Journal of Korean
Data & Information Science Society
2003, Vol. 14, No.2 pp. 187～199

Tests for Mean Change with the Modified Cusum[1] Statistics

Jaehee Kim[2] · Nayeon Kim[3]

Abstract

We deal with the problem of testing a sequence of independent normal random variables with constant, known or unknown, variance for no change in mean versus alternatives with a single change-point. Various tests based on the likelihood ratio and recursive residuals, score statistics and cusums are studied. Proposed tests are modified version of Buckley's cusum statistics. A comparison study of various change-point test statistics is done by Monte Carlo simulation with S-plus software.

keywords : Cusum, Mean change, Power, Test statistic, Wiener process

1. 서론

현대의 모든 학문분야에 있어서 어떠한 이론에 대한 실증적 연구와 과학적 분석기법이 중요시됨에 따라 사회과학분야이든 자연과학분야이든 심지어 예술분야이든 올바른 예측과 분석을 하기 위해서 통계적 방법이 필요하게 된다. 그리고 정보화 사회에서 다량의 자료는 계속 발생되고 있으며 수많은 자료들 중에서 의미있는 자료를 선택하여 분석하고 올바른 추론을 하는 것이 요구되어진다. 즉, 단순한 자료의 분석이 아닌 방대한 자료들을 압축하고 여과시켜 자료 속에서 의미있는 정보를 찾아내는 방법론의 개발이 필요하다.

본 논문에서는 변화점(change-point) 문제를 제기하고, 자료내의 변화점 존재 여부에 대한 검정을 할 때 필요한 검정통계량을 제안하고자 한다. 변화점이란 관측값이

1) 이 연구는 2002년도 한국과학재단 우수여성과학자도약지원연구(R04-2001-000-00135-0) 지원을 받았음.

2) 서울시 도봉구 쌍문동 419 덕성여자대학교 통계학과 부교수
E-mail : jaehee@duksung.ac.kr

3) 서울시 도봉구 쌍문동 419 덕성여자대학교 통계학과 통계학석사

연속적인 시간에 의해 발생하는 경우 혹은 어떠한 일정한 패턴에서 순서적으로 관측된 경우, 자료 내에 변화가 발생하는 시점을 의미한다. 변화점에 관한 문제는 품질관리 부문에서 응용, 연구되기 시작했고, 시간에 따른 실험, 관측치를 분석해야 하는 의학, 생명과학, 경제학, 기상학, 환경공학 등의 분야에서도 변화가 일어나는 현상에 대한 통계적 분석의 중요성은 점점 강조되고 있다.

변화가 일어나는 상황은 시간에 따라 변화하는 확률과정모형(stochastic process)으로 표현할 수 있어 변화가 일어나는 것을 시간에 따른 확률과정 또는 확률변수의 분포에 대한 변화로 이해할 수 있다. 변화에 대한 기본적인 물음은 관측한 확률변수가 독립적이고 동일한 분포를 따르는가 아니면 적어도 한 점 이상에서 분포의 변화가 일어나느냐에 관한 것으로 볼 수 있다.

변화점 추론은 추정과 검정으로 나누어서 생각할 수 있고, 확률과정에 대한 이해와 이론을 통한 통계량의 특성연구를 필요로 하며 때로는 복잡한 수리 통계적 계산이 요구된다. 변화점 추정의 일반적인 접근방법은 모든 데이터에 대하여, 매 시점에서 데이터를 두 부분으로 나누고 적당한 측도(measure)를 사용하여 두 부분의 비균일성(heterogeneity)을 계산하여 비균일성을 최대로 하는 점을 변화점으로 추정하는 것이다. 자료내에 변화점 존재여부에 대한 검정은 변화점 존재에 의한 데이터의 비균일성을 감지할 수 있도록 검정하는 것이다.

기존에 연구되어진 변화점 검정에 대한 방법들을 2장에서 소개하고, 3장에서는 Buckley(1991) 검정통계량을 변형하여 새로운 검정통계량을 제안하고, 특성들을 알아본다. 4장에서는 앞장에서 소개된 변화점 검정통계량들과 제안하는 검정통계량을 S-plus를 이용한 모의실험을 통해 비교한다. 마지막 5장에서는 본 연구의 결론을 맺는다.

2. 기존 변화점 검정

변화점(change-point)이란 연속적인 시간에 의해 발생된 확률변수가 자료에서 변화가 발생될 때의 시점을 말하며 이는 위치모수의 변화, 분산모수의 변화등이 일어나는 시점이다. 변화점 검정연구에서 고려되어지는 문제로는 변화시간의 검정과 발생된 변화의 크기 검정으로 나눌 수 있으며 본 연구에서는 변화시간의 검정, 즉 변화점 검정 문제를 다루고자 한다.

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 은 연속분포를 따르는 독립변수로 다음과 같이

$$X_1, X_2, \cdots, X_\tau \sim \ iid \quad F(x)$$
$$X_{\tau+1}, X_{\tau+2}, \cdots, X_n \sim \ iid \quad G(x), \quad \tau \in 1, \cdots, n-1$$
$$F(x) \neq G(x)$$

표현된다. 여기서, 자료내 실제 변화점 τ는 분포 F에서 G로 변화가 시작하는 시점이 된다.

$X_1, X_2, \cdots, X_n$는 모수가 $(\mu_1, \sigma_1^2), (\mu_2, \sigma_2^2), \cdots, (\mu_n, \sigma_n^2)$인 정규분포를 따르는 독립변수이다. 여기서 $\mu_i = EX_i$ 이고 $\sigma_i^2 = VarX_i = \sigma^2$, $1 \le i \le n$ 이다. 관심있는 귀무가설은

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots \mu_n = \mu,$$

이고, 대립가설은

$$H_1 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots \mu_\tau \neq \mu_{\tau+1} = \cdots = \mu_n$$

이다. 여기서 변화점 $\tau \in \{1, \cdots, n-1\}$이며, 초기 수준 μ는 알려지지 않았고, σ는 알려져 있다.

Chernoff 와 Zacks(1964)는 사전분포 $N(0, a^2)$를 가지는 확률변수가 정규분포를 따르는 경우에 Bayes 검정통계량을 제안했고 재귀적 잔차를 이용하면 다음의 검정통계량

$$T_{CZ} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{i(i+1)}\, z_i$$

으로 표현된다. 여기서 재귀적 잔차(recursive residual)

$$z_i = \sqrt{\frac{i}{i+1}} (X_{i+1} - \overline{X}_n)$$

이고 $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ 이다.

Gardner(1969)는 분산이 알려져 있고 균일 사전분포를 가질 경우, Gardner(1969) 검정통계량은

$$T_{Ga}^* = \frac{6}{(n^2-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i}^{n-1} (X_{j+1} - \overline{X}_n) \right)^2$$

으로 나타낼 수 있다.

Brown(1975)은 검정통계량

$$T_B = \max_{1 \le i < n} \frac{| \mathfrak{S}_{n-1} - \mathfrak{S}_{n-i} |}{\sqrt{i-1}}$$

을 제안했다. 여기서 $\mathfrak{S}_i = z_1 + \cdots + z_i$, $\mathfrak{S}_{n-i} = z_{i+1} + \cdots + z_n$ 는 재귀적 잔차 누적합이다.

Hawkins(1977)는 μ_1과 μ_n의 최대우도추정량을 얻었고, 분산분석을 고려하여 검정통계량

$$T_H = \max_{1 \le i < n} \left| \left(\frac{n}{i(n-i)} \right)^{1/2} \sum_{j=1}^{i} (X_j - \overline{X_n}) \right|$$

를 제안하였다. 여기서 $S_i = X_1 + \cdots + X_i$ 는 누적합이다.

Pettitt(1980)는 누적합(cusum)을 고려하여 점수통계량인 검정통계량

$$T_P = \max_{1 \le i < n} \left| i \frac{S_n}{n} - S_i \right|$$

을 유도하였다.

James(1987)는 Brown(1975)에 의해서 제안되어진 재귀적 잔차통계량(recursive residual statistic)을 고려했고, 제안한 검정통계량은

$$T_J = \max_{n_0 \le i < n} \frac{\left| i \frac{S_n}{n} - S_i \right|}{\sqrt{i\left(1 - \frac{i}{n}\right)}}$$

이다. 이 통계량은 가설을 검정을 하기 위해서 로그우도비 (log likelihood ratio) 통계량의 제곱근으로 쉽게 계산되어진다.

Gombay(1990)가 최대우도검정을 이용하여 제안한 변화점 검정통계량은

$$Z_i = 2\{ ig(\overline{X_i}) + (n-i)g(\widetilde{\overline{X}}_{n-i})n - ng(\overline{X_n}) \}$$

에 기본형으로 이용한다. 여기서 g는 주어진 함수이고, $g^{(2)}$는 g의 2차 미분되어진 것이다. 적절하게 선택되어진 $1 \le n_0 < n_1 \le n$인 n_0 와 n_1에 대해서

$$Z(n_0, n_1) = \max_{n_0 < m < n_1} \{ Z_m / g^{(2)}(\mu) \}$$

의 값이 크면, 귀무가설은 기각된다. 이 통계량은 모수가 하나인 지수족분포(exponential family distribution)에 적용되어진 우도비방법에 의해서 고안되어진 것이다. Gombay는 귀무가설하에서 모든 $0 < \lambda_1 \le 1 - \lambda_2$에 대해 $n \to \infty$ 이면,

$$Z(m_1, m_2)/\sigma^2 \rightarrow \sup_{0\le s\le \Lambda} |V(s)|^2$$

임을 증명했다. 여기서

$\Lambda = \frac{1}{2}\log\{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)/(\lambda_1\lambda_2)\}, m_1 = n\lambda_1, m_2 = n(1-\lambda_2)$이다.
$\{V(s), -\infty < s < \infty\}$는 Ornstein Uhlenbeck process 이며, 평균이 0이고 공분산이 $\exp(-|t-s|)$를 갖는 Gaussian process이다. 또한, 귀무가설하에서 모든 x에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} P[a^2(\log n)Z(1,n)/\sigma^2 \le \{x + h(\log n)\}^2] = \exp(-2e^{-x})$$

이다. 여기서 $a(x) = (2\log x)^{-\frac{1}{2}}$이고, $h(x) = 2\log x + \frac{1}{2}\log\log x - \frac{1}{2}\log \pi$이다. $Z(1,n)$의 극한분포가 이중지수(double exponential)분포로 Gumbel 분포를 따른다. 특히 $g(t) = \frac{1}{2}t^2$ 일 때, 어떤 n_0, n_1에 대해서 검정통계량은

$$T_G = \max_{n_0\le i\le n_1} \frac{(nS_i - iS_n)^2}{ni(n-i)}$$

이 된다. 귀무가설하에서, T_G의 점근분포는

$$\sigma^2 \sup_{\lambda_1\le t\le 1-\lambda_2} \frac{\{W(t) - tW(t)\}^2}{t(1-t)}$$

이다. 여기서 $W(t)$는 Wiener process이다.

Buckley(1991)는 누적합의 제곱을 이용한 검정통계량

$$T_{Bu} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{i}(X_j - \overline{X})\right\}^2$$

을 제안하였다. 귀무가설하에서는 시점변화에 따른 누적합이 0에 가까워진다.

3. 제안하는 변화점 검정 통계량

$X_1, X_2, \cdots, X_n$은 모수가 $(\mu_1, \sigma_1^2), (\mu_2, \sigma_2^2), \cdots, (\mu_n, \sigma_n^2)$인 정규분포를 따르는 독립변수이다. 여기서 $\mu_i = EX_i$이고 $\sigma_i^2 = VarX_i = \sigma^2$, $1 \le i \le n$ 이다. 관심있는 귀무

가설은

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = \mu,$$

이고, 대립가설은

$$H_1 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_\tau \neq \mu_{\tau+1} = \cdots = \mu_n$$

이다. 여기서 변화점 $\tau \in \{1, \cdots, n-1\}$이며, 초기 수준 μ는 알려지지 않았고, σ는 알려져 있다.

Buckley(1991)는 평균점의 변화에 대한 검정통계량

$$T_{Bu} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{i} (X_j - \overline{X}) \right\}^2$$

을 제안하였다. Buckley 검정통계량의 주요부분인 $\left\{ \sum_{j=1}^{i} (X_j - \overline{X}) \right\}^2$의 더해진 항을 고려하여서 가중치 $\frac{1}{i}$을 준 형태로 통계량

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \left\{ \sum_{j=1}^{i} (X_j - \overline{X}) \right\}^2$$

을 유도할 수 있다.

또한, 귀무가설하에서 $Var\left[\sum_{j=1}^{i} (X_j - \overline{X}) \right] = \frac{i(n-i)}{n} \sigma^2$임을 이용하여 표준화 시키면 $\frac{1}{i(n-i)}$의 가중치가 얻어진다. 이와 같이 얻어진 가중치 $\frac{1}{i(n-i)}$를 사용하여 통계량

$$T_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(n-i)} \left\{ \sum_{j=1}^{i} (X_j - \overline{X}) \right\}^2$$

를 제안하고자 한다.

$i = n$일 때 $\sum_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X}) = 0$이므로 T_1의 식은

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \left\{ \sum_{j=1}^{i} (X_j - \overline{X}) \right\}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \left\{ \sum_{j=1}^{i} (X_j - \overline{X}) \right\}^2$$

으로 표현된다. 그리고 T_1의 주요부분인 누적합(cusum)은

$$\sum_{j=1}^{i}(X_j-\overline{X})=\sum_{j=1}^{i}\left(1-\frac{i}{n}\right)X_j-\sum_{j=i+1}^{n}\frac{i}{n}X_j$$

로 표현되므로, 기대값을 구하면

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{j=1}^{i}(X_j-\overline{X})\right] &= E\left[\sum_{j=1}^{i}\left(1-\frac{i}{n}\right)X_j-\sum_{j=i+1}^{n}\frac{i}{n}X_j\right] \\ &= \left\{\left(1-\frac{i}{n}\right)i-(n-i)\frac{i}{n}\right\}\mu \\ &= 0 \end{aligned}$$

이다. 또한 이 누적합의 분산을 구해보면

$$\begin{aligned} Var\left[\sum_{j=1}^{i}(X_j-\overline{X})\right] &= \left\{\sum_{j=1}^{i}\left(\frac{n-i}{n}\right)^2+\sum_{j=i+1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\right\}\sigma^2 \\ &= \left\{\frac{i(n-i)^2+i^2(n-i)}{n^2}\right\}\sigma^2 \\ &= \frac{(n-i)i}{n}\sigma^2 \end{aligned}$$

이다. 그리고 T_1의 기대값을 구하면

$$\begin{aligned} E(T_1) &= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}E\left\{\sum_{j=1}^{i}(X_j-\overline{X})\right\}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\frac{(n-i)i}{n}\sigma^2 \\ &= \sigma^2\sum_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right) \\ &= \sigma^2\left\{(n-1)-\frac{1}{n}\frac{n(n-1)}{2}\right\} \\ &= \frac{(n-1)}{2}\sigma^2 \\ &= O(n) \end{aligned}$$

이 얻어진다. 누적합의 분산으로 나눈 형태인 T_2의 기대값을 계산하면

$$\begin{aligned} E(T_2) &= E\left[\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i(n-i)}\left\{\sum_{j=1}^{i}(X_j-\overline{X})\right\}^2\right] \\ &= \frac{(n-1)}{n}\sigma^2 \\ &= O(1) \end{aligned}$$

가 된다.

T_2로부터 기대값이 σ^2이 되는 통계량 T_3

$$T_3 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{i(n-i)} \left\{ \sum_{j=1}^{i} (X_j - \overline{X}) \right\}^2$$

를 유도할 수 있다. 즉, 통계량 T_3의 기대값은

$$E(T_3) = E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{i(n-i)} \left\{ \sum_{j=1}^{i} (X_j - \overline{X}) \right\}^2 \right] = \frac{(n-1)}{n} \sigma^2$$

이다. 검정통계량 T_3의 기대값은 표본의 크기에 의존하지 않음을 알 수 있고, T_1, T_2와 마찬가지로 검정에 사용할 수 있다.

제안한 검정통계량 T_1, T_2의 주요부분인 a_i, b_i와 이들의 누적합인 ca_j, cb_j의 움직임을 보여준다. 여기서

$$a_i = \frac{1}{i} \left\{ \sum_{j=1}^{i} (X_j - \overline{X}) \right\}^2, \qquad b_i = \frac{1}{i(n-i)} \left\{ \sum_{j=1}^{i} (X_j - \overline{X}) \right\}^2$$

$$ca_j = \sum_{i=1}^{j} a_i, \qquad cb_j = \sum_{i=1}^{j} b_i, \qquad i = 1, \cdots, n$$

이다.

[그림 1]은 표본의 크기 $n = 100$일 때, 귀무가설하에서 T_2의 주요부분인 b_i와 누적합인 cb_j통계량의 움직임이다. 이를 살펴보면 b_i는 자료의 앞과 뒤에서 약간 큰 값이 나타나지만, 대체적으로 별다른 특징이 나타나지 않는다.

[그림 2]는 표본의 크기 $n = 100$일 때, 변화점 $\tau = 20$인 대립가설하에서 T_2의 주요부분인 b_i와 누적합인 cb_j통계량의 움직임이다. [그림 4]에서 T_2의 주요부분인 b_i의 그래프는 변화점 $\tau = 20$에서 큰 값을 보였고, 이들의 누적합인 cb_j의 그래프도 변화점 $\tau = 20$에서 가장 큰 기울기를 가짐을 볼 수 있다. b_i의 움직임은 자료의 뒤에서 약간 큰 값이 나타난다. b_i는 자료의 앞부분과 뒷부분의 가중치 모두를 고려한 형태이기 때문이다.

4. 모의실험

본 절에서는 변화점 검정능력을 비교하기 위하여 S-plus를 이용한 모의실험을 통하여 검정통계량의 검정력(power)을 비교한다. 기존에 여러 학자들이 제안한 검정통계

량의 검정력들과 Buckley(1991) 검정통계량을 변형해서 제안하는 검정통계량의 검정력을 비교해 본다.

모의실험에서 사용하는 검정통계량의 모형은 변화점이 1개 존재하는 모형으로 다음을 고려한다.

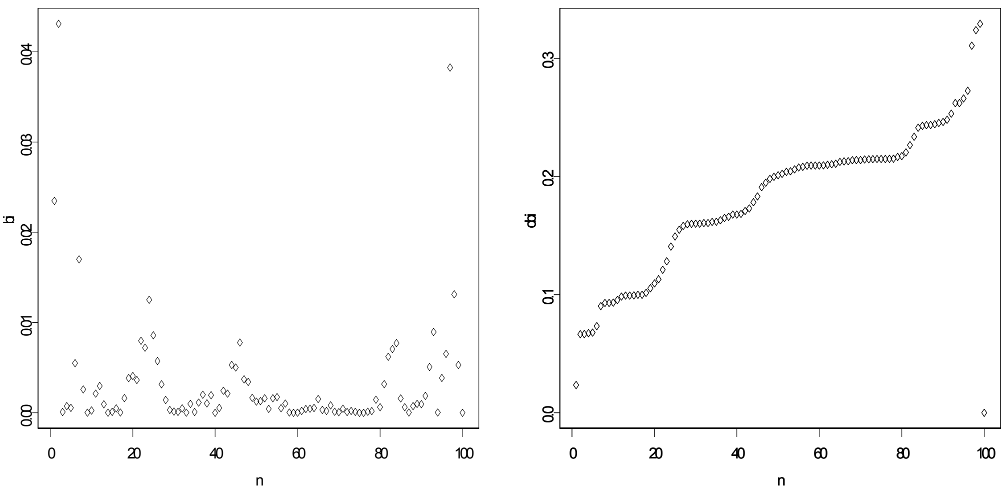
$$X_i = \begin{cases} \mu_1 + \varepsilon_i, & i = 1, 2, \cdots, \tau \\ \mu_2 + \varepsilon_i, & i = \tau + 1, \cdots, n \end{cases}$$

여기서 $\mu_2 = \mu_1 + \delta$로 표현되고 δ는 0이 아닌 상수이고 τ는 변화점이다. 오차항 ε_i는 평균이 0, 분산이 1인 정규분포(normal distribution)를 따른다고 가정한다.

유의수준 $\alpha = 0.10, 0.05, 0.01$ 에 대해서 10,000번 반복 실험을 통해 구해진 경험적 기각치를 사용해서 $\mu_1 = 0$이고 $\mu_2 = 0.5,\ 1.0, 1.5$일 경우에서 검정력을 구한다. 표본의 크기 $n = 50$일 때 변화점 $\tau = 10,\ 20, 25, 35, 40$인 경우인 경우에 검정력을 구하고 이를 비교한다. 비교하고자하는 검정통계량에 대해 다음과 같이 표기한다. T_{G1} 은 $g(t) = \exp(t)$ 함수를 이용한 경우이다.

표 1은 표본의 크기 $n = 50$, 유의수준 $\alpha = 0.05$이고 $\mu_2 = 0.5,\ 1.0, 1.5$ 일 때 변화점 $\tau = 10,\ 20, 25, 35, 40$으로 변형시키면서 얻어진 검정력이다. 변화점 $\tau = 10$일 경우에 T_B의 값이 가장 크고, 그 다음은 제안한 통계량인 T_1과 T_H의 검정력이 크다. 반면에 T_{G1}, T_{CZ}의 검정력은 작은 것을 알 수 있다. 변화점 $\tau = 20, 25, 35$일 경우에는 T_B, T_P, T_{Bu}의 검정력이 크고, 위와 마찬가지로 T_{G1}, T_{CZ}의 검정력은 작다. 변화점이 40일 경우에는 T_B의 검정력은 여전히 크고, T_{G1}와 제안한 T_1의 검정력이 작아짐을 알 수 있다. 변화점의 위치가 자료의 앞부분일 경우에는 T_1 이 우수하고 변화점의 위치가 자료의 뒷부분일 경우에는 T_2 의 검정력이 더 좋다.

[그림 1] $n=100$, 변화점이 없을 때 b_i , cb_j 의 움직임 $(\mu_1=0, \mu_2=0)$



[그림 2] $n=100$, 변화점 $\tau=20$일 때 b_i , cb_j 의 움직임 $(\mu_1=0, \mu_2=1)$

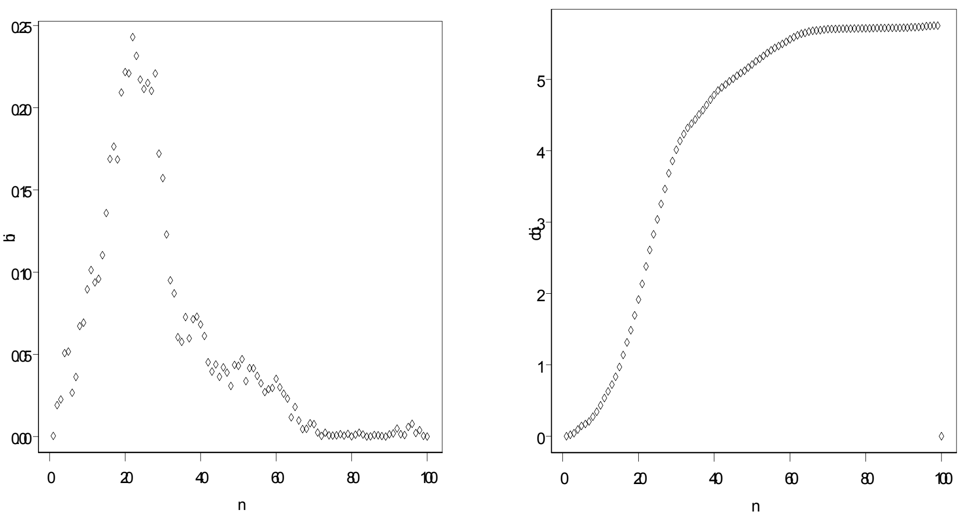


표 1. $n=50$이고 $\alpha=0.05$일 때, 변화점 τ 와 μ_2 값의 변화에 따른 검정력비교

	$\alpha=0.05$											
τ	μ_2	T_{CZ}	T_{Ga}	T_B	T_H	T_P	T_J	T_G	T_{G1}	T_{Bu}	T_1	T_2
10	0.5	0.120	0.155	0.242	0.175	0.139	0.163	0.163	0.114	0.155	0.230	0.172
	1.0	0.496	0.533	0.622	0.614	0.556	0.620	0.620	0.301	0.533	0.694	0.589
	1.5	0.884	0.902	0.902	0.933	0.908	0.946	0.946	0.535	0.902	0.962	0.932
20	0.5	0.245	0.335	0.408	0.257	0.322	0.259	0.259	0.163	0.335	0.330	0.322
	1.0	0.781	0.860	0.905	0.816	0.877	0.802	0.802	0.489	0.860	0.859	0.845
	1.5	0.989	0.996	0.996	0.997	0.997	0.993	0.996	0.795	0.996	0.995	0.995
25	0.5	0.254	0.351	0.453	0.263	0.340	0.263	0.263	0.197	0.351	0.313	0.344
	1.0	0.825	0.898	0.920	0.835	0.900	0.837	0.837	0.543	0.898	0.859	0.870
	1.5	0.997	0.999	0.999	0.999	0.999	0.997	0.997	0.805	0.999	0.999	0.999
35	0.5	0.247	0.293	0.385	0.221	0.265	0.224	0.224	0.168	0.293	0.223	0.291
	1.0	0.761	0.771	0.842	0.762	0.776	0.742	0.742	0.459	0.771	0.637	0.758
	1.5	0.990	0.987	0.989	0.984	0.986	0.986	0.986	0.753	0.987	0.953	0.987
40	0.5	0.203	0.172	0.271	0.173	0.146	0.187	0.187	0.138	0.172	0.140	0.189
	1.0	0.650	0.538	0.613	0.596	0.547	0.610	0.610	0.365	0.538	0.377	0.576
	1.5	0.954	0.884	0.911	0.954	0.908	0.940	0.940	0.622	0.884	0.732	0.914

5. 결론 및 제안

변화점 검정문제는 최근 여러 분야에서 대두되고 있는 문제로, 데이터가 동일한 분포에서 나오지 않을 경우 분포의 변화가 일어나는 시점을 검정하고자 한다. 본 연구에서는 특히 위치모수의 변화가 있을 경우, 자료 내에 존재하는 변화점을 검정하기 위해 누적합을 이용한 Buckley(1991) 검정통계량을 가중치를 이용해 변형시킨 방법을 제안하였다. 또한 모의실험을 통해 기존의 변화점 검정통계량과 제안하는 통계량의 변화점 검정능력을 비교하였다. 모의실험 결과를 보면 제안하는 변화점 검점통계량 T_1은 변화가 자료의 앞부분에서 발생할 때 검정력이 다른 통계량에 비해서 좋다. 또한 검점통계량 T_2는 기존의 검정통계량보다 검정력이 조금 우수하거나 비슷하다. 본 논문에서 소개한 방법 이외에도 여러 가지 변화점 검정방법을 모색할 수 있고 검정력이 더 좋은 변화점 검정방법을 기대한다.

참 고 문 헌

1. Brown, R. L., Durbin, J. & Evans, J. M. (1975), Techniques for testing the constancy of regression relationships over time. *J.R. Statist. Soc. B* 37, 149-192.
2. Buckley, M. J. (1991), Detecting a smooth signal: Optimality of cusum based procedures. *Biometrika*, 78, 2, 253-256.
3. Chernoff, H., and Zacks, S. (1964), Estimating the current mean of a normal distribution which is subject to changes in time. *Annals of Mathematical Statistics*, 35, 999-1028.
4. Gardner, L. A. (1969), On detecting changes in the mean of normal variates. *The Annals of Mathematical Statistics* 40, 1, 116-126.
5. Gombay, E. (1990), Asymptotic distributions of maximum likelihood tests for change in the mean. *Biometrika* 77, 2, 411-4.
6. Hawkins, D. M. (1977), Testing a sequence of observations for a shift in location. *Journal of the American Statistical Association,* 72, 357.
7. James, B., James, K. L. & Siegmund, D. (1987), Tests for a cange-point. *Biometrika* 74, 1, 71-83.
8. Pettitt, A. N. (1979), A nonparametric approach to the change problem. *Applied Statistis*, 28, 126-135.
9. Pettitt, A. N. (1980), A simple cumulative sum type statistic for the change-point problem with zero-one observations. *Biometrika* 67, 1, 79-84.
10. Sen, A. & Srivastava, M. S. (1975), On tests for detecting change in mean. *The Annals of Statistics* 3, 1, 98-108
11. 서현주. (2002), 점수함수를 이용한 비모수적 변화점 추정, 덕성여자대학교

석사논문
12. 장희윤. (1999), 위치모수의 변화가 있는 경우 비모수적 변화점 정통계량에 관한 연구, 덕성여자대학교 석사논문.

[2003년 2월 접수, 2003년 4월 채택]