

## On the Equality of Two Distributions Based on Nonparametric Kernel Density Estimator<sup>1)</sup>

Daehak Kim<sup>2)</sup> · Kwangsik Oh<sup>3)</sup>

### Abstract

Hypothesis testing for the equality of two distributions were considered. Nonparametric kernel density estimates were used for testing equality of distributions. Cross-validators choice of bandwidth was used in the kernel density estimation. Sampling distribution of considered test statistic were developed by resampling method, called the bootstrap. Small sample Monte Carlo simulation were conducted. Empirical power of considered tests were compared for variety distributions.

**Keywords** : 커널 확률밀도 함수, 동일성 검정, 모의실험, 붓스트랩, 경험적 검정력

### 1. 서론

랜덤표본  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 가 알려지지 않은 분포함수  $F$ 로부터 주어지고 이와는 독립적으로 랜덤표본  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ 도 미지의 분포함수  $G$ 로부터 주어질 때 우리의 관심은 대부분의 경우 이들 두 분포가 서로 동일한가에 초점을 맞추게 된다. 즉, 귀무가설  $H_0: F = G$ 에 대한 대립가설  $H_1: F \neq G$ 의 검정을 고려한다. 일반성을 잃지 않고 분포함수  $F$ 와  $G$ 는 연속이라고 가정하자. 이러한 이 표본 동일성 검정에 대하여 고전적  $T$ 통계량과, 순열 검정(permutation test), 그리고 콜모고로프-스미르노프 검정 등은 대표적으로 사용되어온 방법들이다. 본 논문에서는 비모수적 커널 확률밀도함수 추정법을 이용하여 두 분포의 동일성 검정을 제안하였다. 추정된 두 분포의 거리 기준을 이용하여 붓스트랩을 이용한 검정통계량의 분포를 고려하였고, 여러 가지 분포

---

1) 이 연구는 2003학년도 대구가톨릭대학교 연구비의 지원에 의한 것임

2) 경북 경산시 하양읍 금락리 330-1 대구가톨릭대학교 정보통계학과 교수  
E-mail : dhkim@cataegu.ac.kr

3) 경북 경산시 하양읍 금락리 330-1 대구가톨릭대학교 정보통계학과 교수  
E-mail : ohkwang@cataegu.ac.kr

하에서 모의 실험을 통하여 제안된 방법과 기존의 방법들과 비교·연구하였다.

한편 콜모고로프-스미르노프(Kolmogorov-Smirnov)의 이 표본(two sample) 검정은 두 모집단 분포 사이에 존재할 수 있는 위치 및 척도 등의 모든 형태의 차이에 대해서 광범위하고도 총괄적인 두 모집단 분포함수  $F$ 와  $G$ 의 동일성 여부를 결정하는 상당히 좋은 검정기법으로 알려져 있다. 또한 콜모고로프-스미르노프 이 표본 검정은 상당히 유용하고 실용성이 뛰어난 이 표본 검정기법이다. 제안된 동일성 검정법을 우수한 검정력을 지닌 콜모고로프와 비교해보는 것도 붓스트랩 방법의 타당성을 암시할 수 있을 것으로 사료된다.

Efron(1979)과 Beran(1985)에 의해 소개되기 시작한 재표본 기법(resampling design)으로 불리는 붓스트랩(Bootstrap)방법은 여러 가지 가설검정 문제를 다루는데 아주 적합하며, 특히 검정통계량의 분포가 폐쇄형(closed form)을 가지지 못할 때 몬테 칼로 근사에 의해 통계량의 표본분포를 추정할 수 있게 해주는 유익한 방법이다. Efron과 Tibshirani(1993)는 다른 많은 통계적 추론 문제뿐만 아니라 이 표본의 동일성 검정에 대해서도 붓스트랩 방법의 타당성을 시사한바있다.

본 논문에서는 두 분포의 동일성 검정을 위하여 비모수적 커널 확률밀도함수의 추정에 근거한 방법들에 초점을 맞추고 있다. 커널추정량을 사용하여 밀도함수를 추정하고, 최소제곱교차타당성(Least-square cross-validation)방법을 사용하여 적합한 평활계수(smoothing parameter)를 선택한다. 또한 3절에서 논의되어진  $L_1$  거리는 분포들 사이의 거리를 추정하는 통계량으로 선택되어졌다. 4절에서는 모의실험의 결과를 소개하였다.

## 2. 이표본 동일성 검정방법의 소개

랜덤표본  $X_1, \dots, X_n$ 이  $F$ 로부터 또 이와는 독립적으로 랜덤표본  $Y_1, \dots, Y_m$ 이  $G$ 로부터 주어질 때, 이들 두 분포의 동일성을 검정하는 문제는 이 표본 문제(two sample problem)로 잘 알려져 있으며 본 절에서는 기존의  $T$ 통계량과 재표본 기법을 활용한 순열검정과 그리고 콜모고로프-스미르노프 통계량들을 간략히 소개한다.

### 2.1 $T$ 통계량

랜덤표본  $X_1, \dots, X_n$ 이  $N(\mu_1, \sigma^2)$ 으로부터 또 이와는 독립인 랜덤표본  $Y_1, \dots, Y_m$ 이  $N(\mu_2, \sigma^2)$ 로부터 주어졌을 때, 두 평균의 동일성  $H_0: \mu_1 = \mu_2$ 을 검정하는 방법으로 대표적으로 사용되는 통계량이 이 표본  $T$ 통계량이다. 통계량  $T$ 는

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

로 표현되며 이때,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum Y_i,$$

$$\bar{\sigma} = \left\{ \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2 + \sum(Y_i - \bar{Y})^2}{(n+m-2)} \right\}^{1/2}$$

로서 미지의 표준편차  $\sigma$ 의 합동추정량이다.  $T$ 의 표본분포는 미지의 분산을 합동분산으로 추정하여 사용할 경우, 자유도  $m+n-2$ 인  $t$ 분포를 따름이 잘 알려져 있다.

대부분의 경우, 주어진 자료의 기저분포를 정규분포로 가정함이 적당하지 않게 되고 이러한 경우 더 이상  $t$ 분포에 의존할 수 없게 된다. 이럴 때 유용하게 사용할 수 있는 방법이 재표본 기법이다. 이제 통계량  $T$ 에 재표본 기법을 적용한 귀무가설  $H_0: F = G$ 를 검정하는 방법들을 소개한다.

### 2.2 순열검정

알려지지 않은 모분포  $F$ 와  $G$ 로부터 각각 독립적으로 얻은 랜덤포본  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 와  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ 에 대하여 두 분포의 동일성을 검정하고자 할 때 유용한 재표본 기법중의 하나는 순열검정이다. 순열검정법은 주어진 두 표본을 합쳐 표본의 크기가  $n+m$ 인 하나의 큰 표본으로 형성하고 이 표본으로부터 비복원(without replacement) 추출법으로 두 개의 재표본된 자료들을 추출하는 방법이다. 이렇게 재표본된 표본을 순열표본  $X_1^b, X_2^b, \dots, X_n^b, Y_1^b, Y_2^b, \dots, Y_m^b$ 라 두자. 이런 순열표본에 근거한 통계량  $T_b$

$$T_b = \frac{\bar{X}_b - \bar{Y}_b}{\sigma_b \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

로 나타난다. 통계량  $T_b$ 의 표본분포는  $T_b$ 를 독립적으로  $B$ 회 반복하여 추정하게 된다. 이때,

$$\bar{X}_b = \frac{1}{n} \sum X_i^b, \quad \bar{Y}_b = \frac{1}{m} \sum Y_i^b,$$

$$\bar{\sigma}_b = \left\{ \frac{\sum(X_i^b - \bar{X}_b)^2 + \sum(Y_i^b - \bar{Y}_b)^2}{(n+m-2)} \right\}^{1/2}$$

이다. 검정의 절차는 유의수준  $\alpha$ 에서  $T_b$ 가  $t_b^*(1-\alpha/2)$ 보다 크거나  $T_b$ 가  $t_b^*(\alpha/2)$ 보다 작으면 귀무가설  $H_0: F = G$ 를 기각한다.  $t_b^*(\alpha)$ 는  $B$ 회 반복된  $T_b$ 의 표본분포의  $100 \cdot \alpha\%$  분위수이다.

### 2.3 붓스트랩 $T$ 검정

한편 붓스트랩  $T$ 검정은 많은 부분이 순열검정과 동일하나 비복원 추출방법 대신 복원 추출(with replacement)법을 사용하는 것이 커다란 차이이다. 복원 추출법으로 재표본된 표본을 붓스트랩 표본이라 부르고  $X_1^b, X_2^b, \dots, X_n^b, Y_1^b, Y_2^b, \dots, Y_m^b$ 로 표기하자. 그러면 붓스트랩  $T$ 통계량은

$$T_b = \frac{\overline{X}_b - \overline{Y}_b}{\overline{\sigma}_b \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

로 되고, 이 통계량을 독립적으로  $B$ 회 반복하여 통계량  $T_b$ 의 표본분포를 추정하게 된다. 이때,

$$\begin{aligned} \overline{X}_b &= \frac{1}{n} \sum X_i^b, \quad \overline{Y}_b = \frac{1}{m} \sum Y_i^b, \\ \overline{\sigma}_b &= \left\{ \frac{\sum (X_i^b - \overline{X}_b)^2 + \sum (Y_i^b - \overline{Y}_b)^2}{(n+m-2)} \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

이다. 마찬가지로 검정의 절차는 유의수준  $\alpha$ 에서  $T_b$ 가  $t_b^*(1-\alpha/2)$ 보다 크거나  $T_b$ 가  $t_b^*(\alpha/2)$ 보다 작으면 귀무가설  $H_0: F=G$ 를 기각한다.  $t_b^*(\alpha)$ 는  $B$ 회 반복된  $T_b$ 의 표본분포의  $100 \cdot \alpha\%$  분위수이다.

#### 2.4 콜모고로프-스미르노프 검정

본 논문에서는 모의 실험에서 콜모고로프-스미르노프 통계량을 포함시켰다. 이 통계량은 분포무관(distribution free)이므로, 붓스트랩이나 순열의 재표본 과정이 필요하지 않다. 콜모고로프-스미르노프 검정법의 핵심은 각 자료에 등확률  $1/n$ 을 놓은 경험적분포함수  $F_n(x)$ 의 사용이다. 즉, 주어진 자료  $X_1, \dots, X_n$ 에 대해 경험적분포함수

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(0,x)}(X_i)$$

이다. 이때,  $I_{(0,x)}(t)$ 는 지시함수로서  $t$ 가 0과  $x$ 사이에 위치하면 1, 그렇지 않으면 0을 취한다. 마찬가지로 주어진 표본  $Y_1, \dots, Y_m$ 에 대해 경험적분포함수  $G_m(x)$ 는

$$G_m(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I_{(0,y)}(Y_i)$$

로 표현된다. 이표본 콜모고로프-스미르노프 통계량은 이표본 스미르노프 검정 통계량으로 알려져 있으며, 위의 두 경험적 분포함수를 이용하여 다음과 같이 정의되어진다.

$$K-S = \sup_x |F_n(x) - G_m(x)|$$

콜모고로프-스미르노프 검정의 절차는 유의수준  $\alpha$ 에서, 통계량 K-S의 절대값이 귀무가설 하에서의 표본분포의  $100 \cdot \alpha/2\%$  백분위수보다 크게되면  $H_0: F=G$ 는 기각되어진다.

### 3. 커널추정량을 이용한 동일성 검정

지금까지의 방법과는 다르게 추정된 확률밀도함수들을 이용하여 두 분포의 동일성 검정을 고려하자. 귀무가설  $H_0: F=G$ 에서  $F=G$ 가 의미하는 것은 임의의 공동 표본 공간의 어떤 부분 집합  $A$ 에 대하여  $P_F\{A\} = P_G\{A\}$ 임을 나타낸다. 이것은 두 분포  $F$ 와  $G$  사이의 거리의 추정량으로서  $\sup_A |P_F\{A\} - P_G\{A\}|$ 을 사용할 수 있음을

암시한다.

다행히 Csörge, Gombay, 그리고 Horvath(1991)에 의하면 모든 확률밀도함수  $f$ 와  $g$ 에 대해 다음과 같이 쓸 수 있음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \int |f-g| &= 2 \sup_A \left| \int_A f - \int_A g \right| \\ &= 2 \sup_A |P_F\{A\} - P_G\{A\}|. \end{aligned}$$

위의  $\int |f-g|$ 를 두 확률밀도함수 사이의  $L_1$  거리라 부르고 두 분포  $F$ 와  $G$  사이의 거리의 개념으로 자연스럽게 해석할 수 있다.

랜덤표본  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 에 대하여 평활계수(smoothing parameter)가  $h$ 인 확률밀도함수의 커널 추정량(Silverman, 1985)은 다음과 같다.

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)$$

이제 주어진 두 독립표본  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 과  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ 에 대하여 각각의 커널 확률밀도함수의 추정량  $\hat{f}$ 와  $\hat{g}$ 를 사용하여  $L_1$  거리를 추정할 수 있다. 다음과 같이 추정된  $L_1$  거리가 큰 값을 가지면 이는 귀무가설이 옳지 않음을 반증하는 증거가 될 것이다. (Allen,1997)

$$\mathcal{T}_1 = L_1(\hat{f}, \hat{g}) = \int |\hat{f} - \hat{g}|$$

그러나 이 통계량의 표본분포를 폐쇄형으로 표현할 수 없게 되어 얼마나 큰 값을 가져야 기각할 수 있는지를 알 수 없다. 다행히 재표본 방법을 사용하여  $\mathcal{T}_1$ 의 표본분포를 추정할 수 있게되어 다음과 같은 몬테칼로 근사를 통하여  $H_0: F=G$ 와  $H_1: F \neq G$ 의 가설을 검정할 수 있다. 그 과정을 간단히 서술하면 다음과 같다.

먼저 주어진 표본을 합하고 합쳐진 표본으로부터  $n$ 개와  $m$ 개로 구성된 재표본을 형성한다. 즉  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ ,  $Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_m^*$ 를 얻는다. 그 다음 재표본된 각 자료로부터 커널확률밀도함수의 추정치를 구한다. 이때 사용되는 평활계수는 재표본된 각 자료에 근거하고 교차타당성 방법을 이용한다. 이를  $\hat{f}^*$ 와  $\hat{g}^*$ 로 두자. 그 다음  $\mathcal{T}_1$  통계량을  $\hat{f}^*$ 와  $\hat{g}^*$ 를 이용하여 구한다. 이를

$$\mathcal{T}_1^* = L_1(\hat{f}^*, \hat{g}^*) = \int |\hat{f}^* - \hat{g}^*|$$

로 표기하자.

위의 과정을 독립적으로  $B$ 회 독립적으로 반복하여  $\mathcal{T}_1$ 의 표본분포의 백분위수를 얻는다. 검정의 절차는 위의 과정을 통하여 얻어진 백분위수의 값이 원래 표본으로부터 계산된  $\mathcal{T}_1$ 값보다 작으면 귀무가설  $H_0: F=G$ 를 기각한다.

위의 재표본 과정에서 복원 추출법을 이용한 결과를 붓스트랩  $L_1$ 방법( $L_{1,b}$ ), 비복원 추출을 이용한 결과를 순열  $L_1$ 방법( $L_{1,b}$ )이라고 표현하자.

## 4. 모의실험

본 절에서는 가설  $H_0: F = G$ 에 대하여, 앞에서 설명되었던 5가지 통계량,  $T_p, T_b, K-S, L_{1,b}$  그리고  $L_{1,p}$ 들을 대상으로 여러 가지 분포 하에서의 모의실험의 연구 결과들을 나타낸다.

### 4.1 모의실험의 설계

두 표본은 서로 독립인 두 분포  $F$ 와  $G$ 에서 각각 생성되었다. 귀무가설  $H_0: F = G$ 는 이 논문에서 논의되어진 5개의 통계량들을 각각 사용하여 검정하였다. 실험은 똑같은 분포  $F$ 와  $G$ 를 각각 사용하여 많은 시행을 독립적으로 반복하였다. 모든 실험에 대해 100번 반복이 사용되었다. 경험적 기각율은 각각의 검정에 대해서 기록되어지고, 경험적 기각율은 각각의 횟수를 반복횟수로 나누어 계산하였다. 하나의 실험으로부터 나온 결과는 각각의 방법에 대한 경험적 기각율인 5개의 숫자들로 구성되어진다.

모의실험은 여러 종류의 분포에 대해서 5가지 검정법의 경험적 검정력을 조사하기 위해 설계되었다. 아래의 각각의 표는 한번의 실험 결과에서 나온 결과들을 요약한 것이다. 모든 검정에서 유의수준  $\alpha = 0.05$ 를 사용하였고 붓스트랩과 순열 검정에 대하여 재표본의 횟수  $B$ 는 100로 두었다. 여기에서 검정 통계량  $K-S$ 는 이산형인 것에 주의해야한다. 모의실험에서 사용한  $F$ 와  $G$ 의 분포는 정규분포, 균일분포 그리고 모수가  $\lambda$ 인 지수분포를 고려하였다.

### 4.2 모의실험의 결과

처음 두 실험은 분포  $F$ 와  $G$ 의 기저분포가 정규분포를 가질 때  $\mu$ 에 따른 두 분포의 동일성에 대한 모의실험의 결과를 요약하여 나타낸 것이고, 다음 두 실험은 기저분포가 서로 다른 형태의 분포를 가질 때 표본의 크기에 따른 모의실험의 결과를 요약하여 나타낸 것이다.

표1에서는 두 집단의 표본수가 같은 경우로서  $F$ 는  $N(0, 1)$  ( $n = 20$ )이고 분포  $G$ 는  $N(\mu, 1)$  ( $m = 20$ )를 고려하였다.  $\mu$ 가 커질수록 즉, 귀무가설에서 멀어질수록 검정력은 커질 것임을 기대함은 당연할 것이다.

표1. 경험적 검정력 ( $n = m = 20$ )  
( $F \sim N(0, 1), G \sim N(\mu, 1)$ )

$\mu$	$T_b$	$T_b$	$L_{1,\mu}$	$L_{1,b}$	K-S
0.00	0.050	0.070	0.050	0.080	0.060
0.20	0.080	0.060	0.080	0.060	0.050
0.40	0.230	0.090	0.190	0.080	0.170
0.60	0.320	0.120	0.360	0.100	0.330
0.80	0.630	0.180	0.580	0.140	0.530
1.00	0.760	0.330	0.820	0.350	0.680

표2. 경험적 검정력 ( $n \neq m$ )  
( $F \sim N(0, 1), G \sim N(\mu, 1)$ )

$\mu$	$T_b$	$T_b$	$L_{1,\mu}$	$L_{1,b}$	K-S
0.00	0.060	0.050	0.050	0.060	0.050
0.20	0.100	0.050	0.110	0.060	0.060
0.40	0.190	0.040	0.220	0.060	0.190
0.60	0.460	0.130	0.500	0.090	0.320
0.80	0.730	0.240	0.720	0.210	0.610
1.00	0.950	0.400	0.950	0.450	0.880

이 경우에 통계량  $T_b$ 와  $T_b$ 에 근거한 검정력이  $\mu$ 가 커짐에 따라서 아주 강력한 검정력을 보여주고 있다. 통계량 K-S의 검정력도  $\mu$ 가 커짐에 따라서 두 분포의 동일성에 대한 가설을 기각하는 검정력이 우수하다. 이에 반해 통계량  $L_{1,b}$ 과  $L_{1,\mu}$ 의 검정력은  $\mu$ 가 커짐에 따라서 검정력은 증가하지만 강력하지 않음을 알 수 있다.

표2는 두 표본의 수가 다른 경우로서 분포  $F$ 가  $N(0, 1)$ 이고 표본의 크기  $n=20$ 이고, 분포  $G$ 는  $\sigma^2=1$ 이고 평균  $\mu$ 인 정규분포이고 표본의 크기  $m=30$ 일 때의 결과를 나타낸 것이다. 표1과 표2의 검정력을 시각적으로 도시한 것이 그림1이다.

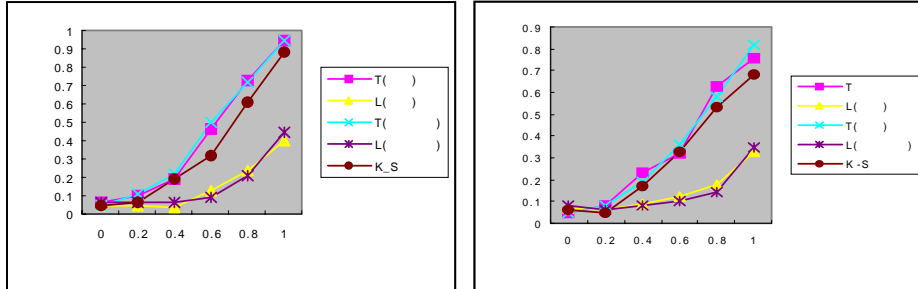


그림1. 다섯가지 통계량들의 경험적 검정력 꺾은선그래프  
(왼쪽 : 표1의 경우, 오른쪽 : 표2의 경우)

표2의 결과는 위의 표1과 유사하다는 것을 알 수 있다. 두 분포 모두 정규분포이고 분산이 같을 때 통계량  $T_b$ 와  $T_b$ 의 검정력이 통계량  $L_{1,b}$ 과  $L_{1,\mu}$ 의 검정력보다 우수하다는 것을 위 표1과 표2의 결과를 통해서 알 수 있다. 또한 붓스트랩 검정과 순열 검정의 검정력 사이에 커다란 차이점은 보이지 않고 유사하게 실행되어짐을 알 수 있다.

표3은 분포  $F$ 가  $N(1, 1)$ 이고, 분포  $G$ 가  $\exp(1)$ 을 따르는 경우로 두 집단의 분포가 다른 경우에 유의수준  $\alpha=0.05$ 에서의 검정 결과를 나타낸 것이다. 이 경우에 다양한 표본의 크기를 고려하였다.

표3. 경험적 검정력 ( $F \sim N(1, 1)$ ,  $G \sim \exp(1)$ )

$n$	$m$	$T_p$	$T_b$	$L_{1,p}$	$L_{1,b}$	K-S
20	20	0.040	0.170	0.070	0.160	0.090
30	30	0.060	0.330	0.090	0.340	0.100
40	40	0.040	0.500	0.040	0.490	0.110
20	30	0.110	0.180	0.120	0.140	0.080
30	40	0.040	0.360	0.040	0.390	0.110

표3의 결과를 보면, 표본의 크기가 커질수록 붓스트랩과 순열검정을 사용한 통계량  $L_{1,b}$ 과  $L_{1,p}$ 의 검정력은 증가하고 있지만 통계량  $T_p$ 와  $T_b$ 는 그렇지 않음을 알 수 있다.

표4는 분포  $F$ 는  $N(.5, .2887^2)$ 이고, 분포  $G$ 는  $U[0, 1]$ 일 때, 유의수준  $\alpha = 0.05$ 에서의 검정 결과를 나타낸 것이다.

표4. 경험적 검정력 ( $F \sim N(.5, .2887^2)$ ,  $G \sim U[0, 1]$ )

$n$	$m$	$T_p$	$T_b$	$L_{1,p}$	$L_{1,b}$	K-S
20	20	0.040	0.110	0.040	0.080	0.030
30	30	0.080	0.070	0.060	0.050	0.050
40	40	0.050	0.090	0.040	0.120	0.050
20	30	0.040	0.060	0.020	0.100	0.010
30	40	0.050	0.070	0.040	0.080	0.080

표4에서도 표본의 크기가 커짐에 따라서 붓스트랩과 순열검정을 사용한 통계량  $L_{1,b}$ 과  $L_{1,p}$ 의 검정력은 증가하고 있지만 통계량  $T_p$ 와  $T_b$ 는 그렇지 않다는 것을 보여준다.

두 분포의 형태가 다른 경우에는 표본의 크기가 커짐에 따라서 통계량  $L_{1,b}$ 과  $L_{1,p}$ 의 검정력이 통계량  $T_p$ 와  $T_b$ 의 검정력보다 두 분포의 동일성을 검정하는 가설에 대해서 우수한 결과를 보여주고 있다.

## 5. 결론과 토의

두 분포의 동일성에 대한 가설 검정에서 확률밀도함수 추정의 사용은 효과적이라고 보여진다. 여기에서 우리는 가설  $H_0: F = G$ 에 대한 재표본 기법을 이용한 검정을 고려했다. 통계량  $T_p$ 와  $T_b$ 는 기저분포가 정규분포인 경우에 좋은 결과를 보여주었다. 비모수적 커널추정을 이용한  $L_{1,b}$ 과  $L_{1,p}$  통계량에서는 교차타당성(cross validation)방법을 사용하여 평할계수를 선택하였다. 고려되어진 모든 경우에서 조사되



있던 검정방법들 중 어떤 것도 가장 강력한 것은 없었다. 그러나 여러 가지 상황을 종합해보면  $L_1$  거리를 이용한 검정법은 기저분포가 정규분포가 아닌 경우에도 사용 가능함을 보였고 또한 콜모고르프-스미르노프 방법보다 더 좋은 결과를 보였다.

### 참 고 문 헌

1. Allen, D. L. (1997). Hypothesis Testing Using an  $L_1$  Distance Bootstrap., *The Journal of American Statistical Association*. Vol. 51, 145-150
2. Beran, R. (1985). Bootstrap Methods in Statistics, *Jber. Math. Verin.*, Vol. 86, 14-30
3. Csörgo, M., Gombay, E., and Horvath (1991). Central Limit Theorems for  $L_p$  Distances of Kernel Estimators of Densities Under Random Censorship, *The Annals of Statistics*, Vol. 19, 1812-18313.
4. Efron. B. (1979). Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *Ann. of Statist.*, 7-26
5. Efron. B. and Tibshirani, R.J.(1993). *An introduction to the Bootstrap*. NewYork : Chapman & Hall.
6. Silverman, B. W.(1985). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, London: Chapman & Hall.

[ 2003년 3월 접수, 2003년 4월 채택 ]