Journal of Korean
Data & Information Science Society
2003, Vol. 14, No.2 pp. 153~165

Test of the Hypothesis based on Nonlinear Regression Quantiles Estimators

Seunghoe Choi[1)]

Abstract

This paper considers the likelihood ratio test statistic based on nonlinear regression quantiles estimators in order to test of hypothesis about the regression parameter θ_o and derives asymptotic distribution of proposed test statistic under the null hypothesis and a sequence of local alternative hypothesis. The paper also investigates asymptotic relative efficiency of the proposed test to the test based on the least squares estimators or the least absolute deviation estimators and gives some examples to illustrate the application of the main result.

Key Word : Nonlinear Regression Quantiles Estimators, Likelihood Ratio Test, Asymptotic Relative Efficiency.

1. 서론

회귀분석이란 어떤 변수(종속변수 또는 반응변수)의 변화를 다른 변수(독립변수 또는 설명변수)들을 이용하여 설명 또는 예측하는 방법이다. 이 때 독립변수와 종속변수에 대한 함수 관계를 회귀모형(regression model)이라 한다. 회귀분석에 있어서 중요한 통계적인 문제는 회귀모형에 포함된 모수를 주어진 독립변수와 종속변수를 이용하여 추정 또는 검정하는 방법이다.

본 논문에서는 다음과 같은 비선형회귀모형을 생각한다.

$$y_t = f(x_t, \theta_o) + \varepsilon_t, \qquad t = 1, \cdots, n, \tag{1.1}$$

여기서 x_t는 R^m의 부분공간 Γ에 속하는 t번째의 고정된 벡터이고, θ_o는 모수공간 $\Theta \subset R^p$에 속하는 미지벡터이다. 그리고 반응함수 f는 $R^m \times R^p$에서 R로 가는 연속

1) Associate Professor, Department of General Studies, Hankuk Aviation University, Koyang, Kyungkido, 412-791, Korea
E-mail : shchoi@mail.hangkong.ac.kr

함수이며, 오차항 ε_t는 서로 독립이고 같은 분포를 따르는 확률변수로서 평균이 0이고 분산이 유한하다. 즉, $E(\varepsilon_t)=0$이고 $Var(\varepsilon_t)=\sigma^2<\infty$이다.

비선형회귀모형에 대한 추정 및 검정 방법으로 가장 일반적인 방법은 최소제곱(Least Squares, LS)추정량이다. 함수

$$S_n(\theta)=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_t-f(x_t,\theta))^2$$

의 값을 최소로 하는 LS추정량 $\widetilde{\theta}_n$을 이용한 추정 및 검정에 대한 연구는 여러 사람들에 의해서 연구되어왔다 (Jennich(1969), Wu(1981), Gallant(1987) 참조). 그러나, 이상치 (outlier)에 매우 민감한 LS추정량을 이용한 검정은 오차의 분포가 정규분포을 따르지 않거나 혹은 이상치를 포함하고 있을 경우에는 검정력(power of test)이 떨어진다.

LS추정량의 대안으로 Bassett and Koenker(1978)는 최소절대편차(Least Absolute Deviation, LAD)추정량을 제안하고 다음 함수

$$R_n(\theta:\frac{1}{2})=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}|y_t-f(x_t,\theta)|$$

을 최소화하는 값 $\widehat{\theta}_n(\frac{1}{2})$을 LAD추정량이라 하였다.

비선형회귀모형에 대한 오차의 꼬리 부분이 비교적 두꺼운 경우이거나 중앙값 근방에서 오차의 확률밀도함수 값이 작은 경우에는 LAD추정량을 이용한 검정이 LS추정량에 근거한 검정보다도 더 효율적임을 Choi와 Kim(1995)이 설명하였다. 그러나 LAD추정량은 오차의 분포가 비대칭일 경우에는 효율성이 떨어질 수 있음으로 새로운 추정량을 보완하여야 한다 (Choi et al.(2000) 참조).

Koenker and Bassett(1978)는 LAD추정량을 보완하기 위하여 분위수 개념을 회귀모형에 일반화한 회귀분위(Regression Quantiles, RQ)추정량을 소개하고 함수

$$R_n(\theta:\beta)=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\rho_\beta(y_t-f(x_t,\theta)) \tag{1.2}$$

을 최소로 하는 값 $\widehat{\theta}_n(\beta)$을 β-RQ추정량이라 하였다. 여기서 함수 ρ_β는

$$\rho_\beta(x)=\begin{cases}\beta x, & x\geq 0\\ (\beta-1)x, & x<0\end{cases}$$

이고 $0<\beta<1$ 이다. 특히, LAD추정량은 $\frac{1}{2}$-RQ추정량이다. 비선형 RQ추정량에 대한 여러 가지 통계적인 성질들은 Choi et al.(2001)와 Jureckova와 Prochazka(1994), 그리고 Koenker와 Bassett(1982)에 의해서 연구되어 왔다.

본 논문에서는 비선형회귀모형에 대한 회귀모수 θ_o의 가설을 검증하기 위하여 RQ추정량을 이용한 우도비 검정통계량을 소개하고, 귀무가설과 대립가설을 만족하는 모수공간에서 제안된 검정통계량의 점근적 분포를 유도한다. 그리고 LS추정량이나 혹은 LAD추정량을 이용한 검정통계량에 대한 제안된 검정통계량의 점근적 효율성을 유도하고, 여러 가지 오차 분포에 대한 검정통계량의 효율성을 비교 조사한다.

2. 검정통계량의 점근적 분포

본 절에서는 (1.2)에서 정의된 RQ추정량을 이용한 우도비 검정통계량(likelihood ratio test statistics)을 소개하고, 제안된 검정통계량이 카이제곱분포에 수렴하도록 하는 충분 조건을 제시한다. 함수 u는 R^p에서 R^q로 가는 연속함수이고, $\frac{\partial}{\partial\theta_i}u(\theta)$는 모수공간 Θ위에서 연속이며 $\nabla u(\theta)=\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}u(\theta)\right]_{(q\times p)}$의 계수는 q라 하자. 그리고 (Γ, A, P_x)는 R^m위에서 정의된 확률공간이라 하자.

본 논문에서는 다음과 같은 비선형 가설

$$H_o: u(\theta)=0$$

에 대한 검정을 한다. 특히, 함수 u가 θ에 대하여 선형이며 $u(\theta)=M\theta$을 만족하는 $q\times p$행렬 M이 존재하여 선형모델 $y=X^t\theta+\varepsilon$에 대한 선형 가설

$$H_o: M\theta=\gamma$$

을 만족한다. 그리고 검정통계량의 검정력을 구하기 위해서 주어진 귀무가설에 대응하는 대립가설

$$H_1: u(\theta)\neq 0$$

을 만족하는 모수공간에서 검정통계량의 점근적 분포를 구하여야 한다. 그러나 대립가설을 만족하는 모든 θ에 대하여 검정통계량의 극한분포를 구하는 것은 쉽지 않으므로 다음과 같은 국소대립가설(local alternative hypothesis)

$$H_n: u(\theta)=\frac{\gamma}{\sqrt{n}},\quad \gamma\in R^q$$

을 생각하자.

본 논문에서 사용되는 여러 가지 기호를 간단히 하기 위하여 다음과 같은 기호를 정의하자.

$$f_t(\theta)=f(x_t,\theta),\quad \nabla f_t(\theta)=\left[\frac{\partial}{\partial\theta_j}f_t(\theta)\right]_{(p\times 1)},\quad \Theta_o=\{\theta: u(\theta)=0\},$$
$$R_n(\widehat{\theta}_n^u(\beta);\beta)=\min\{R_n(\theta:\beta): \theta\in\Theta_o\}.$$

지금 비선형회귀모형에 대한 우도비 검정통계량을 소개하자. 귀무가설을 만족하는 공간에 대한 목적함수 $R_n(\theta:\beta)$의 최대치와 모수 공간에 대한 목적함수의 최대치의 비로 정의되는 우도비를 변형하여 다음과 같은

$$L_n(\beta)=\frac{ng(0)}{\sqrt{\beta(1-\beta)}}\left\{R_n(\widehat{\theta}_n^u(\beta);\beta)-R_n(\widehat{\theta}_n(\beta);\beta)\right\}$$

우도비 검정통계량을 정의하자.

우도비 검정통계량 $L_n(\beta)$의 점근적 분포를 유도하기 위하여 다음과 같은 조건들이 비선형회귀모형 (1.1)에 성립한다고 가정하자.

가정 A

A_1 : 모수공간 Θ는 R^p의 컴팩트(compat) 부분공간이고, 집합 Γ는 R^m의 유계인 부분공간이다.

A_2 : 모수공간 Θ에 속하는 모든 θ에 대해 $\nabla f_t(\theta)$가 존재하고, $\nabla f_t(\theta)$는 $\Gamma \times \Theta$에서 연속이다.

A_3 : 오차의 밀도함수 $g(x)$는 $G^{-1}(\beta)=0$에서 양수이고 R에서 연속이다.

A_4 : 행렬 $V_n(\theta_o)=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\nabla f_t(\theta_o)\nabla^t f_t(\theta_o)$은 어떤 양의 정칙행렬 $V(\theta_o)$로 수렴한다.

A_5 : 임의의 $\theta_o \neq \theta$에 대해여 $P_x\{x\in\Gamma : f(x,\theta_o) \neq f(x,\theta)\}>0$ 이다.

A_6 : 집합 $K_n(\beta)=\{t: f_t(\theta)\neq f_t(\theta_o), \theta\neq\theta_o\}$ 의 원소 수 $k_n(\beta)$와 전체 자료 수 n의 비, 즉 $\frac{k_n(\beta)}{n}$는 $k(\beta)$로 수렴하고 $0<k(\beta)<1$이다.

Choi et al. (2001)에 의해서 증명된 다음 정리는 RQ추정량의 강수렴성과 점근적 정규성을 설명하다.

정리 2.1 비선형회귀모형 (1.2)이 가정 A을 만족한다고 하자. 그러면 다음이 성립한다.

(1) $\widehat{\theta}_n(\beta)$는 θ_o로 강수렴한다.

(2) $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n(\beta)-\theta_o)$는 $N(0, \frac{\beta(1-\beta)}{g^2(0)}V^{-1}(\theta_o))$로 분포수렴한다.

일반적으로 검정통계량 $L_n(\beta)$의 극한 분포를 유도하기 위해서 목적함수 $R_n(\theta:\beta)$에 대한 테일러전개식을 사용한다. 그러나 (1.2)에서 정의된 함수 $\rho_\beta(x)$는 $x=0$에서 미분이 불가능함으로 목적함수 $R_n(\theta:\beta)$에 대한 변형된 이차형식 함수를 생각하여야 한다. 따라서 다음과 같은

$$Q_n(\theta:\beta)=R_n(\theta_o:\beta)+(\theta-\theta_o)^t D_n(\theta_o:\beta)+\frac{g(0)}{2}(\theta-\theta_o)V_n(\theta_o)(\theta-\theta_o)$$

이차형식 함수를 생각하자. 여기서

$$D_n(\theta)=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\psi_\beta(y_t-f_t(\theta))\nabla f_t(\theta)$$

이고

$$\psi_\beta(x)=\begin{cases}\beta, & \text{if } x>0,\\ 0, & \text{if } x=0,\\ 1-\beta, & \text{if } x<0\end{cases}$$

이다.

다음 정리는 θ에 관한 이차형식 $Q_n(\theta:\beta)$와 (1.2)에서 정의된 목적함수 $R_n(\theta:\beta)$가

점근적으로 동등함을 보여주고 이차형식 $Q_n(\theta:\beta)$을 모수공간 Θ와 Θ_o에서 최소로 하는 값 $\widetilde{\theta}_n(\beta)$와 $\widetilde{\theta}_n^u(\beta)$에 대한 강수렴성을 설명한다.

정리 2.2 $M_n(\theta_o) = \{\theta: \sqrt{n}\,\|\theta-\theta_o\| \le M, M\in R^+\}$라 하자. 그러면 정리 2.1과 같은 조건하에서 다음이 성립한다.

(1) $Sup_{\theta\in M_n(\theta_o)}|Q_n(\theta:\beta)-R_n(\theta:\beta)| = 0_p(\frac{1}{n})$.

(2) $\widetilde{\theta}_n(\beta)$와 $\widetilde{\theta}_n^u(\beta)$는 각 각 θ_o에 강수렴한다.

여기서 $0_p(1)$은 확률수렴을 표시한다.

증명 먼저, 이차형식 $Q_n(\theta:\beta)$에 대한 기울기를 구하면

$$\nabla Q_n(\theta:\beta) = D_n(\theta_o:\beta) + g(0)\,V_n(\theta_o)(\theta-\theta_o)$$

이다. $M_n(\theta_o)$에 속하는 점 θ와 θ_o을 연결하는 선분 위의 모든 점은 $\theta_\lambda = \lambda\theta + (1-\lambda)\,\theta_o$와 같이 표시할 수 있다. 연쇄법칙과 $H\dot{o}lder$부등식을 이용하여 아래와 같은 식

$$\begin{aligned} n|Q_n(\theta:\beta)-R_n(\theta:\beta)| &\le n\sum_{j=1}^{p}|(\theta_j-\theta_{oj})\,Q_{nj}(\theta_\lambda:\beta)-D_{nj}(\theta_\lambda:\beta)| \\ &\le \sqrt{n}\|\theta-\theta_o\|\|\sqrt{n}\,\nabla Q_n(\theta:\beta)-D_n(\theta:\beta)\| \end{aligned}$$

을 유도할 수 있다. 여기서 $Q_{nj}(\theta:\beta) = \left[\frac{\partial}{\partial\theta_j}Q_n(\theta:\beta)\right]$이다. Choi(1994)의 보조정리 3.2를 이용하여 $M_n(\theta_o)$에 속하는 점 θ에 대하여 다음 식

$$\sqrt{n}D_n(\theta:\beta)-D_n(\theta_o:\beta)-g(0)\,V_n(\theta_o)(\theta-\theta_o) = 0_p(1)$$

을 유도할 수 있다. 따라서, 위 식은 다음 식

$$\|\sqrt{n}\{\nabla Q_n(\theta:\beta)-D_n(\theta:\beta)\}\|$$

가 0로 수렴함을 의미한다.

다음, 함수 $\psi_\beta(x)$에 대한 적분을 이용하여

$$E[D_{nj}(\theta_o:\beta)] = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\{\beta-G_t(0)\}(f_t)_j(\theta_o)$$

와

$$Var[D_{nj}(\theta_o:\beta)] \le \frac{\beta(1-\beta)}{n}$$

을 유도할 수 있다. 따라서, 가정 A_1에서 $D_{nj}(\theta_o:\beta)$가 0로 수렴함으로

$$\{Q_n(\theta:\beta)-Q_n(\theta_o:\beta)\} = \frac{g(0)}{2}(\theta-\theta_o)^t V_n(\theta_o)(\theta-\theta_o)+0_p(1)$$

임을 알 수 있다. 그러므로, 가정 A_4는 다음 식

$$inf_{\|\theta-\theta_o\|\ge\delta}\{Q_n(\theta:\beta)-Q_n(\theta_o:\beta)\} > 0$$

가 성립함을 설명한다. 이것은 추정량 $\tilde{\theta}_n(\beta)$가 θ_o에 수렴함을 보여준다.

다음 정리는 RQ추정량 $\hat{\theta}_n(\beta)$와 RQ추정량의 유사추정량인 $\tilde{\theta}_n(\beta)$가 점근적으로 동등함을 보여준다.

정리 2.3 정리 2.1과 같은 조건 하에서 다음이 성립한다.
(1) $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n(\beta)-\tilde{\theta}_n(\beta)) = o_p(1)$.
(2) $\tilde{Q}_n(\beta)-\hat{Q}_n(\beta)=o_p(1)$이고 $\tilde{Q}^u_n(\beta)-\hat{Q}^u_n(\beta)=o_p(1)$이다.
여기서 $\tilde{Q}_n(\beta)=Q_n(\tilde{\theta}_n(\beta):\beta)$, $\hat{Q}_n(\beta)=Q_n(\hat{\theta}_n(\beta):\beta)$, $\tilde{Q}^u_n(\beta)=Q_n(\tilde{\theta}^u_n(\beta):\beta)$이고 $\hat{Q}^u_n(\beta)=Q_n(\hat{\theta}^u_n(\beta):\beta)$이다.

증명 정리 2.2의 두 번째 결과는 충분히 큰 n과 $\gamma>0$에 대해 다음 식

$$\| \tilde{\theta}_n(\beta)-\theta_o\| \le \frac{\gamma}{\sqrt{n}}$$

가 성립함을 설명하여 준다. 또한, 임의의 $\varepsilon>0$와 집합

$$\Gamma_n(\tilde{\theta}_n(\beta))=\left\{\theta\in\Theta : \| \tilde{\theta}_n(\beta)-\theta\| \le \frac{\gamma}{\sqrt{n}}\right\}$$

에 속하는 점 θ에 대하여

$$R_n(\tilde{\theta}_n(\beta):\beta) < R_n(\theta:\beta)+\varepsilon^*$$

을 만족함으로 $R_n(\theta:\beta)$는 집합 $\Gamma_n(\tilde{\theta}_n(\beta))$에서 유일한 최소값을 갖는다. 따라서, (1)번을 증명하기 위해서 집합 $\Gamma^C_n(\tilde{\theta}_n(\beta))$에 속하는 임의의 점 θ에 대하여 다음 식

$$R_n(\theta:\beta)-R_n(\theta_o:\beta)$$

가 양수임을 보이면 충분하다. 여기서, $\Gamma^C_n(\tilde{\theta}_n(\beta))$는 $\Gamma_n(\tilde{\theta}_n(\beta))$의 여집합이다. 귀류법을 이용하기 위해 $R_n(\theta_n(\beta):\beta)\le R_n(\theta_o:\beta)$을 만족하는 $\theta_n(\beta)\in\Gamma^C_n(\tilde{\theta}_n(\beta))$가 존재한다고 가정하고

$$X_t(\beta,\theta_n,\theta_o)=\varphi_\beta(r_t(\theta_n(\beta)))-\varphi_\beta(r_t(\theta_o))$$

라 하자. 그러면 $\varphi_\beta(x)$의 볼록성(convexity)은 다음을 설명한다.

$$X_t(\beta,\theta_n,\theta_o) < \varphi_\beta[f_t(\theta_o)-f_t(\theta_n(\beta))].$$

또한, $\tau_\beta=\max\{\beta,1-\beta\}$이고 $\theta^*_n(\beta)=\lambda\theta_n(\beta)+(1-\lambda)\theta_o$라 하면 $H\ddot{o}lder$부등식에 의하여 다음 식

$$\begin{aligned} X_t(\beta,\theta_n,\theta_o) &\le \varphi_\beta(d_t(\theta_n(\beta))) \\ &\le \tau_\beta \|\nabla f_t(\theta^*_n(\beta))\| \|\theta_n(\beta)-\theta_o\| \end{aligned}$$

가 성립하고, Chebyshev의 부등식은 다음 식

$$R_n(\theta_n(\beta):\beta) - R_n(\theta_o:\beta) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} EX_t(\beta, \theta_n, \theta_o) + 0_p(1)$$

을 설명하여 준다. 한편, $X_t(\beta, \theta_n, \theta_o)$의 기대값

$$\begin{cases} \int_0^{d_t(\theta_n(\beta))} (d_t(\theta_n(\beta)) - \lambda)\, dG_t(\lambda) & \text{if } d_t(\theta_n(\beta)) > 0 \\ \int_{d_t(\theta_n(\beta))}^{0} (\lambda - d_t(\theta_n(\beta)))\, dG_t(\lambda) & \text{if } d_t(\theta_n(\beta)) < 0 \end{cases}$$

에 의하여 $X_t(\beta, \theta_n, \theta_o)$의 기대값은

$$\zeta_n(\beta) \equiv \min\{ g_t(\eta^*)[G_t(d_t(\theta_n(\beta))) - G_t(0)],\ \ g_t(\eta^{**})[G_t(0) - G_t(d_t(\theta_n(\beta)))]\}$$

보다 크다. 여기서 η^*와 η^{**}는 0과 $d_t(\theta_n(\beta))$ 사이의 내분점이다. 따라서, 가정 A_6은

$$R_n(\theta_n(\beta):\beta) - R_n(\theta_o:\beta) \geq \frac{\varkappa_n(\beta)}{n}\,\xi_n(\beta)$$

임을 보여준다. 따라서 위 결과는 가정 A_4로부터 모순임을 알 수 있으므로 (1)는 성립한다.

(2)번을 증명하기 위하여 다음 식을 생각하자.

$$n(\tilde{Q}_n(\beta) - \hat{Q}_n(\beta)) = \sqrt{n}(\tilde{\theta}_n(\beta) - \hat{\theta}_n(\beta))'\sqrt{n}D_n(\theta_o:\beta)$$

$$+\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n(\beta) - \hat{\theta}_n(\beta))' g(0)V^{-1}(\theta_o)\{\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n(\beta) - \theta_o) - \sqrt{n}(\hat{\theta}_n(\beta) - \theta_o)\}.$$

한편, $E(\psi_\beta(\varepsilon_t)) = 0$이고 $Var(\psi_\beta(\varepsilon_t)) = \beta(1-\beta)$이므로 Linderberg의 중심극한정리에 의하여 $D_n(\theta_o:\beta)$는 정규분포 $N(0, \beta(1-\beta)V(\theta_o))$로 분포수렴한다. 따라서, 정리 2.2로부터 (2)는 증명된다.

비선형회귀모형에 대한 우도비 검정통계량 $L_n(\beta)$의 검정력을 구하기 위하여 다음과 같은 조건을 추가하자.

가정 B

B_1: 표본의 크기 n에 대하여 $u(\theta) = \frac{\gamma_n(\beta)}{\sqrt{n}}$을 만족하는 고정된 $\gamma_n(\beta) \in R^q$가 존재하고 $\gamma_n(\beta)$는 $\gamma(\beta)$로 수렴한다.

다음 정리는 본 논문의 중심 정리로서 우도비 검정통계량 $L_n(\beta)$는 중심이 0이 아닌 카이제곱분포로 분포수렴함을 보여준다.

정리 2.4 비선형회귀모형 (1.1)은 가정 A와 B을 만족한다고 하자. 그러면 RQ추정량을 이용한 우도비 검정통계량 $L_n(\beta)$는 자유도가 q이고 중심이

$$\lambda = \frac{g^2(0)}{2\beta(1-\beta)}\,\gamma^t(\beta)[U^t V^{-1}(\theta_o)U]^{-1}\gamma(\beta)$$

인 카이제곱분포 $\chi^2(q,\lambda)$로 분포수렴한다. 특히, 귀무가설을 만족하는 조건에서는 $\lambda = 0$이고 $U = \nabla u(\theta_o)$이다.

증명 먼저, 식 $R_n(\widehat{\theta}^u_n(\beta):\beta) - R_n(\widehat{\theta}_n(\beta):\beta) =$

$$\{R_n(\widehat{\theta}^u_n(\beta):\beta) - Q_n(\widehat{\theta}^u_n(\beta):\beta)\} + \{Q_n(\widehat{\theta}^u_n(\beta):\beta) - Q_n(\widetilde{\theta}^u_n(\beta):\beta)\}$$

$$+\{Q_n(\widetilde{\theta}^u_n(\beta):\beta) - Q_n(\widetilde{\theta}_n(\beta):\beta)\} + \{Q_n(\widetilde{\theta}_n(\beta):\beta) - Q_n(\widehat{\theta}_n(\beta):\beta)\}$$

$$+\{Q_n(\widehat{\theta}_n(\beta):\beta) - R_n(\widehat{\theta}_n(\beta):\beta)\}$$

와 같으므로, 정리 2.2와 2.3은 다음 식

$$n\{R_n(\widehat{\theta}^u_n(\beta):\beta) - R_n(\widehat{\theta}_n(\beta):\beta)\} \cong n\{Q_n(\widetilde{\theta}^u_n(\beta):\beta) - Q_n(\widetilde{\theta}_n(\beta):\beta)\} + 0_p(1)$$

을 설명한다. 위 식과 테일러정리에 의하여 다음 식

$$\nabla Q_n(\widetilde{\theta}^u_n(\beta):\beta) = \nabla Q_n(\widetilde{\theta}_n(\beta):\beta) + [g(0)\,V_n(\theta^*_n(\beta))(\widetilde{\theta}^u_n(\beta) - \widetilde{\theta}_n(\beta))]$$

가 성립한다. 여기서 $\theta^*_n(\beta) = \lambda(\widetilde{\theta}^u_n(\beta)) + (1-\lambda)\widetilde{\theta}_n(\beta)$이다. 또한, $\nabla Q_n(\widetilde{\theta}^u_n(\beta):\beta)$에 대한
테일러정리를 이용하여 다음 식

$$(\widetilde{\theta}^u_n(\beta) - \widetilde{\theta}_n(\beta)) = \frac{1}{g(0)}\,V_n^{-1}(\theta^*_n(\beta))\nabla Q_n(\widetilde{\theta}^u_n(\beta):\beta)$$

가 성립함을 알 수 있다. 따라서 위 식으로부터

$$Q_n(\widetilde{\theta}^u_n(\beta):\beta) - Q_n(\widetilde{\theta}_n(\beta):\beta) = (\widetilde{\theta}^u_n(\beta) - \widetilde{\theta}_n(\beta))^t[g(0)\,V_n(\theta_o)](\widetilde{\theta}^u_n(\beta) - \widetilde{\theta}_n(\beta))$$

$$= \frac{1}{g(0)}\,\nabla^t Q_n(\widetilde{\theta}^u_n(\beta):\beta)V_n^{-1}(\theta_o)\nabla^t Q(\widetilde{\theta}^u_n(\beta):\beta)$$

이 성립함으로 다음 식을 얻을 수 있다.

$$L_n(\beta) \cong \sqrt{n}\,\nabla^t Q_n(\widetilde{\theta}^u_n(\beta):\beta)\left[\frac{1}{\beta(1-\beta)}\,V_n^{-1}(\theta_o)\right]\sqrt{n}\,\nabla^* Q_n(\widetilde{\theta}^u_n(\beta):\beta).$$

위와 비슷한 방법으로 다음 식

$$\nabla Q_n(\widetilde{\theta}^u_n(\beta):\beta) = \nabla Q_n(\theta_o:\beta) + g(0)\,V_n(\theta_o)(\widetilde{\theta}^u_n(\beta) - \theta_o)$$

을 유도할 수 있다. 그러므로 $\widehat{U}_n(\beta) = \nabla u(\widehat{\theta}_n(\beta))$라 하면 $\widehat{U}_n(\beta)V_n^{-1}(\theta_o)\nabla Q_n(\widetilde{\theta}^u_n(\beta):\beta) =$ 다음 식

$$\widehat{U}_n(\beta)V_n^{-1}(\theta_o)[D_n(\theta_o:\beta)] + g(0)\,V_n(\theta_o)\widehat{U}^{-1}[u(\widetilde{\theta}^u_n(\beta)) - u(\theta_o)]$$

$$= \widehat{U}_n(\beta)V_n^{-1}(\theta_o)[D_n(\theta_o:\beta)] + g(0)[u(\widetilde{\theta}^u_n(\beta)) - u(\theta_o)]$$

$$= \tilde{U}_n(\beta)V_n^{-1}(\theta_o)D_n(\theta_o:\beta) - g(0)u(\theta_o)$$

와 같다. 위 식과 라그랑지(Lagrange)정리

$$\nabla Q_n(\tilde{\theta}_n^u(\beta):\beta) - \tilde{U}_n(\beta)\lambda_n(\beta) = 0_p(1)$$

는 다음 식이 성립함을 설명한다.

$$\sqrt{n}\nabla Q_n(\tilde{\theta}_n^u(\beta):\beta) = \tilde{U}_n(\beta)\sqrt{n}\lambda_n(\beta) + 0_p(1)$$

$$= \tilde{U}_n(\beta)[\tilde{U}_n(\beta)V_n^{-1}(\theta_o)\tilde{U}_n(\beta)]^{-1}[\tilde{U}_n(\beta)V_n^{-1}(\theta_o)\tilde{U}_n(\beta)]\sqrt{n}\lambda_n + 0_p(1)$$

$$= \tilde{U}_n(\beta)[\tilde{U}_n(\beta)V_n^{-1}(\theta_o)\tilde{U}_n(\beta)]^{-1}\tilde{U}_n(\beta)V_n^{-1}(\theta_o)[\sqrt{n}\nabla Q_n(\tilde{\theta}_n^u(\beta):\beta)]$$

$$= \tilde{U}_n(\beta)[\tilde{U}_n(\beta)V_n^{-1}(\theta_o)\tilde{U}_n(\beta)]^{-1}\tilde{U}_n(\beta)V_n^{-1}(\theta_o)\sqrt{n}D_n(\theta_o:\beta)$$
$$- g(0)[\tilde{U}_n(\beta)V_n^{-1}(\theta_o)\tilde{U}_n(\beta)]^{-1}\sqrt{n}u(\theta_o).$$

특히, $\sqrt{n}D_n(\theta_o:\beta)$는 정규분포 $N(0, \beta(1-\beta)V(\theta_o))$로 수렴함으로 식 $\nabla Q_n(\tilde{\theta}_n^u(\beta):\beta)$는 정규분포 $N(-g(0)U[U^tV^{-1}(\theta_o)U]^{-1}\gamma(\beta),\ \beta(1-\beta)U^t(UV^{-1}(\theta_o)U^t)^{-1}U)$로 분포수렴한다. 여기서 $\tilde{U}_n(\beta)$는 U로 수렴한다. 그러므로 우도비 검정통계량 $L_n(\beta)$는 중심이 0이 아닌 카이제곱분포로 분포수렴한다.

앞에서 정의된 귀무가설 $H_o: u(\theta) = 0$을 채택하거나 기각을 하기 위해서는 검정통계량 $L_n(\beta)$에 포함되어 있는 $g(0)$의 값을 추정하여야 한다. Lin(1992)은 $g(0)$의 값을 추정하는 여러 방법을 제시하고 연구하였다. 만약 $g(0)$의 추정치가 $\hat{g}(0)$라 한다면 귀무가설 $H_o: u(\theta) = 0$는

$$\hat{L}_n(\beta) \geq \text{ or } \leq \chi^2_{1-\alpha}(q, 0)$$

에 따라 기각하거나 채택할 수 있다.

3. 점근적 효율성

본 절에서는 LS추정량을 이용한 검정통계량에 대한 RQ추정량에 근거한 우도비 검정통계량 $L_n(\beta)$의 점근적 효율성(Asymptotic Relative Efficiency : ARE)을 유도하고 이것을 이용하여 오차의 분포에 따라 효율적인 검정통계량을 제시한다.

이를 위하여 Gallant(1987)가 설명한 LS추정량에 대한 점근적 성질을 이용하자. $\tilde{\theta}_n$는 비선형회귀모형에 대한 LS추정량이고 σ^2은 오차의 분산일 경우, $\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta_o)$는 정규분포

$N(0, \sigma^2 V^{-1}(\theta_o))$로 분포수렴하고 $\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_t - f_t(\widetilde{\theta}_n))^2$은 σ^2로 강수렴한다. 또한, $S_n(\widetilde{\theta}_n)$와 $S_n(\widetilde{\theta}_n^u)$을 각 각

$$S_n(\widetilde{\theta}_n) = \min_{\Theta} \sum_{t=1}^{n}(y_t - f_t(\widetilde{\theta}_n))^2$$

와

$$S_n(\widetilde{\theta}_n^u) = \min_{\Theta_o} \sum_{t=1}^{n}(y_t - f_t(\widetilde{\theta}_n))^2$$

같이 정의하자. 그러면, LS추정량에 대한 점근적 정규성으로부터 다음 식

$$T_n = n\sigma^{-2}[S_n(\widetilde{\theta}_n) - S_n(\widetilde{\theta}_n^u)]$$

는 카이제곱분포 $\chi^2(q, \lambda)$로 분포수렴함을 유도할 수 있다. 여기서

$$\lambda = \frac{\sigma^{-2}}{2}\gamma^t(\beta)[U^t V^{-1}(\theta_o)U]\gamma(\beta)$$

이다.

Lehmann(1986)은 두 검정통계량의 점근적 상대효율을 동일한 대립가설에서 동일한 검정력을 가지기 위해 필요한 표본 수에 대한 비로 정의하였다. Lehmann의 정의에 의하여 다음과 같은 사실을 위 식과 정리 2.4로부터 유도할 수 있다. 또한, 다음 정리는 두 검정통계량의 점근적 효율성이 오차의 분포에 의존하는 것을 설명하여 주고 있다.

정리 3.1 정리 2.4와 같은 조건하에서 LS추정량에 근거한 검정통계량에 대한 RQ추정량을 이용한 검정통계량의 점근적 상대효율은 $\frac{\sqrt{\beta(1-\beta)}}{g(0)}$와 σ의 비와 같다. 즉,

$$ARE(L_n(\beta) : T_n) = \frac{\sigma}{\frac{\sqrt{\beta(1-\beta)}}{g(0)}}$$

이다.

이제, 여러 가지 예제를 통하여 본 논문에서 제시된 검정통계량의 점근적 효율성을 조사하여 보자. 예제1은 오차의 분포가 분산이 1보다 작은 비대칭 정규분포이고, 예제2는 분산이 1보다 큰 비대칭 정규분포를 생각하였다. 그리고 예제3은 비대칭 이중지수분포를 생각하였다. 아래와 같은 예제에서는 LAD추정량의 충분조건을 만족하지 못함으로 LAD추정량에 근거한 검정통계량을 생각할 수 없으나 RQ추정량을 이용한 우도비 검정통계량 $L_n(\beta)$과 효율성을 비교하였다.

예제1 (혼합된 정규분포)

오차에 대한 분포함수가

$$g(x) = \lambda h_1(x:0,1) + (1-\lambda)h_1(x:1,1)$$

라 하자. 여기서

$$h_1(x:\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],\qquad -\infty<x<\infty$$

이다. 만약 $\lambda=0.9$라 하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\sigma^2=\lambda^2+(1-\lambda)^2=0.82,\ \sigma=0.9055,$$
$$g(0)\approx 0.3833,\ \beta=\lambda Z(0)+(1-\lambda)Z(-1)\approx 0.4659,$$
$$\frac{\sqrt{\beta(1-\beta)}}{g(0)}\approx 1.3077,\ \frac{1}{2g(0)}\approx 1.3045.$$

따라서, 이와 같이 분산이 1보다 작은 비대칭 정규분포일 경우에는 LS추정량에 근거한 검정통계량이 RQ추정량을 이용한 검정통계량보다 효율적이다.

예제2 (혼합된 정규분포)
오차에 대한 분포함수가

$$g(x)=\lambda h_1(x:0,1)+(1-\lambda)h_1(x:1,2)$$

라 하자. 만약 $\lambda=0.2$라 하면 다음과 같은 식

$$\sigma^2=\lambda^2+4(1-\lambda)^2=2.6,\ \sigma=1.6125,$$
$$g(0)\approx 0.1998,\ \beta=G(0)\approx 0.95,$$
$$\tau(\beta)=\frac{\sqrt{\beta(1-\beta)}}{g(0)}\approx 1.0911,\ \frac{1}{2g(0)}\approx 2.5025$$

을 얻을 수 있다. 따라서, 분산이 1보다 큰 비대칭 정규분포인 경우는 RQ추정량을 이용한 검정통계량이 LS추정량이나 LAD추정량에 근거한 검정통계량보다 효율적이다.

예제 3 (혼합된 이중지수분포)
오차에 대한 분포함수가

$$g(x)=\lambda h_2(x:0,1)+(1-\lambda)h_2(x:1,2)$$

라 하자. 여기서

$$h_2(x:\alpha,\beta)=\frac{1}{2\beta}\exp\left[\frac{-|x-\alpha|}{\beta}\right],\qquad -\infty<x<\infty$$

이다. 만약 $\lambda=0.9$라 하면 간단한 계산에 의하여 다음과 같은 식

$$\sigma^2=2(\lambda^2+(1-\lambda)^2)=1.64,\ \sigma=1.2806,$$
$$g(0)\approx 0.4685,\ \beta=\frac{1}{2}(\lambda+(1-\lambda)frac1\ e)\approx 0.4685,$$
$$\frac{\sqrt{\beta(1-\beta)}}{g(0)}\approx 0.82,\ \frac{1}{2g(0)}\approx 1.0672$$

을 구할 수 있다. 따라서, 비대칭 이중지수분포인 경우에는 예제2와 같이 RQ추정량을 이용한 검정통계량이 LS추정량이나 혹은 LAD추정량에 근거한 검정통계량보다 효율적이다.

4. 결론

본 논문은 비선형회귀모형에 대한 회귀모수 θ_o의 가설을 검정하기 위하여 RQ추정량을 이용한 우도비 검정통계량을 제안하였다. 제안된 검정통계량의 검정력을 구하기 위하여 중심이 0이 아닌 카이제곱분포가 제안된 통계량의 극한분포임을 확인하였다. 점근적 분포를 이용한 검정통계량의 효율성으로부터 오차의 확률밀도함수가 비대칭이고 꼬리가 두꺼운 경우에는 RQ추정량을 이용한 검정통계량이 LS추정량이나 LAD추정량을 이용한 검정통계량보다 더 효율적임을 알 수 있었다. 앞으로 점근적 성질뿐만 아니라 유한한 자료에 대한 검정통계량의 효율성을 유도하기 위해서 RQ추정량에 대한 알고리즘을 개발할 필요가 있다.

참고문헌

1. Bassett, G., and Koenker, R. (1978). Asymptotic properties of least absolute error regression, Journal of the American Statistical Association, 73, 618-621.
2. Choi, S. H. (1994). On the L_1-norm estimation for nonlinear regression model, Yonsei University.
3. Choi, S. H., and Kim, H. K. (1995), Test of hypothesis based on LAD estimators in nonlinear regression models, The Korean Communications in Statistics, 2, 288-295.
4. Choi, S. H., Kim, H. K., and Park, K. O. (2001). Nonlinear regression quantiles estimation, Journal of the Korean Statistical Society, 30, 551-561.
5. Choi, S. H., Kim, T. S., and Park, K. O. (2000). Asymptotic properties of regression quantiles in nonlinear models, Journal of the Korean Data & Information Science Society, 11, 235-245.
6. Gallant, A. R. (1987), Nonlinear regression model, John Wiley & Sons.
7. Jennrich, R. I., (1969), Asymptotic properties of nonlinear least squares estimators, The Annal of Mathematical Statistics, 40, 633-643.
8. Jureckova, J., and Prochazka, B. (1994), Regression quantiles and trimmed least squares estimators in nonlinear regression model, Nonparametric Statistics, 3, 201-222.
9. Koenker, R., and Bassett, G. (1978), Regression quantiles, Econometrica, 46, 33-50.
10. Koenker, R. and Bassett, G., (1982), Robust tests for heterocedasticity based on regression quantiles, Econometrica, 50, 43-61.
11. Lehmann, E. L. (1986), Testing statistical hypotheses, John Wiley & Sons.
12. Liu, Z. J. (1992), Nonparametric estimates of the nuisance parameter in the LAD tests, Communication in Statistics-A, 21, 861-881.

13. Wu, C. F. (1981), Asymptotic theory of nonlinear least squares estimation, The Annals of Statistics, 9, 501-513.

[2002년 12월 접수, 2003년 3월 채택]