

동작중 작용부하 분석을 위한 간접적 부하규명

조 문 선

국립한국재활복지대학 의료보장학과
(2003년 7월 28일 접수, 2003년 12월 19일 채택)

Indirect Load Identification for the Operational Load Analysis

M. S. Cho

Department of Prosthetics and Orthotics, Korea National College of Rehabilitation & Welfare

(Received July 28, 2003. Accepted December 19, 2003)

요약: 환자의 재활을 돕는 보조기 및 의지와 같은 의료기기의 기본 요건 중의 하나는 충분한 강도를 가지도록 설계해야 하는 것이다. 강도설계를 위해서는 먼저 기구에 작용하는 부하를 파악하여야 하는데, 인체에 직접 착용하거나, 인체의 운동을 돕도록 고안된 의료기기의 특성상 정하중 보다는 동하중 형태의 부하를 받는 경우가 많으며, 때때로 충격하중을 받는 경우도 있다. 이같은 형태의 부하를 직접적으로 파악하기 위해서는 구조물에 계측용 센서를 직접 설치하여야 하나, 이럴 경우 센서의 설치로 인한 구조 변경으로 인해 계의 고유 특성을 유지할 수 없는 경우가 흔히 발생한다. 따라서, 이와 같은 경우에는 작용 부하를 간접적으로 즉, 진동 등의 출력으로부터 역으로 구해내는 수 밖에는 없다. 본 논문에서는 이와 같은 동하중 형태의 부하 즉, 작동부하를 구하는 데 있어서 기존 방법인 전달률 방법의 문제점 및 한계점을 살펴보고, 다수개의 기준점을 사용하여 다입력 환경하에서도 적용이 가능한 주성분 분석을 이용한 새로운 방법을 제시하였으며, 실험을 통해 이의 타당성을 검증하였다.

Abstract: Medical devices for helping the rehabilitation of the patients such as orthoses and prostheses should be designed to be strong enough. For the strength design, operational load should be identified first. Furthermore, medical devices are susceptible to dynamic load or shock frequently due to its characteristics. These type of the load may be identified by installing the sensors directly. However, it can modify the natural properties of the structures. Therefore, operational load should be identified indirectly from the system characteristics and responses such as vibrations. In this paper, the basic formulation of the indirect load identification is reviewed and the problems of conventional approach are checked. Then, the new approach based upon the principal component analysis is proposed and the validity of the proposed method is demonstrated using experiments.

서 론

환자의 재활을 돕는 보조기 및 의지와 같은 의료기기의 기본 요건 중의 하나는 충분한 강도를 가지도록 설계할 하는 것이다. 이와 같이 인체에 직접 착용하거나, 인체의 운동을 돕도록 고안된 기기들은 그 특성상 정하중 보다는 동하중 형태의 부하를 받는 경우가 많으며, 때때로 충격하중을 받는 경우도 있다. 이같은 형태의 부하를 직접적으로 파악하기 위해서는 구조물에 계측용 센서를 직접 설치하여야 하나, 이럴 경우 센서

의 설치로 인한 구조 변경으로 인해 계의 고유 특성을 유지할 수 없는 경우가 흔히 발생한다. 따라서, 이와 같은 경우에는 작용 부하를 간접적으로 즉, 진동 등의 출력으로부터 역으로 구해내는 수 밖에는 없다[1-2]. 본 논문에서는 이와 같은 동하중 형태의 부하 즉, 작동부하를 구하는 데 있어서 기존 방법의 문제점 및 한계점을 살펴보고 이를 극복하기 위한 새로운 방법을 제시하고 간략한 실험을 통해 이를 검증하였다.

일반적으로 공학적 문제는 입력, 계, 출력의 3가지 기본 요소로 표현할 수 있다. 계는 고유 특성으로 선형인 경우 어떠한 입력에 대해서도 동일한 성질을 가지고 있으므로, 이 세 요소 중 어느 하나를 모르더라도 다른 둘로부터 구해내는 것이 가능하다. 특히 동적계의 특성파악은 컴퓨터의 발달로 복잡한 기계구조물 등에 대해서도 유한요소 모델이나 모드 모델을 이용

하여 오차를 최소화할 수 있게 되었다. 이러한 계의 특성과약으로부터 응답해석은 더욱 정확하게 되었으며, 컴퓨터의 발달과 함께 여러 기법들이 개발되었다[3]. 반대로 출력과 계의 특성으로부터 입력을 얻는 역문제는 크게 관심을 끌지 못했다. 이는 여러 개의 입력이 가해지거나, 입력이 동적으로 변화하고 계의 특성과 출력에 대한 정보도 제한되어 있는 많은 복잡한 문제의 경우, 역문제는 작은 오차나 잡음에 의해서 해가 크게 달라지는 극히 불안정한 특성을 보이기 때문이다[4].

주파수 영역에서의 간접적 입력 규명은 가진실험 혹은 수학적 모형을 통해 입력점과 출력점 사이의 주파수 응답함수(frequency response function, 이하 FRF)를 측정하거나 계산한 뒤, 이를 입출력점간의 행렬의 형태로 만들어, 이의 역행렬과 측정된 구조물의 응답을 이용하여 입력을 구해내게 된다.

일반적으로 간접적으로 추정된 입력의 정확도는 측정시의 잡음의 영향을 감소시키고, 출력 측정점의 개수를 증가시킴으로서 개선할 수 있다[5]. 출력 측정점의 개수는 때때로 측정장비의 제약으로 인해 제한을 받게 된다. 이 경우 출력 파워 스펙트럼 행렬은 고전 전달률 방법(conventional transmissibility function method)을 이용하여 기준점을 사용하여 순차적으로 측정함으로써 구성할 수 있다. 그러나, 고전 전달률 방법은 입력이 다차원이 될 경우 기준점의 위치에 따라 그 결과가 달라지는 문제점을 가지고 있으며[6-7], 이러한 문제점을 해결하기 위해 여러개의 기준점을 사용하여 출력을 서로 독립적인 요소로 분리한 뒤, 각각의 요소에 고전 전달률 방법을 적용하는 새로운 전달률 방법을 제시하고자 한다. 여러개의 기준점으로부터 측정된 출력은 주성분 분석(principal component analysis) 방법을 통해 서로 독립적인 주요 성분으로 분리하며, 이 과정을 통해 잡음의 영향을 감소시킬 수 있다. 이러한 주성분 분석 방법의 난점은 몇 개의 주성분을 취하느냐에 따라 그 결과가 크게 달라진다는 데에 있다[8]. 따라서, 본 논문에서는 측정잡음에 관련된 두 개의 가정 - 즉, 측정잡음은 상호 상관관계를 가지지 않으며(uncorrelated), 같은 크기의 자기 파워 스펙트럼 밀도를 가진다는 두 개의 가정 - 을 도입하여 주성분의 개수를 결정할 수 있는 객관적 기준을 제시하고, 실험을 통해 본 논문이 제시한 방법의 타당성을 검증하였다.

본 론

1. 간접적 부하규명의 기본이론

m 개의 입력과 n 개의 출력을 가지는 선형계의 출력 스펙트럼 행렬 S_{YY} 는 다음과 같이 표현된다[9].

$$S_{YY} = H^H S_{FF} H \quad (1)$$

여기서 H 는 입력과 출력사이의 $m \times n$ FRF 행렬이며, S_{FF} 는 $m \times m$ 입력 스펙트럼 행렬이며, 위첨자 H 는 허미션 행렬을 나타낸다. 식 (1)의 입력 스펙트럼 행렬 S_{FF} 는 출력 응

답의 개수가 입력 하중의 개수와 같거나 많을 때, FRF행렬의 가역행렬(pseudo-inverse matrix)을 취함으로써 출력 스펙트럼 행렬로부터 구할 수 있다. 즉, 입력하중의 최소 노름(norm)해는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{S} = (H^H)^+ S_{YY} (H)^+ \quad (2)$$

여기서 $^+$ 와 $^{\wedge}$ 는 각각 가역행렬과 추정치를 나타내는 위첨자이다. 위 식으로부터 입력하중을 정확하게 구하기 위해서는 FRF행렬과 출력 스펙트럼 행렬을 정확히 구해야 한다.

2. 제한된 측정채널을 이용한 출력 스펙트럼 행렬의 구성

출력 스펙트럼 행렬 S_{YY} 은 모든 출력점에서의 응답을 동시에 측정한다면 쉽게 얻을 수 있다. 그러나, 현실적으로는 동시에 측정할 수 있는 응답의 개수는 데이터 수집 및 처리 장치가 가지고 있는 채널의 수에 의해 제한된다. 이와 같은 경우에 출력 스펙트럼 행렬은 응답을 순차적으로 측정하고 처리함으로써 구성할 수 있다. 즉, 하나의 기준 채널을 하나의 기준점에 고정된 뒤, 나머지 채널들을 이동시켜 나머지 응답점을 측정함으로써 출력 스펙트럼 행렬을 구할 수 있다. 이와 같은 방법을 고전적 전달률 방법(conventional transmissibility approach)라 하며 본 논문에서는 이에 대해 살펴본 뒤, 이 방법이 가지고 있는 고유한 문제에 대해 논의하고자 한다. 또, 이러한 문제점을 해결하기 위해 주성분 분석 방법을 이용한 새로운 전달률 방법을 제시하고자 한다.

1) 고전적 전달률 방법

식 (2)에서 출력 스펙트럼 행렬을 동시에 측정을 통해서 구성할 수 없는 경우에는, 데이터 측정과 분석 시스템의 한 채널을 임의로 선정한 기준점 r 에 고정하고, 나머지 채널을 이동시켜 가면서 나머지 출력점의 응답을 순차적으로 측정해 나간다. 이렇게 측정하게 되면 기준점 r 과 나머지 출력 측정점간의 상호 스펙트럼과 각 출력점의 자기 파워 스펙트럼을 값을 얻게 되며, 이는 출력 스펙트럼 행렬 중 하나의 열 혹은 행을 측정하는 것에 해당된다. 고전적 전달률 방법에서는 식 (3)과 같이 측정 한 열 혹은 행의 값으로부터 나머지 행렬의 요소를 추정하여 전체 출력 스펙트럼 행렬을 구성하게 된다.

$$S_{ij} = \frac{S_{ir}}{S_{rr}} S_{jr}^* \quad (3)$$

식 (3)은 기준점의 선정이 출력 스펙트럼 행렬의 추정에 영향을 미치지 않는다는 가정에 성립하는 식으로, 이를 만족시키기 위해서는 서로 독립적인 부하의 개수 즉, 입력 스펙트럼 행렬 S_{FF} 의 단수(rank)가 하나이어야만 한다.

식 (1)로 되돌아가 양면의 행렬의 단수를 살펴보면, 출력 스펙트럼 행렬의 단수는 부하가 계의 공진 주파수로 가진되지 않는 한 입력 스펙트럼 행렬의 단수에 의해 결정됨을 알 수

있다. 만약 실제 입력점의 개수와는 관계없이 서로 독립적인 입력부하의 개수가 하나라면, 출력 스펙트럼 행렬의 단수는 1이 되며, 이는 출력 스펙트럼 행렬의 모든 행이나 열은 다른 행이나 열과 비례함을 의미한다. 따라서, 고전적인 전달률 방법의 결정적인 단점은 서로 독립적인 입력의 개수가 하나 이상일 경우, 기준점의 선택에 따라 구성된 출력 스펙트럼 행렬이 달라진다는 데에 있다.

2) 새로운 전달률 방법

(1) 주성분 분석 방법을 이용한 접근 방법

하나 이상의 독립적인 부하가 계에 가해질 때, 출력 스펙트럼 행렬 S_{YY} 의 열들은 서로 비례하지 않게 된다. 따라서, 고전 전달률 방법을 이용하여 출력 스펙트럼 행렬을 구하기 위해서는 아래와 같이 주성분 분석을 이용하여 출력 스펙트럼 행렬을 각각의 단수가 1인 출력 스펙트럼 행렬로 분리하여야 한다.

서로 독립적인 부하의 개수를 p 라고 하고, 출력 스펙트럼 행렬 S_{RR} 을 r 개의 기준점들을 이용하여 구성한다고 하면, 기준점들로부터 구성된 스펙트럼 행렬 S_{RR} 은 다음과 같이 특이치 분리할 수 있다.

$$S_{RR} = US_{\xi\xi}U^H \tag{4}$$

여기서 $S_{\xi\xi}$ 는 S_{RR} 의 특이치가 크기순으로 배열된 $p \times p$ 대각행렬이며, U 는 $r \times p$ 유니터리 행렬이다. 즉, S_{RR} 의 대각행렬은 1행부터 차례대로 $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ 의 값을 가지며, 각 특이치들은 식 (5)와 같은 관계를 가진다.

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \dots \tag{5}$$

특이치 혹은 주성분의 상대적인 중요도는 특이치 비 λ_i/λ_{i+1} , $i = 1$ to $(r-1)$ 를 비교함으로써 결정할 수 있다. 또, 이는 전체 특이치 합에 대한 i 번째 특이치까지의 합의 비 $\sum_{j=1}^i \lambda_j / \sum_{j=1}^r \lambda_j$, $i = 1$ to r 를 구함으로써 결정할 수도 있으나 주관적이라는 단점을 가지고 있다[8]. 이에 본 논문에서는 잡음 레벨을 이용한 객관적인 결정기준을 도입하여 주성분의 개수를 결정하는 방법을 사용하였다. 이 때 p 개의 주성분 벡터 ξ 는 r 개의 기준 응답 벡터 R 과 유니터리 행렬 U 는 다음과 같은 관계를 가진다.

$$R_{r \times q} = U_{r \times p} \xi_{p \times q} \text{ or } \xi = U^T R \tag{6}$$

여기서, q 는 양상률 평판을 위한 데이터 셀의 수이다. 주성분은 상호 독립적이며 이는 물리적으로는 다차원 전달률 측정 에 있어서 최적의 기준점으로부터 응답을 구한 것과 같은 의

미를 지닌다. 주성분으로부터 출력 스펙트럼 행렬은 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$S_{YY} = S_{Y_1Y_1}^{\xi_1} + S_{Y_2Y_2}^{\xi_2} + \dots + S_{Y_pY_p}^{\xi_p} \tag{7}$$

여기서 $S_{Y_1Y_1}^{\xi_1}$, $S_{Y_2Y_2}^{\xi_2}$, $S_{Y_pY_p}^{\xi_p}$ 는 주성분에 해당하는 스펙트럼 행렬이다. 각각의 분리된 행렬의 단수는 1이 되기 때문에 고전 전달률 방법의 적용이 가능하며, 분리된 행렬 중 k 번째 주성분에 해당하는 출력 스펙트럼 행렬의 요소는 식 (8)과 같이 구할 수 있다.

$$S_{Y_jY_j}^{\xi_j} = \frac{S_{i\xi_j} S_{j\xi_j}^*}{S_{\xi_j\xi_j}} \tag{8}$$

식 (7)에서의 주성분과 응답간의 상호 스펙트럼은 전체 응답과 기준 응답간의 상호 스펙트럼과 유니터리 행렬로부터 계산할 수 있다.

$$S_{Y_j\xi_j} = \frac{1}{q} Y^* \xi_j^T = \frac{1}{q} Y^* (R^T U) = S_{TR} U \tag{9}$$

(2) 주성분 개수의 결정

기준점들로 구성된 출력 스펙트럼 행렬의 주성분 개수는 이론적으로는 영(zero)이 아닌 특이치의 개수와 같다. 그러나, 현실적으로는 측정 및 계산시의 잡음으로 인해 특이치가 완전한 영이 되는 경우는 극히 드물게 나타난다. 따라서, 주성분의 개수는 잡음 레벨과 관련된 특정값보다 작은 특이치 값들을 무시함으로써 결정할 수 있다. 본 논문에서는 주성분의 개수를 결정하기 위해 출력 신호에서의 측정 잡음을 고려하였다.

잡음 스펙트럼 행렬 S_{NN} 에 의해 오염된 출력 스펙트럼 행렬 \tilde{S}_{YY} 은 식 (10)과 같이 표현된다.

$$\tilde{S}_{YY} = S_{YY} + S_{NN} \tag{10}$$

응답의 측정잡음은 상호 상관이 없으며(uncorrelated), 동일한 잡음 레벨을 가지고 있다고 가정한다. 즉, 잡음 스펙트럼 행렬은 다음과 같이 잡음레벨 σ_N^2 에 단위행렬을 곱한 형태로 표시할 수 있다.

$$S_{NN} = \sigma_N^2 \cdot I \tag{11}$$

식 (12-a)과 같이 출력 스펙트럼 행렬 \tilde{S}_{YY} 에 대해 주성분 분석을 한 뒤, 이로부터 최초 p 개의 특이치를 이용하여 출력 스펙트럼 행렬을 재구성하게 되면 식 (12 b)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{YY} &= US_{\xi\xi}(U)^H \\ &= [U^p | U^{(n-p)}] \begin{bmatrix} S_{\xi\xi}^p & 0 \\ 0 & S_{\xi\xi}^{(n-p)} \end{bmatrix} [U^p | U^{(n-p)}]^H \end{aligned} \quad (12-a)$$

$$\tilde{S}_{YY} = U^p S_{\xi\xi}^p (U^p)^H \quad (12-b)$$

여기서 U^p , $U^{(n-p)}$ 는 각각 유니터리 행렬 U 의 최초 p 개와 그 다음 $(n-p)$ 개의 특이벡터로 이루어진 행렬이며, $S_{\xi\xi}^p$ 는 최초 p 개의 특이치로 구성된 $p \times p$ 대각 행렬이다. 이 때 오차행렬 $E(p)$ 는 식 (13)과 같이 최초 p 개의 특이치들로 재구성한 출력 스펙트럼 행렬 \tilde{S}_{YY} 와 잡음이 없는 출력 스펙트럼 행렬 S_{YY} 을 유니터리 행렬 U 에 투사시킨 값으로 정의한다.

$$\begin{aligned} E(p) &= U^H(\tilde{S}_{YY} - S_{YY}) \\ &= \begin{bmatrix} (U^p)^H \tilde{S}_{YY} \\ 0 \end{bmatrix} - U^H S_{YY} = \begin{bmatrix} (U^p)^H S_{NN} \\ -(U^p)^H S_{YY} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)에서 영행렬은 특이치 버림을 통한 결과로 나타나며, 유니터리 특이벡터의 직교성으로 인해 $(U^p)^H \tilde{S}_{YY}$ 는 $(U^p)^H \tilde{S}_{YY}$ 와 같게 된다. 오차 행렬 $E(p)$ 의 Frobenius norm값을 구하게 되면 다음과 같은 식으로 전개된다.

$$\begin{aligned} \|E(p)\|_F &= \left(\sum_{i=1}^p U_i^H S_{NN} \cdot S_{NN}^H U_i + \sum_{i=p+1}^n U_i^H S_{YY} \cdot S_{YY}^H U_i \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^p U_i^H S_{NN} \cdot S_{NN}^H U_i - \sum_{i=1}^p U_i^H S_{YY} \cdot S_{YY}^H U_i \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^p U_i^H S_{YY} \cdot S_{YY}^H U_i \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 U_i 는 행렬 U 의 i 번째 열이다. 식 (14)의 괄호안의 마지막 항은 p 에 독립적이기 때문에 Frobenius norm값이 최소가 되기 위한 필요조건은 식 (14)의 괄호안의 두 번째 항의 값이 첫 번째 항보다 작도록 p 값을 선정하는 데 있다. 이 조건은 필요충분조건은 아니지만, 출력 스펙트럼 행렬의 단수를 결정하는 데 있어서, 최소한의 가이드는 될 수 있다. 식 (11)을 해당 조건에 대입하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sigma_N^4 U_i^H U_i < U_i^H S_{YY} S_{YY}^H U_i \quad (i=1, \dots, p) \quad (15)$$

측정한 출력 스펙트럼 행렬의 i 번째 특이치는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\lambda_i = U_i^H \tilde{S}_{YY} U_i \quad (16-a)$$

위 식으로부터 특이치의 제곱을 구하면 다음과 같이 쓸 수

있다.

$$\begin{aligned} \lambda_i^2 &= U_i^H \tilde{S}_{YY} \tilde{S}_{YY}^H U_i \\ &= U_i^H (S_{YY} S_{YY}^H + (S_{YY} + S_{YY}^H) \cdot \sigma_N^2 + \sigma_N^4 \cdot I) U_i \\ &= U_i^H (S_{YY} S_{YY}^H + (\tilde{S}_{YY} \tilde{S}_{YY}^H) \cdot \sigma_N^2 - \sigma_N^4 \cdot I) U_i \\ &= U_i^H S_{YY} S_{YY}^H U_i + 2\lambda_i \cdot \sigma_N^2 - \sigma_N^4 \cdot U_i^H U_i \end{aligned} \quad (16-b)$$

식 (15)을 식 (16-b)에 대입하면, 조건은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\lambda_i^2 > 2\lambda_i \sigma_N^2 \quad (17-a)$$

or

$$\lambda_i > 2\sigma_N^2 \quad (17-b)$$

즉, 주성분의 개수 p 는 잡음 파워 레벨의 2배 이하의 특이치를 버림으로서 구할 수 있다. 이상의 기준치를 적용하기 위해서는 잡음 파워 레벨 값을 사전에 미리 알고 있어야 하는 어려움이 있다. 본 논문에서는 동일한 가정을 도입하여 잡음 파워 레벨을 추정할 수 있는 방법을 제시하였다.

(3) 출력 측정 잡음의 예측

앞에서 논한 특이치의 기준값을 적용하기 위해서는 출력 측정잡음 레벨을 먼저 파악하고 있어야 한다. 따라서, 이 절에서는 측정된 주파수 응답함수 행렬과 출력 파워 스펙트럼 행렬로부터 잡음 레벨을 예측하는 방법에 대해 다루고자 한다. 출력의 측정잡음은 앞절과 마찬가지로 상관관계가 없는 서로 독립적인 신호이고, 같은 크기의 자기 파워 스펙트럼 밀도를 가진다고 가정하면, 출력 파워 스펙트럼 행렬은 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\tilde{S}_{YY} = H^H S_{FF} H + S_{NN} = H^H S_{FF} H + \sigma_N^2 \cdot I \quad (18)$$

위 식을 다시 써 보면 측정잡음은 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} S_{NN} &= \tilde{S}_{YY} - S_{YY} = \tilde{S}_{YY} - H^H S_{FF} H \\ &= \tilde{S}_{YY} - H^H \hat{S}_{FF} H + H^H (\hat{S}_{FF} - S_{FF}) H \end{aligned} \quad (19)$$

여기서 \hat{S}_{FF} 는 잡음포함 출력 파워 스펙트럼 행렬과 FRF 행렬로부터 규명된 입력 파워 스펙트럼 행렬로서 다음과 같이 구해진다.

$$\hat{S}_{FF} = (H^H)^+ \tilde{S}_{YY} (H)^+ \quad (20)$$

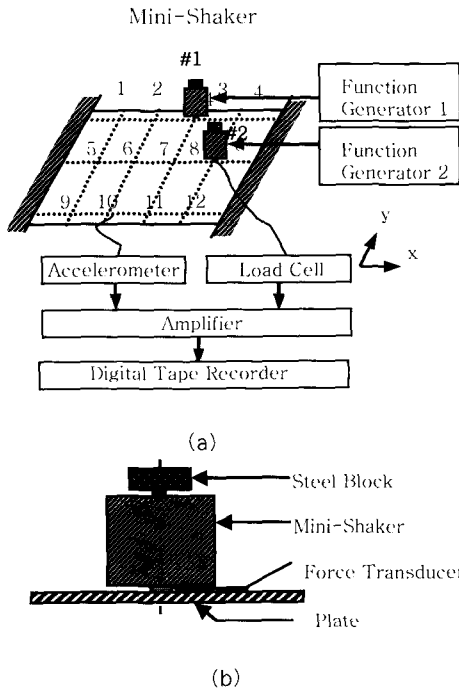


그림 1. 입력구명을 위한 실험장치
 (a) 실험장치의 구성 (b) 가진기의 연결부위 상세그림
 Fig. 1. Experimental setup for force identification
 (a) configuration of experiment
 (b) details of connecting point of mini-shaker

식 (18)을 식 (20)에 대입하면, \hat{S}_{FF} 는 다음과 같은 식으로 쓸 수 있다.

$$S_{FF} = (H^H)^+ \cdot (H^H S_{FF} H + \sigma_N^2 \cdot I) \cdot (H)^+ \tag{21}$$

$$= S_{FF} + \sigma_N^2 (H^H)^+ (H)^+ \tag{21}$$

식 (21)을 식 (19)에 대입한 후, 식 (22)와 같은 FRF 행렬의 특이치 분리를 이용하면, 식 (23)이 구해진다.

$$H_{m \times n} = V_{m \times m} S_{\tau \tau} W_{n \times n}^H \tag{22}$$

$$(I^n - (W^m)(W^m)^H) \cdot \sigma_N^2 \cdot I = \tilde{S}_{YY} - H^H \hat{S}_{FF} H \tag{23}$$

여기서 W^m 은 행렬 W 의 최초 m 개의 열로 구성된 유니타리 행렬로, 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$W^m (W^m)^H + W^{n-m} (W^{n-m})^H = I^n \tag{24}$$

여기서, I^n 은 $n \times n$ 단위 행렬로, 식 (23)에 식 (24)의 관계식을 대입하면 식 (23)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$W^m (W^m)^H \cdot \sigma_N^2 \cdot I = \tilde{S}_{YY} - H^H \hat{S}_{FF} H \tag{25}$$

윗 식의 양변에 Frobenius norm 값을 취하면, 추정 잡음 레벨은 다음과 같이 추정할 수 있다.

$$\sigma_N^2(f) = \frac{1}{\sqrt{n-m}} \|\tilde{S}_{yy} - H^H \hat{S}_{ff} H\|_F \tag{26}$$

윗 식으로부터, 추정 잡음 레벨은 측정된 출력 파워 스펙트럼 행렬과 추정된 입력 파워 스펙트럼 행렬을 이용하여 예측할 수 있음을 알 수 있다.

실 험

본 장에서는 앞에서 제시한 주성분 분석방법의 적용성을 검증하기 위하여 평판 구조물을 대상으로 입력구명 실험을 수행하였다. 본 실험에서는 그림 1에 보인 바와 같이 두 대의 가진기를 이용하여 가진기 상부에 강제블록(steel block)을 체결하여 가진력을 발생시킨 뒤, 이 가진력이 평판으로 전달되도록 가진기의 밑면과 평판을 체결하였다. 이 때 가진기의 밑면과 평판 사이에 하중계를 장착하여 실제 전달되는 힘을 측정하였으며, 평판에서 측정된 출력응답과 연결점과 출력응답 측정점 사이의 FRF 행렬을 통해 구명한 입력과 비교하였다.

1. 실험장치

대상 구조물은 그림 1.(a)에 도시한 것과 같이 양단이 고정된 강제 사각형 판이고 그 크기는 가로, 세로, 두께가 각각 520, 400, 3 mm이다. 운전중인 기계 구조물로부터 전달되는 전달력을 모사하기 위하여 3과 8점에 가진기(B&K, type 4810)를 장착하였으며, 가진기 상부에 강제 블록을 체결하여 관성력이 발생하도록 하였으며, 발생한 힘이 평판으로 전달되도록 가진기의 밑면과 평판을 체결하였다. 구명된 힘과의 비교 분석을 위하여 가진기와 평판 사이에 하중계(B&K, type 8200)를 장착하여 전달력을 측정하였다. 그림 1.(b)에 가진기의 연결부위를 자세히 나타내었다.

8채널 디지털 테이프 레코더를 사용하여 신호를 측정하였으며, 4개의 기준점을 사용하여 순차적인 측정을 통하여 신호를 측정하였다. 두 대의 신호발생기(B&K function generator type 2017)를 이용하여 가진신호를 발생시켜 파워 증폭기를 통해 이를 가진기에 인가하였다. 측정된 가속도 신호를 증폭기를 사용하여 증폭한 뒤 디지털 테이프 레코더를 이용하여 이를 저장한 뒤, 이로부터 기준점과 각 출력 측정점간의 상호스펙트럼을 계산하여 이로부터 출력 파워 스펙트럼 행렬을 구성하였다. 구성된 출력 파워 스펙트럼 행렬과 측정된 FRF행렬을 이용하여 입력 파워 스펙트럼 행렬을 추정하여 이를 하중계로 측정된 값과 비교 검토하였다.

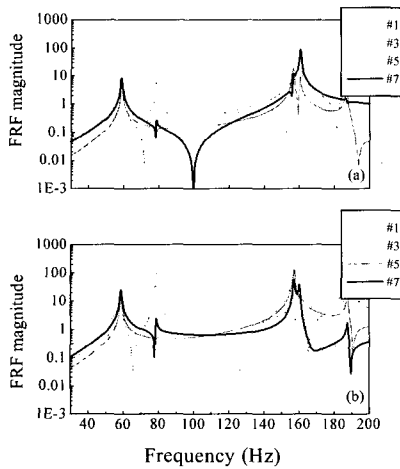


그림 2. 응답점과 (a)가진점 3 (b)가진점 8 사이의 주파수 응답함수
 Fig. 2. FRF's between response point and (a) excitation point 3 (b) excitation point 8

2. 실험결과 및 고찰

두 대의 함수 발생기의 신호를 각각 가진기에 인가하였다. 입력신호로는 중심 주파수 110 Hz, 대역폭 31.6 Hz를 가지는 협대역 랜덤 신호를 사용하였으며, 측정된 응답을 이용하여 관심 주파수에서 12×12 출력 파워 스펙트럼 행렬을 구성한 뒤 이로부터 입력을 규명하였다. 규명한 입력을 하중계로 측정된 입력과 비교하여 정확도를 검증하였다. 먼저 계의 FRF를 구하기 위해 가진기와 가속도계를 이용하여 FRF를 측정하였다. 노드점 가진 혹은 측정의 가능성을 피하기 위해 3점과 8점 두 군데에서 가진하였으며, 1, 3, 5, 7 점에서 측정하였다. 그림 2에서 두 그림을 관찰해 보면, 110 Hz 근처 영역은 상대적으로 고유진동수의 영향이 적은 영역임을 알 수 있다.

특이치 분리를 이용한 입력규명을 위하여 먼저 앞에서 제시한 측정잡음 레벨을 예측하는 알고리즘을 사용하여 기준점들의 파워 스펙트럼 행렬과 FRF행렬로부터 관심 주파수 대역에서의 측정잡음 레벨을 추정한 뒤, 이로부터 주성분 수를 결정하기 위한 기준값을 계산하였다. 그림 3.(a)에 기준점들의 파워 스펙트럼 행렬의 특이치와 추정된 측정잡음 레벨로부터 계산한 기준값을 표시하였다. 그림 3.(a)를 살펴보면 관심 주파수 대역에서 취해야 할 특이치의 개수는 둘이며, 이는 입력의 수와 일치한다. 그림 3.(b)와 (c)에 두 가진점에서의 입력규명 결과와 하중계를 사용하여 직접 측정된 입력 파워 스펙트럼을 나타내었다. 이를 살펴보면 전달률 방법의 경우 상당한 크기의 오차를 가지고 있는 것을 볼 수 있다. 또, 전달률 방법의 경우 두 점의 하중 가운데 점 3의 입력규명 결과가 점 8의 입력규명보다 좋은 결과를 보이는데 이는 앞 절에서 설명한 바와 같이 전달률 방법을 다입력 환경하에서 적용하게 되면 주로 기준점에 영향을 주는 입력에 의한 출력 성분이 반영되기 때문인 것

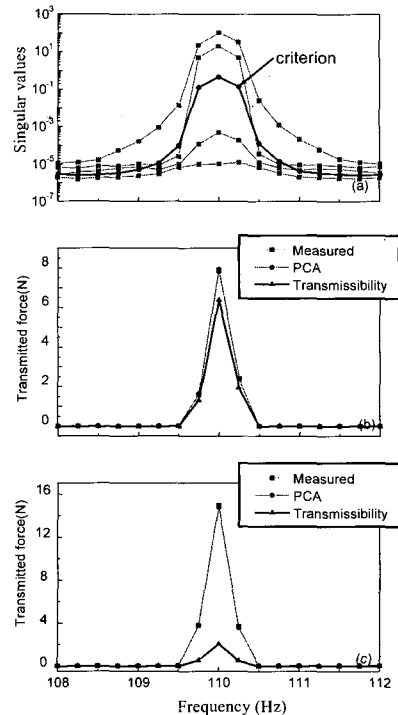


그림 3. 입력규명 결과
 (a) 특이치와 기준값
 (b) 점 3에서 규명된 작동부하
 (c) 점 8에서 규명된 작동부하
 Fig. 3. Result of force identification
 (a) singular values and its criterion
 (b) forces identified at point 3
 (c) forces identified at point 8

으로 볼 수 있다. 이에 반해 주성분 분석방법을 이용한 접근법에서는 두 입력점 모두에서 좋은 결과를 보임을 알 수 있다.

결론

본 논문에서는 입력규명 오차를 감소하기 위한 주성분 분석 방법을 제시하였으며, 수치실험을 통하여 그 타당성을 검증하였다. 본 논문의 결론을 요약하면 다음과 같다.

다수개의 기준점을 사용하여 다입력 환경하에서도 관심 있는 모든 출력점의 신호를 측정할 수 있는 주성분 분석방법을 제안하였다. 출력신호에 측정잡음이 존재하는 경우 측정된 FRF행렬과 출력신호로부터 측정잡음의 레벨을 추정하기 위한 수식을 전개하였으며, 이를 이용하여 주성분의 개수를 결정하는 방법론을 제시하였다. 제시된 주성분 방법의 타당성을 검증하기 위해 실험을 수행하였으며, 제안된 방법이 입력규명 오차의 감소에 효과적임을 보였다.

참고 문헌

1. F.D. Bartlett and W.G. Flannelly, "Model Verification

- of Force Determination for Measuring Vibration Loads,"* Journal of American Helicopter Society, Vol. 24, pp.10-18, 1979
2. N. Okubo, S. Tanabe and T. Tatsuno, "*Identification of Forces Generated by a Machine Under Operating Condition,*" Proceeding of the International Modal Analysis Conference, pp.685-690, 1985
 3. Ewins D.J., *Modal Testing : Theory and Practice,* Research Studies Press, 1986
 4. Tikhonov A.N. and Arsenin V.Y., *Solution of Ill Posed Problem,* Halsted, 1977
 5. Kammer D.C., "*Sensor Placement for On Orbit Modal Identification and Correlation of Large Space Structure.,*" Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 14, No. 2, pp. 251-259, 1991
 6. Dossing O. "*Structural Stroboscopy - Measurement of Operational Deflection Shapes,*" Sound and Vibration, pp. 18-26, 1988
 7. 김성진, 강경식, 심재술, "소형 왕복동식 압축기 쉘에 가해지는 가진력의 간접적 추정," 한국소음진동공학회지, 제 7권 제 6호, pp. 899-908, 1997
 8. K.V. Mardia, J.T. Kent and J.M. Bibby, *Multivariate Analysis,* London, NewYork, Academic Press, pp. 213-246, 1979
 9. Bendat J.S. and Piersol A.G., *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis,* John Wiley & Sons, 1980