PUBLICATIONS OF THE KOREAN ASTRONOMICAL SOCIETY
18: 21~ 24, 2003

점성원반의 붕괴
THE COLLAPSE OF VISCOUS DISK

유계화[1], 윤태석[2], 강용희[3]
[1]이화여자대학교 과학교육과
[2]경북대학교 천문대기과학과
[3]경북대학교 지구과학교육과

KYE HWA YOO[1], TAE SEOG YOON[2], YONG HEE KANG[3]
[1]Department of Science Education, Ewha Womans University
[2]Department of Astronomy and Atmospheric Sciences, Kyungpook National University
[3]Department of Earth Science Education, Kyungpook National University
(Received December. 5, 2003; Accepted December. 15, 2003)

ABSTRACT

The problem of the collapse of a self gravitating disk is here considered. We show self-similar solutions for the above problem under a modified viscous parameter. Surface density depends on r^m in the inner region, where m is -1.6. Therefore growing central mass goes on without mass inflow to the system.

Keywords: viscous disk - gas dynamics - quasars

1. 서론

기체구의 중력 붕괴로 형성된 별은 이론적으로 잘 알려져 있다(Bondi 1952, Larson 1973, Layzer 1964). 일반적으로 이 기체구의 붕괴는 중심별 주위로 원반을 형성한다(Cameron 1977, Dermot 1977). 별 주위의 기하학적으로 얇은 케플러 강착원반의 점성은 shear을 일으키고, 열을 생성한다(Shakura and Sunyaev 1973, Lynden-Bell and Pringle 1974). Black hole로 강착한 기하학적으로 얇은 강착원반은 내 경계에서 불안하며(Novikov and Thorne 1973), 기하학적으로 얇거나 두꺼운 강착원반의 안쪽 경계근처의 기체유동은 Subsonic에서 Supersonic 하다는 게 알려져 있다(Kozlowski, Jaroszynski and Abramowicz 1978, Muchotrzeb and Paczynski 1982).

자기 중력 polytrope 강착 원반을 Paczynski(1978) 등이 연구하였다. 자기 중력 원반이 형성이후 시간이 지남에 따라 Fukue and Sakamoto(1992) 그리고 Lin and Pringle(1987)은 자기 중력원반이 불안하면 열과 동점성이 발생하므로 Lynden-Bell and Pringle(1974)은 원반내의 물질의 각운동량 보존에 따라 물질이 이동한다고 하였다. 따라서 강착원반의 평형이 깨져 강착원반을 가진 모체의 천체에 에너지를 제공하거나(Shlosman, Frank and Begelman 1989), 별을 형성한다(Myhill and Kaula 1972).

Barkana and Loeb(2003)은 퀘이사 중심에 위치한 큰 천체(Black hole) 주변의 물질(기체및 티끌)이 강착될 때 shock에 의한 double horn 윤곽의 플럭스 곡선을 관측하였다. 이것이 지금까지 추정된 퀘이사의 에너지원이다. 퀘이사에서 방출된 물질의 양은 Peeves et al.(2003)에 의하면 입방체각 ω, 속도 v의 물질 방출률 M

$$M = \omega n r^2 v m_p \quad (1)$$

이다. n은 체적 밀도, r은 방축된 물질까지의 거리, m_p는 양성자의 질량이다. 질량보존법칙에 따라 중력 붕괴 물질의 강착량이 퀘이사의 방출에너지를 적색편이가 큰 퀘이사의 중심에 위치한 Black hole로 강착한 물질에 의한 광도는 $L \geq 2.5 \times 10^{46}$ erg/sec로 알려져 있다. 식 (1)과 같은 에너지는 퀘이사 전체에너지의 ~1배의 에너지띠에 해당한다.

강착원반을 가진 Black hole 의 복사밀도 F는 Collin et al.(2002)에 따르면

$$F \propto M^{-\frac{2}{3}}$$

이다. 물질의 중력 붕괴에 의한 에너지가 퀘이사의 에너지원이라면, 원반의 붕괴에 대하여 연구가 필요하다.

우선 퀘이사의 중심의 Black hole 주위의 원반을 생각하여, 제 2절에서 원반의 기본 방정식을 제시하고, 제 3절에서 원반모형의 상사 변환 해를 내 원반, 외 원반의 경우에 따라 제시한다.

2. 자기중력원반

2.1 기본 방정식

점성 원반은 Euler 방정식을 사용한다. 원반의 평면으로 r 축, 이 평면에 수직한 축을 z 축으로 하며, 원반의 알갱이의 좌표는 원통좌표계 (r, ϕ, z) 로 취한다. 기하학적으로 얇은 원반으로 가정한다. 원반의 질량보존 방정식과 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Sigma v_r) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{GM}{r^2} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} - \frac{2v_r}{r^2}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_r v_\phi}{r} = \nu\left(\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r^2}\right) \tag{3}$$

여기서 ν 는 동점성계수, M 은 반경 r 내의 원반 질량이다. Σ 는

$$\Sigma = 2\int_0^H \rho dz = 2\rho H \tag{4}$$

로 정의된 표면밀도이다. H는 강착원반 두께의 1/2이며

$$H = \frac{c_s^2}{2\pi G\Sigma} \tag{5}$$

이다. $c_s (= dp/d\rho)$ 는 음속이다. 기체의 압력과 밀도의 관계에 polytrope 식

$$p \propto \rho^\gamma \tag{6}$$

을 가정한다. γ 는 비열비이다.

질량보존법칙 식 (1)은

$$M = M(r,t) = \int_0^r \Sigma 2\pi r dr \tag{7}$$

을 이용하면

$$\frac{\partial M}{\partial t} + v_r \frac{\partial M}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial r} = 2\pi r\Sigma \tag{8}$$

가 된다.

2.2 상사변환

기체구의 붕괴는 상사해를 갖는다(Shu 1977). 이제 원반의 특성을 나타낸 물리적 양의 상사변환을 생각한다. 변환변수 $(r,t) \rightarrow (x,\tau)$는 Shu(1977)를 따르기로 한다. 즉

$$x \equiv \frac{r}{c_s t}, \quad \tau = t. \tag{9}$$

따라서 표면밀도 Σ, 강착원반의 두께 H, r, ϕ의 속도성분, v_r, v_ϕ 은 (r,t)의 함수이며 다음과 같다.

$$\Sigma = \frac{c_s}{2\pi G t}\sigma, \quad H = \frac{c_s}{\sigma}, \quad v_r = c_s u, \quad v_\phi = c_s v \tag{10}$$

여기서 σ, u, v 는 x 의 함수이다. M, σ는 Shu(1977)와 같이 놓기로 한다.

식 (10)을 식 (8)에 대입하면,

$$\frac{dm}{dx} = x\sigma \quad m + (u-x)\frac{dm}{dx} = 0 \tag{11}$$

이며, $m = x\sigma(x-u)$이다. 이들 표현을 이용하면 식 (1), (2), (3)은 다음과 같다.

$$(u-x)\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dx} + \frac{du}{dx} + \frac{u-x}{x} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{2}{\sigma}\frac{d\sigma}{dx} + (u-x)\frac{du}{dx} - \sigma\frac{u-x}{x} - \frac{v^2}{x} - \alpha' x\left(\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{2u}{x^2}\right) = 0 \tag{13}$$

$$(u-v)\frac{dv}{dx} + \frac{uv}{x} - \alpha' x\left(\frac{dv}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x^2}\right) = 0 \tag{14}$$

여기서 α'는 $\alpha(\frac{H}{r})$로 정의된 파라메타이다(Mineshighe and Umemura 1997).

식 (13)의 두 번째 항은 비정적 및 advection 에 기인하고 세 번째 항은 중력에 기인한다.

3. 상사해

3.1. 특이해

식 (12), 식 (13) 및 식 (14)는 비선형 미분방정식이므로 특수한 경우를 생각하여 해의 성질을 살펴본다.

$x \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$ 인 특이영역에서 식 (12)에 의하면 물질의 속도 $u = 0$ 이므로, 식 (12), 식 (13) 및 식 (14)는 간단한 상미분 방정식이 된다. 따라서

$$u \simeq 0 \quad v \approx \sigma_0{}^{1/2}, \quad \sigma \approx \sigma_0/x, \quad m \approx \sigma_0 x \tag{15}$$

가 된다. $u=0$ 는 중심영역에서 무한히 작고 밀도가 큰 천체가 없다고 생각한 경우이다. azimuthal 속도성분은 x 에 무관하고 상수값을 가지며, 각운동량 $\propto \sigma_o^{1/2}$ 이다. 즉 각운동량은 중심 영역에서 거리에 무관하게 상수같이 행동한다. 식 (15)는 Mineshighe and Umemura (1997)의 $x \gg \alpha'$인 경우와 일치하며 다만 $u \simeq -2\alpha'$ 와 차이가 있을 뿐이다.

3.2. 경계해

식 (12), 식 (13)및 식 (14)의 근사 해를 구하기 위하여 임계점 없이 $r \rightarrow 0$ 와 $r \rightarrow \infty$ 의 2개의 경계 해를 생각한다.

우선 $x \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$인 영역에서 물질은 근사적 해를 가지므로

$$u \simeq -\alpha' \sigma_0, \quad v \approx \sigma_0, \quad \sigma \approx \sigma_0/x, \quad m \approx \sigma_0(x+\alpha') \tag{16}$$

가 된다. 이 식은 series로 구하였다. 이제 상사변환 변수를 원반의 물리적 파라메타로 바꾸면, $r \rightarrow \infty$에서

$$v_r \simeq -c_s\alpha', \quad v_\phi \approx 2\pi G t_0 \Sigma_0 \tag{17}$$

$$\Sigma \approx \Sigma_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1}, \quad M \simeq 4\pi r_0 c_s \alpha' \Sigma_0$$

가 된다.

시간에 무관한 경우 slow accretion limit 로 근사한 u 값은 steady 해의 값과 2배차가 있다. 이것은 원반 안쪽으로 이동하는 mass 량이 시간에 무관하며 일정하다는 의미를 갖는다. 식 (16)의 마지막 항의 질량유입률

$\dot{m} \equiv -x\sigma u$ 라고 정의하면, $\dot{m} = \alpha' \sigma_0$ 이다.

이제 $x \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$ 인 영역에서 물질의 행동을 식 (12), 식 (13)및 식 (14)로부터 알아본다.

$x \rightarrow \infty$ 와는 다르게 v, u 의 근사해가 다소 복잡하나, 약간의 계산과정을 거쳐 다음과 같은 해를 구하였다.

$$\begin{aligned} v &\approx \frac{3\sigma_0}{4\alpha'} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{9\sigma_0}{8\alpha'^2} x^{\frac{2}{3}} \\ u &\approx -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2\alpha'} x^2 \\ \sigma &\approx \frac{27\sigma_0}{16\alpha'} x^{-\frac{5}{3}} + \frac{54\sigma_0}{4\alpha'^2} x^{-\frac{2}{3}} \\ m &\approx \frac{81\sigma_0}{32\alpha'} x^{\frac{1}{3}} + \ldots\ldots \end{aligned} \tag{18}$$

식 (17)의 σ의 적분상수는 σ_0이다. 식 (14), 식 (15)및 식 (16)의 적분은 비선형이므로 중심근방의 σ가 상당히 큰 값을 갖는다고 가정하고 구하였고, r 성분의 점성항을 첨가하여 기본방정식을 충실히 다루어 해를 구하여 본 결과 $x \rightarrow 0$ 에서의 점성원반은 동경방향 속도는 azimuthal 방향의 속도보다 점성을 작게 받고 질량은 계속 강착됨을 보이고 있다. 중심 방향으로 유입된 질량은

$\dot{m} = \frac{27\sigma_0}{32\alpha'} x^{\frac{1}{3}}$ 와 같다.

3.3. 임계조건

u 에 대한 임계조건은 식 (13), 식 (14)에서 구할 수 있다(Yoo 2002). 식 (12), 식 (13), 식 (14)의 해로부터 u의 해를 멱급수해라 가정하고 3차 항 이상을 무시하면

$$u = -a_0 + \frac{a_0}{12} x^2 + \ldots\ldots \tag{19}$$

이다. a_0는 상수이다. u의 2차 도함수

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{du}{dx} \tag{20}$$

이다. 식 (20)을 식 (13)에 대입하고 정리하여 해곡선이 연속되는 조건을 찾으면 $u = x + \alpha'$이다. $u < 0$ 이므로 $x < 0$이므로 $x < -\alpha'$ 이어야한다. 이것은 t가 음수가 되어야하고 이 후의 강착은 해가 된다.

4. 요약

자기중력점성원반에 대한 동경 방향및 azimuthal 방향에 점성항을 고려한 방정식은 비선형이다. 따라서 우선 특이해를 구하였다. 무한히 작고 밀도가 큰 천체가 없는 경우인 $u=0$ 즉 $x \rightarrow 0$ 인 영역에서 $\Sigma \propto 1/r$ 로 변한다. $M \propto \alpha'$ 이며 점성의 효과가 잔존한다. 자기중력점성원반에 대한 상사해를 도입하였다. 이보다 더 정성적 해를 구해본 결과 $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$ 에서의 원반구조는 서로 달랐다. 표면밀도 σ는 $x \rightarrow 0$에서 $\frac{\sigma_0}{x}$에서 $\frac{\sigma_0}{\alpha'} x^{-\frac{5}{3}}$으로 변하였다. 그리고 질량유입률은 $r^{1/3}$에 비례한다. 이것은 질량유입은 시간에 따라 급격히 줄어든다. 그러나 표면밀도는 $x \rightarrow 0$ 에 접근함에 따라 $t^{2/3}$에 비례하며 증가한다. 또한 동경방향의 속도는 azimuthal 속도보다 $x \rightarrow 0$ 에 따라 급하게 감소한다.

경계해속도의 양쪽을 같이 놓을 때 결정되는 점을 천이점 r 이라 정의하면, $r \propto t$ 이다. 즉 r 은 시간이 지남에 따라 증가한다. 이것은 외곽 물질이 점차 중심으로 이동한 것을 의미한다. 임계조건에 의하면 압력효과가 무시되고 중심으로 물질의 이동은 r에서 이루어지고

$r \sim a/a'H$ 에 따르면 물질 이동의 동기는 a'이 돼, 외곽으로 갈수록 a'는 작아져야한다.

원반의 점성은 원반을 heating 하므로 원반의 안정은 cooling으로 보상되어야한다. 원반 외각은 등온으로 가정되므로 여기에서의 온도구조는 flat하다. 그러나 원반 내부 영역은 질량이동과 점성으로 불안해질 것으로 기대된다(Mineshighe and Umemura 1997).

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구 (과제번호: R01-2001-000-00026-0 (2001) 및 R01-2001-000-00026-0 (2002)) 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

Barkana, R. and Loeb, A. 2003, Nature, 421, 341.
Bondi, H. 1952, M.N.R. A.S., 112, 195.
Cameron, A. G. W. 1977, The Origin of the Solar System, ed. S. F., Dermot, Wiley, Chichester.
Collin, S., Boisson, C., Mouchet, M., Dumont, A.-M., Coupe', S., Porquet, D. and Rokaki, E. 2002, Astr. Ap., 338, 771.
Dermot, S. F. 1977, The Origin of the Solar System, Wiley, Chichester.
Fukue, J. and Sakamoto, C. 1992, PASJ, 44, 553.
Kozlowski, M., Jaroszynski, M. and Abramowicz, M. A. 1978, Astr. Ap., 63, 209.
Larson, R. B. 1973, Ann. Rev. Astr. Ap., 11, 219.
Layzer, D. 1964, Ann. Rev. Astr. Ap., 2, 341.
Lin, D. N. C. and Pringle, J. E. 1987, M.N.R.A.S., 225, 607.
Lin, G. N. C. 1981, Ap.J., 246, 972.
Lynden-Bell, D. and Pringle, J. E. 1974, M.N.R.A.S., 168, 603.
Mineshighe, S. and Umemura, M. 1997, Ap. J., 480, 167.
Muchotrzeb, B. and Paczynski, B. 1982, Acta Astron., 32. 1.
Myhill, E. A. and Kaula, W. M. 1992, Ap.J., 386, 578.
Novikov, I. D. and Thorne, K. S. 1973, In Black Hole-Les Astress Occlus, ed. C. De Witt and B. S. De Witt (New York, Gordon and Breach), 343.
Paczynski, B. 1978, Acta Astron., 28, 91.
Peeves, J. N., O' Brien, P. T. and Ward, M. J. 2003, Ap.J., 593, L65.
Shakura, N. I. and Sunyaev, R. A. 1973, Astr. Ap., 24, 337.
Shlosman, I., Frank, J. and Belelman, M. C. 1989, Nature, 338, 45.
Shu, F. H. 1977, Ap.J., 214, 488.
Shu, F. H. 1977, Ap.J., 273, 202.
Yoo, K. H. 2002, J.K.A.S, 17, 11.