 기초한 추정량에 비해서 최우추정량에 기초한 추정량이 다소 좋은 결과임을 알 수 있다.

모수, 중단비율 및 표본크기에 대한 다양한 조합에 대해서도 본 논문에서 제안한 두 가지 추정량의 효율성을 비교하는 것과 다른 이변량 수명분포로 확장해서 제안된 추정량을 적용하는 연구는 향후 과제로 남겨두고자 한다.

참고문헌

1. Bandyapadhyay, D. and Basu, A.P. (1990). On generalization of a model by Lindley and Singpurwallam, *Advanced Applied Probability*, 22, 498-500.
2. Block, H. W. and Basu, A. P. (1974). A Continuous Bivariate Exponential Extension, *Journal of the American Statistical Association*, 69, 1031-1037.
3. Cho, J. S., Cho, K. H. and Cha, Y. J. (2003). System Reliability From Stress-Strength Relationship in Bivariate Pareto Distribution, *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, Vol. 14(1), 113-118.
4. Freund, J. E. (1961). A bivariate extension of the exponential

distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 971-977.

5. Hanagal,D.D. and Kale, B.K. (1992). Large Sample Tests for Testing Symmetry and Independence in Some Bivariate Exponential Model, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, 21(9), 2625-2643.
6. Hanagal, D.D. (1996). A multivariate Pareto distribution, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, 25(7), 1471-1488.
7. Jeevanand, E.S. (1997). Bayes estimation of $P(X_2 < X_1)$ for a bivariate Pareto distribution, *The Statistician*, 46(1), 93-99.
8. Lehmann, E.L. (1983). *Theory of Point Estimation*, John Wiley and Sons. New York.
9. Lindley, D.V. and Singpurwalla, N.D. (1986). Multivariate distributions for the life lengths of components of a system sharing a common environment, *Journal of Applied Probability*, 23, 418-431.
10. Marshall, A.W. and Olkin, I. (1967). A Multivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 62, 30-44.
11. Veenus, P. and Nair, K.R.M. (1994). Characterization of a bivariate Pareto distribution, *Journal of Indian Statistical Association*, 32, 15-20.

[2003년 4월 접수, 2003년 7월 채택]