

## $\bar{X}$ Control Charts with Variable Sample Sizes and Variable Sampling Intervals

Jaeheon Lee<sup>1)</sup>

### Abstract

Variable sampling rate (VSR) control charts vary the sampling interval and/or the sample size according to value of the control statistic. It is known that  $\bar{X}$  charts with VSR scheme lead to large improvements in performance over those with fixed sampling rate (FSR) scheme. In this paper, we studied  $\bar{X}$  charts with several VSR schemes, and compared their statistical performance each other.

**Key words** : 변량추출간격, 변량추출비, 변량표본크기

### 1. 서론

관리도(control chart)는 공정 변동의 원인이 되는 공정 모수의 변화를 탐지하기 위하여 널리 사용되고 있다. 공정 모수로서 공정 평균의 변화를 탐지하는 관리도 중 가장 대표적인 관리도로는 Shewhart가 제안한  $\bar{X}$  관리도를 들 수 있다. Shewhart의  $\bar{X}$  관리도는 사용하기 간편하고 공정 평균의 큰 변화에는 아주 효율적이라는 장점이 있지만 공정 평균의 작은 변화는 빨리 탐지하지 못한다는 단점을 가지고 있다. 이와 같은 단점 때문에 공정 평균의 작은 변화를 탐지하고자 하는 경우 CUSUM (cumulative sum) 관리도나 EWMA (exponentially weighted moving average) 관리도를 사용하고 있다. 그러나 1980년대 후반부터 공정에서 얻어지는 현재의 관리 통계량(control statistic) 값에 기초하여 다음 시점의 표본추출간격과 표본크기를 변화시킴으로써  $\bar{X}$  관리도의 단점을 보완하는 절차에 대한 연구가 활발하게 진행되고 있다.

관리도에서 표본을 추출하는 전통적인 방법은 고정된 표본추출간격(fixed sampling interval; FSI)에서 고정된 표본크기(fixed sample size; FSS)를 추출하는 고정표본추출비(fixed sampling rate; FSR)를 사용하는 것이다. 이에 반하여 현재의 관리 통계량

---

1) 광주광역시 남구 진월동 592-1 광주대학교 산업정보공학과 부교수  
E-mail : ljh@hosim.gwangju.ac.kr

값을 기초하여 다음 시점의 표본추출비를 변화시키는 관리도를 변량추출비(variable sampling rate; VSR) 관리도라 한다.

VSR 관리도에서 표본추출간격만을 변화시키는 관리도를 변량추출간격(variable sampling interval; VSI) 관리도라 한다. 이 관리도는 공정변화의 징후가 있는 경우에는 짧은 표본추출간격을 사용하고, 그렇지 않은 경우에는 긴 표본추출간격을 사용하는 것이다. VSI  $\bar{X}$  관리도 대한 연구로는 Reynolds et al. (1988), Reynolds와 Arnold (1989), Amin과 Miller (1993), 그리고 Runger와 Montgomery (1993) 등이 있다.

VSR 관리도에서 현재의 관리 통계량 값을 기초하여 다음 시점의 표본크기만을 변화시키는 관리도를 변량표본크기(variable sample size; VSS) 관리도라 한다. 이 관리도는 공정변화의 징후가 있는 경우에는 많은 크기의 표본을 추출하고, 그렇지 않은 경우에는 작은 크기의 표본을 추출하여 공정을 관리하는 것이다. VSS  $\bar{X}$  관리도에 대한 연구로는 Prabhu et al. (1993), Costa (1994), Park과 Reynolds (1994), 그리고 Zimmer et al. (1998) 등이 있다.

현재의 관리 통계량 값을 기초하여 다음 시점의 표본크기와 표본추출간격을 모두 변화시키는 관리도를 VSSVSI 관리도라고 칭하기로 한다. 이 VSSVSI 관리도는 VSS와 VSI 관리도의 방법을 모두 적용시키는 것이다. VSSVSI  $\bar{X}$  관리도에 대한 연구로는 Prabhu et al. (1994), Costa (1997), Park과 Reynolds (1999), 그리고 Lee와 Park (2003) 등이 있다.

본 논문에서는 지금까지 사용되어 온 VSS, VSI, 그리고 VSSVSI 기법에 대하여 설명하고, 이러한 기법들을 사용할 경우 FSR  $\bar{X}$  관리도에 비하여 얼마만큼 효율을 증진시킬 수 있는지 비교하고 분석하고자 한다.

## 2. VSR $\bar{X}$ 관리도의 절차

이번 장에서는 공정에서 추출하는 품질특성치의 분포가 평균  $\mu$ , 분산  $\sigma^2$ 을 갖는 정규분포에 따름을 가정할 때, 공정 평균  $\mu$ 가 목표치  $\mu_0$ 에서 변화하는지를 탐지하는 VSR  $\bar{X}$  관리도의 절차에 대하여 설명하고자 한다.

### 2.1 VSS $\bar{X}$ 관리도

$N_t$ 는 시점  $t$ 에서의 표본크기이고 이 때의 표본평균을  $\bar{X}_t$ 라 할 때, VSS  $\bar{X}$  관리도의 관리 통계량은 이를 표준화시킨

$$Z_t = \sqrt{N_t} \left( \frac{\bar{X}_t - \mu_0}{\sigma} \right)$$

를 사용하며, VSS  $\bar{X}$  관리도의 절차는  $|Z_t|$ 가 미리 설정된 관리한계  $\pm c$ 를 벗어날 경우 이상상태라는 신호를 주게 된다. VSS  $\bar{X}$  관리도에서 매 시점에서의 표본추출

간격은 고정된 값( $h_0$ )을 사용한다.

시점  $t$ 에서의 표본크기  $N_t$ 는 이전 시점에서의 관리 통계량  $Z_{t-1}$  값에 따라 변화하게 되는데, 몇 개의 표본크기를 사용하는 것이 최적인가에 대해서는 알려진 바가 없다. 다만 편의상 2가지의 표본크기를 사용하는 경우가 일반적이며(이를 2-state VSS 관리도라 칭하겠다), Zimmer et al. (1998)은 3가지 표본크기를 사용하는 3-state VSS  $\bar{X}$  관리도를 제안하고 2-state VSS 관리도 비하여 공정 평균의 작은 변화를 탐지하는 경우 더 효율적이라는 연구 결과를 발표하였다.

본 논문에서 사용하고자 하는 VSS  $\bar{X}$  관리도는 2-state, 3-state, 그리고 3-state를 확장한 4-state VSS 방법으로 각 경우에 대한  $N_t$ 는 2-state인 경우에는

$$N_t = \begin{cases} n_1 & \text{만일 } |Z_{t-1}| < c_{S1} \\ n_2 & \text{만일 } c_{S1} \leq |Z_{t-1}| < c \end{cases}$$

3-state인 경우에는

$$N_t = \begin{cases} n_1 & \text{만일 } |Z_{t-1}| < c_{S1} \\ n_2 & \text{만일 } c_{S1} \leq |Z_{t-1}| < c_{S2} \\ n_3 & \text{만일 } c_{S2} \leq |Z_{t-1}| < c \end{cases}$$

그리고 4-state인 경우에는

$$N_t = \begin{cases} n_1 & \text{만일 } |Z_{t-1}| < c_{S1} \\ n_2 & \text{만일 } c_{S1} \leq |Z_{t-1}| < c_{S2} \\ n_3 & \text{만일 } c_{S2} \leq |Z_{t-1}| < c_{S3} \\ n_4 & \text{만일 } c_{S3} \leq |Z_{t-1}| < c \end{cases}$$

로 나타낼 수 있다. 여기서  $n_1 < n_2 < n_3 < n_4$  이고,  $c_{Si}$  들은 표본크기의 값을 결정짓는 영역의 분계선(threshold limit)을 나타낸다.

## 2.2 VSI $\bar{X}$ 관리도

$H_t$ 를 시점  $t-1$ 과  $t$ 간의 표본추출간격이라 할 때, VSI  $\bar{X}$  관리도는 간격  $H_t$  후에 추출한 표본에서 계산된 통계량

$$Z_t = n_0 \left( \frac{\bar{X}_t - \mu_0}{\sigma} \right)$$

를 관리 통계량으로 사용한다. 여기서  $n_0$ 는 고정된 표본크기의 값을 나타낸다.

이전 시점에서의 관리 통계량  $Z_{t-1}$  값에 따라 변화하는  $H_t$ 는 2가지를 사용하는 2-state VSI 방법이 최적의 통계적 효율을 갖는다는 사실이 알려져 있다(Reynolds와 Anold (1989)와 Runger와 Montgomery (1993)을 참조). 따라서 본 논문에서는 2-state VSI인 경우만을 고려하고자 하며, 이 때의  $H_t$ 는

$$H_t = \begin{cases} h_1, & \text{만일 } |Z_{t-1}| < c_I \\ h_2, & \text{만일 } c_I \leq |Z_{t-1}| < c \end{cases}$$

로 나타낼 수 있다. 여기서  $h_2 < h_1$  이고,  $c_I$ 는 표본추출간격의 값을 결정짓는 2가지 영역의 분계선(threshold limit)을 나타낸다.

### 2.3 VSSVSI $\bar{X}$ 관리도

Prabhu et al. (1994)는 2-state VSS와 2-state VSI 방법을 사용한 VSSVSI  $\bar{X}$  관리도를 제안하고, 제안한 관리도가 FSR  $\bar{X}$  관리도, 2-state VSS  $\bar{X}$  관리도, 그리고 2-state VSI  $\bar{X}$  관리도에 비하여 효율적임을 보였다. 본 논문에서는 앞 절에서 설명한 VSS와 VSI 방법을 결합하여 2-state VSS와 2-state VSI 방법, 3-state VSS와 2-state VSI 방법, 그리고 4-state VSS와 2-state VSI 방법을 사용한 VSSVSI  $\bar{X}$  관리도의 절차에 대하여 설명하겠다.

VSSVSI 관리도에서 표본크기에 대한 분계선과 표본추출간격에 대한 분계선이 모두 다를 경우 실제 공정에 적용하기가 너무 복잡하기 때문에 표본크기와 표본추출간격에 대한 분계선에 대하여 제약을 가하는 경우가 일반적이다. Prabhu et al. (1994)도  $c_I = c_{S1}$  을 가정하여 하나의 분계선만을 사용했으며, Lee와 Park (2003)은 3-state VSS와 2-state VSI 방법과 4-state VSS와 2-state VSI 방법을 사용한 VSSVSI  $\bar{X}$  관리도를 제안하고  $c_I = c_{S1}$  을 가정하는 경우가 다른 경우( $c_I = c_{S2}$  또는  $c_I = c_{S3}$ ) 보다 평균의 변화 탐지에 더 효율적임을 보였다. 따라서 본 논문에서 사용하는 모든 VSSVSI  $\bar{X}$  관리도는  $c_I = c_{S1}$  라는 제약조건 하에서 그 절차를 소개하고자 한다.

먼저 2-state VSS와 2-state VSI 방법을 사용한 VSSVSI  $\bar{X}$  관리도의 표본크기  $N_t$ 와 표본추출간격  $H_t$ 는

$$(N_t, H_t) = \begin{cases} (n_1, h_1) & \text{만일 } |Z_{t-1}| < c_{S1} \\ (n_2, h_2) & \text{만일 } c_{S1} \leq |Z_{t-1}| < c \end{cases}$$

3-state VSS와 2-state VSI 방법을 사용할 경우에는

$$(N_t, H_t) = \begin{cases} (n_1, h_1) & \text{만일 } |Z_{t-1}| < c_{S1} \\ (n_2, h_2) & \text{만일 } c_{S1} \leq |Z_{t-1}| < c_{S2} \\ (n_3, h_2) & \text{만일 } c_{S2} \leq |Z_{t-1}| < c \end{cases}$$

그리고 4-state VSS와 2-state VSI 방법을 사용할 경우에는

$$(N_t, H_t) = \begin{cases} (n_1, h_1) & \text{만일 } |Z_{t-1}| < c_{S1} \\ (n_2, h_2) & \text{만일 } c_{S1} \leq |Z_{t-1}| < c_{S2} \\ (n_3, h_2) & \text{만일 } c_{S2} \leq |Z_{t-1}| < c_{S3} \\ (n_4, h_2) & \text{만일 } c_{S3} \leq |Z_{t-1}| < c \end{cases}$$

로 나타낼 수 있다.

### 3. VSR $\bar{X}$ 관리도의 효율

일반적으로 VSR 관리도의 통계적 효율은 표본추출간격이 서로 다를 수 있기 때문에 FSR 관리도에서 주로 사용하는 평균런길이(average run length; ARL) 대신 이상원인이라는 신호까지의 시간으로 측정하는 것이 일반적이다. 신호까지의 평균시간(average time to signal; ATS)은 공정의 시작으로부터 관리도가 신호를 줄 때까지의

평균시간을 의미한다. 공정이 관리상태에서 계산된 ATS는 오경보(false alarm)에 관련된 측도이며, 이상상태에서 계산된 ATS는 공정이  $\mu = \mu_0 + \delta\sigma$ 에서 시작되었을 때 이를 탐지하는 관리도의 효율에 대한 측도가 된다. 그러나 많은 경우에 공정은 관리상태, 즉  $\mu = \mu_0$ 에서 출발하여 진행되다가 어느 시점에서 공정 평균이  $\mu = \mu_0 + \delta\sigma$ 로 이동하는 것이 대부분이다. 이와 같은 경우 관리도의 효율은 이동이 발생한 시점부터 관리도의 이상신호까지의 평균시간으로 측정되어야 한다. 이에 대한 측도로서 SSATS(steady-state ATS)를 사용할 수 있다. 이 SSATS에 대한 자세한 내용은 Reynolds와 Arnold (2001)를 비롯한 기존의 연구를 참조할 수 있다.

SSATS $_{\delta}$ 를 평균이  $\mu_0$ 에서  $\mu_0 + \delta\sigma$ 로 이동한 시점에서 신호까지의 평균시간이라 할 때, SSATS $_{\delta}$ 는 마르코프 연쇄(Markov chain)를 이용하여 계산할 수 있다.  $g$ -state VSS  $\bar{X}$  관리도( $g=2,3,4$ ),  $g$ -state VSI  $\bar{X}$  관리도( $g=2$ ), 그리고  $g$ -state VSS와 2-state VSI 방법을 사용한 VSSVSI  $\bar{X}$  관리도( $g=2,3,4$ )에 대한 마르코프 연쇄는 다음과 같은  $g$ 개의 영역에 해당되는  $g$ 개의 일시적 상태(transient state)를 갖는다.

$$I_i = (-c_i, -c_{i-1}] \cup [c_{i-1}, c_i), \quad i=1, 2, \dots, g,$$

여기서  $c_0=0$  이고, VSS와 VSSVSI  $\bar{X}$  관리도인 경우  $c_i = c_{Si}$  ( $i=1, 2, \dots, g-1$ ),  $c_g = c$ 이며 2-state VSI  $\bar{X}$  관리도인 경우  $c_1 = c_I$ ,  $c_2 = c$ 이다.

$i, j=1, 2, \dots, g$ 에 대하여  $q_{ij}^{\delta} = \Pr(Z_t \in I_j | Z_{t-1} \in I_i, \mu_t = \mu_0 + \delta\sigma)$ 라 할 때, 일시적 상태의 전이확률행렬(transition probability matrix)은  $\mathbf{Q}_{\delta} = [q_{ij}^{\delta}]_{g \times g}$ 로 표현할 수 있다. 주어진  $\delta$ 에 대하여 전이확률  $q_{ij}^{\delta}$ 는 VSS와 VSSVSI  $\bar{X}$  관리도인 경우

$$q_{ij}^{\delta} = \begin{cases} \Phi(c_1 - \sqrt{n_i}\delta) - \Phi(-c_1 - \sqrt{n_i}\delta), & \text{만일 } j=1 \\ \Phi(c_j - \sqrt{n_i}\delta) - \Phi(c_{j-1} - \sqrt{n_i}\delta) \\ \quad + \Phi(-c_{j-1} - \sqrt{n_i}\delta) - \Phi(-c_j - \sqrt{n_i}\delta), & \text{만일 } j=2, \dots, g \end{cases}$$

로 계산되며, 2-state VSI  $\bar{X}$  관리도인 경우에는

$$q_{ij}^{\delta} = \begin{cases} \Phi(c_1 - \sqrt{n_0}\delta) - \Phi(-c_1 - \sqrt{n_0}\delta), & \text{만일 } j=1 \\ \Phi(c_j - \sqrt{n_0}\delta) - \Phi(c_{j-1} - \sqrt{n_0}\delta) \\ \quad + \Phi(-c_{j-1} - \sqrt{n_0}\delta) - \Phi(-c_j - \sqrt{n_0}\delta), & \text{만일 } j=2 \end{cases}$$

로 계산할 수 있다.

마르코프 연쇄의 성질을 이용하면 SSATS $_{\delta}$ 는

$$\text{SSATS}_{\delta} = \mathbf{s}' \{ [\mathbf{I} - \mathbf{Q}_{\delta}]^{-1} - \frac{1}{2} \mathbf{I} \} \mathbf{h}$$

로 나타낼 수 있다(자세한 사항은 Reynolds와 Arnold (2001)를 참조). 여기서

$\mathbf{s}' = (s_1, s_2, \dots, s_g)$ 는 초기확률의 벡터로서 안정상태(steady state)에서의 초기확률  $s_i$ 는

$$s_i = \frac{q_{ii}^0}{q_{i1}^0 + q_{i2}^0 + \dots + q_{ig}^0}, \quad i=1, 2, \dots, g$$

가 사용되며(Prabhu et al. (1994)과 Reynolds와 Arnold (2001)를 참조),  $\mathbf{I}$ 는  $g \times g$ 의 단위행렬(identity matrix), 그리고  $\mathbf{h}$ 는 크기가  $g$ 인 벡터로서 원소가 다음과 같다.

$$\mathbf{h}' = \begin{cases} (h_0, h_0) & , \text{ 2-state VSS 관리도인 경우} \\ (h_0, h_0, h_0) & , \text{ 3-state VSS 관리도인 경우} \\ (h_0, h_0, h_0, h_0) & , \text{ 4-state VSS 관리도인 경우} \\ (h_1, h_2) & , \text{ 2-state VSI 관리도인 경우} \\ (h_1, h_2) & , \text{ 2-state VSS와 2-state VSI인 관리도인 경우} \\ (h_1, h_2, h_2) & , \text{ 3-state VSS와 2-state VSI인 관리도인 경우} \\ (h_1, h_2, h_2, h_2) & , \text{ 4-state VSS와 2-state VSI인 관리도인 경우} \end{cases}.$$

#### 4. 여러 가지 VSR $\bar{X}$ 관리도의 비교

전통적으로 사용하고 있는 FSR 관리도와 본 논문에서 제시된 여러 가지 VSR 관리도의 통계적 효율을 비교하기 위해서는 관리상태에서의 수행 능력을 동일하게 하여야 한다. 이것은 공정이 관리상태일 경우 VSR 관리도의 평균표본크기와 평균표본추출간격을 FSR의 고정된 표본크기와 표본추출간격과 동일한 값으로 설정하며, 오경보율을 동일하게 함으로 달성할 수 있다. 따라서 VSR  $\bar{X}$  관리도를 설계할 때 다음과 같은 3가지 제약조건을 고려할 수 있다.

- [1]  $E[N_t | -c < Z_{t-1} < c, \delta=0] = n_0$ ,
- [2]  $E[H_t | -c < Z_{t-1} < c, \delta=0] = h_0$ ,
- [3]  $ATS_0 = A_0$ .

여기서  $A_0$ 는 관리상태에서 달성하고자 하는 ATS 값이다.

제약조건 [1]과 [2]는 VSR 방법으로 VSS, VSI, 그리고 VSSVSI 중 어느 것을 사용하느냐에 따라 다르게 표현되며, 제약조건 [3]으로부터 관리한계  $c$ 는

$$c = \Phi^{-1} \left[ 1 - \frac{h_0}{2A_0} \right] \quad (1)$$

로 계산할 수 있다. 여기서  $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 누적분포함수를 나타낸다.

##### 4.1 VSS $\bar{X}$ 관리도

VSS  $\bar{X}$  관리도에서 표본추출간격은 항상  $H_t = h_0$ 를 사용하므로 제약조건 [2]는 고려할 필요가 없으며, 제약조건 [1]은 다음과 같이 표현할 수 있다. 2-state인 경우에는

$$2\Phi(c_{S1})(n_1 - n_2) + 2\Phi(c)(n_2 - n_0) = n_1 - n_0$$

이며, 분계선  $c_{S1}$ 은

$$c_{S1} = \Phi^{-1} \left[ \frac{(n_1 - n_0) - 2\Phi(c)(n_2 - n_0)}{2(n_1 - n_2)} \right] \quad (2)$$

로 계산할 수 있다. 유사한 방법으로 3-state인 경우  $c_{SI}$  은

$$c_{SI} = \Phi^{-1} \left[ \frac{(n_1 - n_0) - 2\Phi(c_{S2})(n_2 - n_3) - 2\Phi(c)(n_3 - n_0)}{2(n_1 - n_2)} \right] \quad (3)$$

이고, 4-state인 경우  $c_{SI}$  은

$$c_{SI} = \Phi^{-1} \left[ \frac{(n_1 - n_0) - 2\Phi(c_{S2})(n_2 - n_3) - 2\Phi(c_{S3})(n_3 - n_4) - 2\Phi(c)(n_4 - n_0)}{2(n_1 - n_2)} \right] \quad (4)$$

로 계산할 수 있다.

VSS  $\bar{X}$  관리도의 설계는 주어진  $n_0$ ,  $h_0$ , 그리고  $A_0$  값에 대하여  $SSATS_\delta$ 를 최소로 하는 관리모수들, 즉 표본크기( $n_i$ ), 분계선( $c_{Si}$ ), 그리고 관리한계  $c$ 를 설정하는 것이다. 그런데  $c$ 는 식 (1),  $c_{SI}$ 은 식 (2) 또는 (3) 또는 (4)에 의하여 계산할 수 있으므로, 2-state에서는  $SSATS_\delta$ 를 최소로 하도록  $\{n_1, n_2\}$ , 3-state에서는  $\{n_1, n_2, n_3, c_{S2}\}$ , 그리고 4-state에서는  $\{n_1, n_2, n_3, n_4, c_{S2}, c_{S3}\}$ 를 결정해야 한다.

### 4.2 VSI $\bar{X}$ 관리도

VSI  $\bar{X}$  관리도에서 표본크기는 항상  $N_t = n_0$ 를 사용하므로 제약조건 [1]은 고려할 필요가 없다. 2-state VSI 관리도에서 제약조건 [2]는

$$2\Phi(c_I)(h_1 - h_2) + 2\Phi(c)(h_2 - h_0) = h_1 - h_0$$

로 나타낼 수 있으며, 분계선  $c_I$ 는

$$c_I = \Phi^{-1} \left[ \frac{(h_1 - h_0) - 2\Phi(c)(h_2 - h_0)}{2(h_1 - h_2)} \right] \quad (5)$$

로 계산할 수 있다. 따라서 2-state VSI  $\bar{X}$  관리도의 설계는  $SSATS_\delta$ 를 최소로 하는  $\{h_1, h_2\}$ 를 결정하는 것이다.

### 4.3 VSSVSI $\bar{X}$ 관리도

VSSVSI  $\bar{X}$  관리도는 4.1절의 VSS  $\bar{X}$  관리도와 4.2절의 VSI  $\bar{X}$  관리도의 절차를 병행하는 것이다. 먼저 2-state VSS와 2-state VSI 방법에서  $c_{SI}$ 은 식 (2),  $c_I$ 는 식 (5)로 계산할 수 있으며,  $c_I = c_{SI}$ 이라는 제약조건에서 표본추출간격  $h_1$ 은

$$h_1 = \frac{F_1 + h_2 F_2}{F_2 + n_2 - n_1}$$

로 결정할 수 있다. 여기서

$$\begin{aligned} F_1 &= (n_1 - n_2) \{2\Phi(c)(h_0 - h_2) - h_0\} \\ F_2 &= (n_1 - n_0) - 2\Phi(c)(n_2 - n_0) \end{aligned}$$

이다. 이 경우 최적의 관리모수는  $SSATS_\delta$ 를 최소로 하는  $\{n_1, n_2, h_2\}$ 를 결정하는 것이다.

3-state VSS와 2-state VSI 방법에서  $c_{S1}$ 과  $c_I$ 는 각각 식 (3)과 (5)로 계산되며,  $c_I = c_{S1}$ 이라는 제약조건에서  $h_1$ 은

$$h_1 = \frac{F_1 + h_2 F_2}{F_2 + n_2 - n_1}$$

로 결정할 수 있다. 여기서

$$\begin{aligned} F_1 &= (n_1 - n_2) \{2\Phi(c)(h_0 - h_2) - h_0\} \\ F_2 &= (n_1 - n_0) - 2\Phi(c_{S2})(n_2 - n_3) - 2\Phi(c)(n_3 - n_0) \end{aligned}$$

이다. 이 경우 최적의 관리모수는  $SSATS_\delta$ 를 최소로 하는  $\{n_1, n_2, n_3, h_2, c_{S2}\}$ 를 결정하는 것이다.

4-state VSS와 2-state VSI 방법에서  $c_{S1}$ 과  $c_I$ 는 각각 식 (4)와 (5)로 계산되며,  $c_I = c_{S1}$ 이라는 제약조건에서  $h_1$ 은

$$h_1 = \frac{F_1 + h_2 F_2}{F_2 + n_2 - n_1}$$

로 결정할 수 있다. 여기서

$$\begin{aligned} F_1 &= (n_1 - n_2) \{2\Phi(c)(h_0 - h_2) - h_0\} \\ F_2 &= (n_1 - n_0) - 2\Phi(c_{S2})(n_2 - n_3) - 2\Phi(c_{S3})(n_3 - n_4) - 2\Phi(c)(n_4 - n_0) \end{aligned}$$

이다. 이 경우에는  $SSATS_\delta$ 를 최소로 하는  $\{n_1, n_2, n_3, n_4, h_2, c_{S2}, c_{S3}\}$ 를 결정해야 한다.

#### 4.4 VSR $\bar{X}$ 관리도의 최적모수와 SSATS 비교

여러 가지 VSR  $\bar{X}$  관리도의 비교를 위하여  $\delta$ ,  $n_0$ ,  $h_0$ , 그리고  $A_0$  값은

$$\delta = 0.5, 0.75, 1.0, 1.5, 2.0, \quad n_0 = 3, 5, \quad h_0 = 1, \quad A_0 = 370.4$$

을 사용하였다. 주어진  $\delta$ ,  $n_0$ ,  $h_0$ , 그리고  $A_0$  값에 대하여 여러 가지 VSR  $\bar{X}$  관리도의 최적의 관리모수 값과 이 때의  $SSATS_\delta$  값을  $n_0 = 3$ 인 경우 <표 1>,  $n_0 = 5$ 인 경우 <표 2>에 제시하였다.

비교한 관리도는 FSR  $\bar{X}$  관리도, 3가지 VSS  $\bar{X}$  관리도(2, 3, 4-state), 1가지 VSI  $\bar{X}$  관리도(2-state), 그리고 3가지 VSSVSI 관리도(2-state VSS와 2-state VSI 방법, 3-state VSS와 2-state VSI 방법, 4-state VSS와 2-state VSI 방법)이다. 또한 참고로 공정 평균의 작은 변화에 효율적이라고 알려진 FSR EWMA 관리도에 대하여 제시하였다. FSR EWMA 관리도에서 사용한 관리 통계량은  $E_t = rZ_t + (1-r)E_{t-1}$ 이다. 여기서  $Z_t$ 는  $\bar{X}$  관리도에서 사용한 관리 통계량이며  $r$ 은  $0 < r \leq 1$ 인 가중치를 나타낸다.  $SSATS_\delta$ 를 최소로 하는 최적의 관리모수들은 do-loop를 사용하여 Fortran 프로그램을 수행함으로써 산출하였다. 표본크기의 가능한 범위는 1~50, 표본추



출간격의 범위는 0.1~5.0, 그리고 분계선의 범위는 0.1~3.0으로 한정시켰다. 물론 표본크기와 표본추출간격의 가능한 범위는 실제 공정의 상황에 따라 달라질 수 있을 것이다.

<표 1>과 <표 2>에서 나타난 결과를 정리하면 다음과 같다. 먼저 공정 평균의 변화가 작은 경우( $\delta$ 가 작은 경우) FSR  $\bar{X}$  관리도에 비하여 VSR  $\bar{X}$  관리도를 사용하는 것이 훨씬 빨리 변화를 탐지할 수 있었으며,  $\bar{X}$  관리도에서 VSR 방법을 사용하는 것이 FSR EWMA 관리도 보다 일반적으로 더 효율적인 것으로 나타났다. 또한 VSS와 VSI 방법을 모두 사용한 VSSVSI  $\bar{X}$  관리도가 VSS 또는 VSI  $\bar{X}$  관리도에 비하여 더 효율적이었으며,  $\delta$ 가 작은 경우 VSS 방법이 VSI 방법에 비하여 더 효율적임을 알 수 있다. 그러나  $\delta$ 가 커질수록  $\bar{X}$  관리도에서 FSR 방법에 대한 VSR 방법의 효율의 폭은 점점 줄어드는 것으로 나타났고, 이 사실은  $\delta$ 가 큰 경우 FSR  $\bar{X}$  관리도가 충분히 효율적이므로 당연한 결과라고 판단된다.

VSS  $\bar{X}$  관리도와 VSSVSI  $\bar{X}$  관리도에서  $\delta$ 가 작은 경우 VSS의 state를 증가시킬수록 효율이 좋아짐을 알 수 있으며,  $\delta$ 가 커질수록 state를 증가시키는 것의 장점은 줄어드는 것으로 나타났다.

VSI  $\bar{X}$  관리도에서 표본추출간격  $h_1$ 과  $h_2$ 는 가능한 범위로 제한한 최대값 5.0과 최소값 0.1이 항상 최적인 것으로 나타났는데, 이는 Reynolds와 Arnold (1989)의 연구 결과와 동일한 내용이다. VSSVSI  $\bar{X}$  관리도에서는  $c_I = c_{SI}$ 이라는 제약조건 때문에 긴 표본추출간격  $h_1$ 은 각각 다르게 얻어졌지만, 짧은 표본추출간격  $h_2$ 는 항상 최소값인 0.1이 최적임을 알 수 있었다.

## 5. 결론

생산 공정에서 공정 평균의 변화를 탐지하고자 할 때 Shewhart의  $\bar{X}$  관리도는 그 사용의 편리함 때문에 널리 사용되고 있는 관리도이다. 그러나 평균의 변화가 꾸준하면서도 작게 변화할 경우 효율이 많이 떨어진다는 단점을 가지고 있다.

본 논문에서는 이와 같은 단점을 보완하고 좀 더 효율적으로 공정을 관리할 수 있는 VSR  $\bar{X}$  관리도에 대하여 논의하였다. 지금까지 많은 연구자에 의하여 제안되었던 여러 가지 VSR 기법을 소개하고 SSATS라는 측도를 이용하여 그 효율을 계산하였다. 지금까지의 연구는 그 사용의 간편성 때문에 VSS, VSI, 그리고 VSSVSI 방법에서 2-state를 사용하는 것에 집중되어 있었지만, 최적의 state가 밝혀지지 않은 VSS와 VSSVSI 방법에서 state를 증가시킨 경우에 대한 효율을 알아보는 것은 의미가 있는 일이라 생각된다.

FSR  $\bar{X}$  관리도, FSR EWMA 관리도, 그리고 여러 가지 VSR  $\bar{X}$  관리도들을 비교한 결과 VSR 방법을 사용하는 것이 FSR  $\bar{X}$  관리도의 단점을 충분히 보완해 줌을 알 수 있었다. VSR 방법을 실제 공정에 적용할 때 3개 또는 4개의 표본크기를 사용하는 것은 아주 복잡한 절차일 수 있지만, 공정 평균의 작은 변화가 중요하고 불량에 대한 부담이 큰 경우 증가된 state를 갖는 VSS 또는 VSSVSI  $\bar{X}$  관리도의 사용은

아주 유용한 일이라고 생각된다. 본 논문에서 설명된 여러 가지 VSR 방법의 선택은 실제 공정의 상황에 따라 결정될 수 있을 것이다.

### 참고문헌

1. Amin, R. W. and Miller, R. W. (1993). A robustness study of  $\bar{X}$  charts with variable sampling intervals, *Journal of Quality Technology*, 25, 36-44.
2. Costa, A. F. B. (1994).  $\bar{X}$  charts with variable sample size, *Journal of Quality Technology*, 26, 155-163.
3. Costa, A. F. B. (1997).  $\bar{X}$  charts with variable sample sizes and sampling intervals, *Journal of Quality Technology*, 29, 197-204.
4. Lee, J. and Park, C. (2003). A VSR  $\bar{X}$  chart with multi-state VSS and 2-state VSI scheme, submitted to *Statistics & Probability Letters*.
5. Park, C. and Reynolds, M. R., Jr. (1994). Economic design of a variable sample size  $\bar{X}$ -charts, *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 23, 467-483.
6. Park, C. and Reynolds, M. R., Jr. (1999). Economic design of a variable sampling rate  $\bar{X}$  chart, *Journal of Quality Technology*, 31, 427-443.
7. Prabhu, S. S., Montgomery, D. C., and Runger, G. C. (1994). A combined adaptive sample size and sampling interval  $\bar{X}$  control scheme, *Journal of Quality Technology*, 26, 164-176.
8. Prabhu, S. S., Runger, G. C., and Keats, J. B. (1993). An adaptive sample size  $\bar{X}$  chart, *International Journal of Production Research*, 31, 2895-2909.
9. Reynolds, M. R., Jr., Amin, R. W., Arnold, J. C., and Nachlas, J. A. (1988).  $\bar{X}$  charts with variable sampling interval, *Technometrics*, 30, 181-192.
10. Reynolds, M. R., Jr. and Arnold, J. C. (1989). Optimal Shewhart control charts with variable sampling intervals between samples, *Sequential Analysis*, 8, 51-77.
11. Reynolds, M. R., Jr. and Arnold, J. C. (2001). EWMA control charts with variable sample sizes and variable sampling intervals, *IIE Transactions*, 33, 511-530.
12. Runger, G. C. and Montgomery, D. C. (1993). Adaptive sampling enhancements for Shewhart control charts, *IIE Transactions*, 25, 41-51.
13. Zimmer, L. S., Montgomery, D. C., and Runger, G. C. (1998). Evaluation of a three-state adaptive sample size  $\bar{X}$  control chart, *International Journal of Production Research*, 36, 733-743.

<표 1> 여러 가지 VSR  $\bar{X}$  관리도의 최적모수와 SSATS ( $n_0=3, A_0=370.4$ )

VSR 방법	$\delta$	$n_0$	$h_0$					$c$	SSATS $_{\delta}$				
		$n_1$	$n_2$	$c_{SI}$	$c_{S2}$	$c_{S3}$	$c_I$						
		$n_1$	$h_0$	$c_{SI}$	$c_{S2}$	$c_{S3}$	$c_I$	$c$					
		$n_1$	$h_0$	$c_{SI}$	$c_{S2}$	$c_{S3}$	$c_I$	$c$					
		$n_1$	$h_1$	$c_{SI}$	$c_{S2}$	$c_{S3}$	$c_I$	$c$					
		$n_1$	$h_1$	$c_{SI}$	$c_{S2}$	$c_{S3}$	$c_I$	$c$					
		$n_1$	$h_1$	$c_{SI}$	$c_{S2}$	$c_{S3}$	$c_I$	$c$					
		$n_1$	$h_1$	$c_{SI}$	$c_{S2}$	$c_{S3}$	$c_I$	$c$					
		$n_0$	$h_0$	$r$				$c$					
FSR	0.5	3	1.0					3.0	60.69				
2-VSS		1	34	1.0	1.86				3.0	14.18			
3-VSS		1	22	43	1.76	2.30			3.0	13.43			
4-VSS		1	18	31	47	1.72	2.10	2.50	3.0	13.26			
2-VSI		3			5.0	0.1		0.23	3.0	44.16			
2-VSS & 2-VSI		1	30		1.1	0.1		1.80	3.0	13.04			
3-VSS & 2-VSI		1	16	38				1.65	3.0	12.10			
4-VSS & 2-VSI		1	2	20	39	1.6	0.1	0.85	1.80	2.30	0.85	3.0	11.52
FSR EWMA		3			1.0				2.61	24.05			
FSR		0.75	3	1.0					3.0	22.48			
2-VSS	1		17		1.52				3.0	5.50			
3-VSS	1		9	23		1.30	2.10		3.0	5.05			
4-VSS	1		7	15	25	1.25	1.80	2.30	3.0	4.94			
2-VSI	3				5.0	0.1		0.23	3.0	11.46			
2-VSS & 2-VSI	1		12		1.2	0.1		1.33	3.0	4.18			
3-VSS & 2-VSI	1		3	14		2.0	0.1	0.64	1.70	0.64	3.0	3.39	
4-VSS & 2-VSI	1		2	6	15	3.6	0.1	0.33	1.30	1.90	0.33	3.0	3.13
FSR EWMA	3				1.0				2.75	10.85			
FSR	1.0		3	1.0					3.0	9.76			
2-VSS		2	12		1.63				3.0	3.06			
3-VSS		1	6	15		1.03	1.90		3.0	2.83			
4-VSS		1	4	9	16	0.89	1.50	2.10	3.0	2.77			
2-VSI		3			5.0	0.1		0.23	3.0	3.38			
2-VSS & 2-VSI		1	7		1.4	0.1		0.96	3.0	1.89			
3-VSS & 2-VSI		1	3	10		3.1	0.1	0.39	1.70	0.39	3.0	1.45	
4-VSS & 2-VSI		1	2	5	12	4.8	0.1	0.24	1.10	1.90	0.24	3.0	1.38
FSR EWMA		3			1.0				2.83	5.84			
FSR		1.5	3	1.0					3.0	2.91			
2-VSS	2		8		1.38				3.0	1.47			
3-VSS	2		5	9		1.12	1.90		3.0	1.42			
4-VSS	2		4	7	10	1.03	1.60	2.20	3.0	1.41			
2-VSI	3				5.0	0.1		0.23	3.0	0.79			
2-VSS & 2-VSI	2		4		1.9	0.1		0.67	3.0	0.74			
3-VSS & 2-VSI	2		3	7		4.2	0.1	0.28	1.90	0.28	3.0	0.66	
4-VSS & 2-VSI	2		3	5	8	4.7	0.1	0.25	1.80	2.30	0.25	3.0	0.66
FSR EWMA	3				1.0				2.94	2.19			
FSR	2.0		3	1.0					3.0	1.47			
2-VSS		2	4		0.67				3.0	0.94			
3-VSS		2	3	6		0.16	2.00		3.0	0.88			
4-VSS		2	3	4	6	0.17	1.70	2.20	3.0	0.87			
2-VSI		3			5.0	0.1		0.23	3.0	0.55			
2-VSS & 2-VSI		2	4		1.9	0.1		0.67	3.0	0.56			
3-VSS & 2-VSI		2	3	6		4.4	0.1	0.26	1.80	0.26	3.0	0.54	
4-VSS & 2-VSI		2	3	4	7	4.9	0.1	0.24	1.50	2.30	0.24	3.0	0.54
FSR EWMA		3			1.0				3.0	0.97			

<표 2> 여러 가지 VSR  $\bar{X}$  관리도의 최적모수와 SSATS ( $n_0=5, A_0=370.4$ )

VSR 방법	$\delta$	$n_0$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$h_0$	$h_1$	$h_2$	$c_{SI}$	$c_{S2}$	$c_{S3}$	$c_I$	$c$	SSATS $_{\delta}$	
		$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$h_0$	$h_1$	$h_2$	$c_{SI}$	$c_{S2}$	$c_{S3}$	$c_I$	$c$			
FSR	0.5	5					1.0							3.0	33.40	
2-VSS			2	36				1.0		1.69					3.0	7.74
3-VSS			1	18	46			1.0		1.33	2.10				3.0	7.01
4-VSS			1	13	28	50		1.0		1.24	1.80	2.30			3.0	6.84
2-VSI			5					5.0	0.1				0.23		3.0	19.97
2-VSS & 2-VSI			1	27				1.2	0.1	1.42				1.42	3.0	6.42
3-VSS & 2-VSI			1	9	35			1.4	0.1	0.99	1.90			0.99	3.0	5.35
4-VSS & 2-VSI			1	2	14	35		4.6	0.1	0.25	1.30	2.00		0.25	3.0	4.91
FSR EWMA			5					1.0		0.38					2.70	14.72
FSR		0.75	5					1.0							3.0	10.76
2-VSS			3	21				1.0		1.58					3.0	3.22
3-VSS			2	10	26			1.0		1.11	1.90				3.0	3.00
4-VSS			2	8	16	30		1.0		1.04	1.60	2.20			3.0	2.94
2-VSI			5					5.0	0.1				0.23		3.0	3.90
2-VSS & 2-VSI			2	13				1.3	0.1	1.09				1.09	3.0	2.04
3-VSS & 2-VSI			2	4	17			4.7	0.1	0.25	1.60			0.25	3.0	1.57
4-VSS & 2-VSI			2	4	8	15		4.6	0.1	0.25	1.20	1.80		0.25	3.0	1.51
FSR EWMA			5					1.0		0.55					2.82	6.27
FSR	1.0		5					1.0							3.0	4.50
2-VSS			3	15				1.0		1.38					3.0	1.88
3-VSS			3	9	18			1.0		1.14	1.90				3.0	1.81
4-VSS			3	7	13	21		1.0		1.06	1.60	2.20			3.0	1.79
2-VSI			5					5.0	0.1				0.23		3.0	1.20
2-VSS & 2-VSI			3	8				1.6	0.1	0.84				0.84	3.0	0.98
3-VSS & 2-VSI			3	5	13			4.2	0.1	0.28	1.90			0.28	3.0	0.82
4-VSS & 2-VSI			3	4	7	14		4.8	0.1	0.24	1.10	1.90		0.24	3.0	0.80
FSR EWMA			5					1.0		0.71					2.90	3.21
FSR		1.5	5					1.0							3.0	1.57
2-VSS			4	9				1.0		1.28					3.0	0.96
3-VSS			4	5	10			1.0		0.35	1.90				3.0	0.93
4-VSS			4	5	7	11		1.0		0.40	1.60	2.20			3.0	0.92
2-VSI			5					5.0	0.1				0.23		3.0	0.56
2-VSS & 2-VSI			4	6				1.9	0.1	0.67				0.67	3.0	0.56
3-VSS & 2-VSI			4	5	10			4.3	0.1	0.27	2.00			0.27	3.0	0.55
4-VSS & 2-VSI			4	5	7	11		5.0	0.1	0.23	1.90	2.30		0.23	3.0	0.55
FSR EWMA			5					1.0		1.00					3.0	1.07
FSR	2.0		5					1.0							3.0	1.08
2-VSS			4	6				1.0		0.67					3.0	0.60
3-VSS			4	5	7			1.0		0.02	2.50				3.0	0.57
4-VSS			4	5	6	7		1.0		0.02	2.40	2.70			3.0	0.57
2-VSI			5					5.0	0.1				0.23		3.0	0.51
2-VSS & 2-VSI			4	6				1.9	0.1	0.67				0.67	3.0	0.51
3-VSS & 2-VSI			4	5	6			4.8	0.1	0.24	1.30			0.24	3.0	0.51
4-VSS & 2-VSI			4	5	6	7		5.0	0.1	0.23	1.40	2.20		0.23	3.0	0.51
FSR EWMA			5					1.0		1.00					3.0	0.58

[ 2003년 3월 접수, 2003년 5월 채택 ]