PUBLICATIONS OF THE KOREAN ASTRONOMICAL SOCIETY
18: 15 ~ 20, 2003

시간에 따라 변하는 블랙홀 자기권의 "GRAD-SHAFRANOV 방정식"
THE NONSTATIONARY "GRAD-SHAFRANOV EQUATIONS" IN THE BLACK HOLE MAGNETOSPHERES

박석재[1], 이태형[2]
[1]한국천문연구원
[2]경희대학교

SEOK JAE PARK[1], TAE HYEONG LEE[2]
[1]Korea Astronomy Observatory
[2]Kyunghee University
E-mail : sjpark@kao.re.kr, starcafe@space.kyunghee.ac.kr
(Received: December 1, 2003; Accepted: December 12, 2003)

ABSTRACT

In the earlier papers we analyzed the axisymmetric, nonstationary electrodynamics of the central black hole and a surrounding thin accretion disk in an active galactic nucleus. Based on those papers we analyze the axisymmetric, nonstationary black hole magnetosphere in this paper. We concentrate on deriving the "Grad-Shafranov equations" both in the force-free and non-force-free cases. In the time-independent limit our equations naturally coincide with stationary equations as they should.

Keywords : black hole physics — MHD — galaxies : jets

1. 서론

펄사 자기권을 기술하는 편미분방정식, 즉 '펄사 방정식'은 Goldreich & Julian (1969)이 발표될 때까지 알려지지 않았었지만 그 후 Michel(1973), Scharlemann & Wagoner(1973), Julian(1973)에 의하여 독립적으로 발견되었다. 또한 이것에 바탕을 두어 '제트 방정식'이 Okamoto(1975)에 의해 발견되었다. 여기서 제트 방정식이란 펄사 방정식으로 기술되는 자기권에 플라스마의 흐름을 더한 것을 푸는 방정식이다. 제트 방정식은 은하 중앙에 있는 거대한 블랙홀 자기권에도 자연스럽게 적용될 수 있으므로, 최근까지 많은 사람들이 관심을 가진 가운데 여러 가지 방법으로 유도되고 풀렸다(Okamoto 1975; Heinemann & Olbert 1978; Blandford & Payne 1982; Lovelace et al. 1986; Mestel & Shibata 1994).

하지만 이러한 Grad-Shafranov 방정식들은 모두 stationary하고 z-축에 대하여 대칭을 유지하는 모델에서 유도된 것들뿐이었다. 이러한 모델은 Macdonald & Thorne(1982)에 의해 유입물질 원반으로 둘러싸인 거대한 블랙홀의 자기권으로 잘 정리되었고 그 내용은 이제 교과서에 수록될 정도가 되었다(e.g., Thorne et al. 1986; Novikov & Frolov 1988). 여기서 말하는 stationary 모델은 시공간 좌표를 $(t, \boldsymbol{r})$, 공간의 원통 좌표계를 (R, ϕ, z), 구 좌표계를 (r, θ, ϕ)라 할 때 기존 stationary 모델들은 모두 임의의 스칼라 f와 벡터 $\boldsymbol{f}$에 대해

$$\frac{\partial f}{\partial t} \equiv \dot{f}=0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} \equiv \dot{\boldsymbol{f}}=\boldsymbol{0}, \quad \frac{\partial}{\partial \phi}(\cdot\cdot\cdot)=0 \tag{1-1}$$

을 만족한다.

이러한 stationary 모델을 바탕으로 Park & Vishniac(1989, 여기서부터 PV)은 nonstationary한, 즉

$$\dot{f} \neq 0, \quad \dot{\boldsymbol{f}} \neq 0, \quad \frac{\partial}{\partial \phi}(\cdot\cdot\cdot)=0 \tag{1-2}$$

을 만족하는 모델을 세운 바 있다. 이 논문에서는 이러한 nonstationary 모델에서 펄사 방정식과 제트 방정식을 유도해 보기로 한다. 모델의 중심에는 블랙홀이 있지만 우리는 간편한 계산을 위해 모든 논의를 Newtonian 경우로 한정시키도록 하겠다.

2장에서는 nonstationary 블랙홀 전기역학의 기본 방정식들에 대해 알아본다. 3장에서는 구체적으로 nonstationary force-free Grad-Shafranov 방정식을 유도해본다. 4장에서는 nonstationary non-force-free Grad-Shafranov 방정식을 유도해본다. 이 논문의 처음부터 끝까지 블랙홀 자기권은 'highly-conducting' 하다고 가정된다. 따라서 플

라스마의 속도를 $\boldsymbol{v}$라 하면 식

$$\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0} \tag{1-3}$$

이 항상 만족된다.

2. Nonstationary 블랙홀 전기역학

이 장에서는 PV에서 최초로 유도된 nonstationary 블랙홀 전기역학의 기본 방정식들을 정리해보기로 한다. 가장 기본이 되는 블랙홀 주위의 nonstationary Maxwell 방정식은

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=4\pi\rho_e \tag{2-1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{2-2}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{B}} \tag{2-3}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{E}}+\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{2-4}$$

로 주어진다. 여기에 사용된 문자들은 따로 정의하지 않겠다.

블랙홀의 '북극' 위에서 대칭축인 z-축 한 점으로부터 거리가 R만큼 떨어진 임의의 원을 생각하자. 그 원으로 둘러싸인 표면을 A라 하고(평면일 필요는 없음) 면적 미분소를 dS, 그 표면을 지나는 자기 flux Ψ, 전기 flux Φ, 그리고 전류 I를 각각

$$\Psi(t,\ \boldsymbol{r})\equiv\int_A\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{2-5}$$

$$\Phi(t,\ \boldsymbol{r})\equiv\int_A\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{2-6}$$

$$I(t,\ \boldsymbol{r})\equiv-\int_A\boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{2-7}$$

와 같이 정의하자. 식 (2-5)~(2-7)에서 Ψ는 자기력선들이 A를 아래에서 위로 통과할 때, Φ는 전기력선들이 A를 아래에서 위로 통과할 때, I는 전류가 위에서 아래로 흐를 때 (+)의 값을 갖도록 정의되었음에 유의하자.

이 경우 전자기장은

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=-\frac{2}{cR}\left(\frac{\Psi}{4\pi}\right)\mathbf{1}_\phi \tag{2-8}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=-\frac{2}{cR}\left(I-\frac{\Phi}{4\pi}\right)\mathbf{1}_\phi \tag{2-9}$$

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{P}}=\frac{\nabla\Phi\times\mathbf{1}_\phi}{2\pi R} \tag{2-10}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{P}}=\frac{\nabla\Psi\times\mathbf{1}_\phi}{2\pi R} \tag{2-11}$$

$$\boldsymbol{j}^{\mathrm{P}}=-\frac{\nabla I\times\mathbf{1}_\phi}{2\pi R} \tag{2-12}$$

가 된다. 여기서 $\mathbf{1}_\phi$는 ϕ-방향의 단위 벡터를 의미하고 T는 toroidal, P는 poloidal 성분을 의미한다. 식 (2-8)~(2-12)는 Newtonian 경우에 적용되는 것들로 PV에 유도되어 있는 상대론적 경우에 적용되는 방정식들을 이용하면 쉽게 구해진다.

식 (2-8)~(2-12)로 기술되는 블랙홀 자기권 모델 안의 플라스마의 운동을 생각해보자. 식 (1-3)에 의해 유도되는 전기장은

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=-\frac{1}{c}\boldsymbol{v}^{\mathrm{P}}\times\boldsymbol{B}^{\mathrm{P}} \tag{2-13}$$

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{P}}=-\frac{1}{c}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{B}^{\mathrm{P}}-\frac{1}{c}\boldsymbol{v}^{\mathrm{P}}\times\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \tag{2-14}$$

가 된다. 식 (2-13), (2-14)는 stationary 경우든 nonstationary 경우든 항상 성립하는 것들이다.

모델 안의 자기력선의 속도를 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}$라 하면 PV에서 살펴본 바와 같이 nonstationary 경우에는 당연히

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{P}} \tag{2-15}$$

가 되어야 한다. 식 (2-15)에서 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{T}}$ 항만 있다면 stationary 모델이 된다. 왜냐하면 자기력선들이 회전만 할 뿐 실질적으로 블랙홀로 유입되지 않기 때문이다. 즉 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{P}}$ 항이 존재함으로 말미암아 nonstationary 모델이 가능하다는 것을 다시 확인할 수 있게 된다. 속도 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}$로 움직이는 관측자에 대해서 자기장에 의해 유도되는 전기장 $\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}+(1/c)\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}\times\boldsymbol{B}$는 사라져야 한다. 따라서 식 (1-3)과 유사하게

$$\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0} \tag{2-16}$$

을 가정할 수 있게 된다. 이 경우 물론 식 (2-13), (2-14)와 비슷하게

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}=-\frac{1}{c}\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{P}}\times\boldsymbol{B}^{\mathrm{P}} \tag{2-17}$$

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{P}}=-\frac{1}{c}\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{B}^{\mathrm{P}}-\frac{1}{c}\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{P}}\times\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \tag{2-18}$$

도 성립하게 된다.

식 (2-16)을 식 (1-3)에 대입하면

$-\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ 이 되므로 임의의 스칼라 x를 이용해

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}+x\boldsymbol{B} \tag{2-19}$$

로 놓을 수 있다. 즉

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}=x\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{T}} \tag{2-20}$$

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{P}}=x\boldsymbol{B}^{\mathrm{P}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{P}} \tag{2-21}$$

가 성립하는 것이다. 식 (2-20), (2-21)을 식 (2-13), (2-14)에 대입하면 각각 식 (2-17), (2-18)이 됨은 물론이다.

3. Nonstationary Force-Free Grad-Shafranov 방정식

그러면 구체적으로 'force-free' 경우부터 살펴보기로 하자. 이 경우는 전자기장이 매우 강한 극한 환경에서 inertia 항들을 생각할 필요가 없어 조건

$$\rho_e \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} = 0 \tag{3-1}$$

이 만족된다. 식 (2-16)을 식 (3-1)에 대입하면 $-\rho_e \boldsymbol{v}_F \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} = 0$이 되므로 임의의 스칼라 ξ를 이용해

$$\boldsymbol{j} = \rho_e \boldsymbol{v}_F + \xi \boldsymbol{B} \tag{3-2}$$

로 놓을 수 있는데 이를 성분별로 보면

$$\boldsymbol{j}^T = \rho_e \boldsymbol{v}_F{}^T + \xi \boldsymbol{B}^T \tag{3-3}$$

$$\boldsymbol{j}^P = \rho_e \boldsymbol{v}_F{}^P + \xi \boldsymbol{B}^P \tag{3-4}$$

가 된다.

자기력선의 각속도를 Ω_F라 하면 식 (2-15)는

$$\boldsymbol{v}_F = R\Omega_F \mathbf{1}_\phi + \boldsymbol{v}_F{}^P \tag{3-5}$$

로 주어질 것이다. 이 경우 식 (2-9), (2-11), (2-18)에 의해

$$\boldsymbol{E}^P = -\frac{\Omega_F}{2\pi c}\nabla\Psi + \frac{2}{c^2 R}\left(I - \frac{\Phi}{4\pi}\right)\boldsymbol{v}_F{}^P \times \mathbf{1}_\phi \tag{3-6}$$

를 얻는다. 편의상 시간에 따라 변하는 양

$$\boldsymbol{C} \equiv \frac{2}{c^2 R}\left(I - \frac{\Phi}{4\pi}\right)\boldsymbol{v}_F{}^P \times \mathbf{1}_\phi \tag{3-7}$$

을 정의하면 식 (3-6)은

$$\boldsymbol{E}^P = -\frac{\Omega_F}{2\pi c}\nabla\Psi + \boldsymbol{C} \tag{3-8}$$

가 된다. 여기서 항 $R\mathbf{1}_\phi$는 상대론적인 경우 Killing 벡터로 전환되기 때문에 계속 보존시키기로 한다.

식 (2-1), (3-8)로부터

$$4\pi\rho_e = -\frac{\Omega_F}{2\pi c}\nabla^2\Psi - \frac{1}{2\pi c}\nabla\Omega_F\cdot\nabla\Psi + \nabla\cdot\boldsymbol{C} \tag{3-9}$$

식 (2-4), (2-11), (3-8)로부터

$$\begin{aligned}\frac{4\pi}{c}j^T &= -\frac{1}{2\pi R}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{c}E^T \\ &\equiv -\frac{1}{2\pi R}\Delta^*\Psi - \frac{1}{c}E^T\end{aligned} \tag{3-10}$$

를 각각 얻는다.

식 (3-3)에 식 (3-9), (3-10)을 대입하면 우리가 구하는 nonstationary force-free Grad-Shafranov 방정식

$$\nabla\cdot\left[\frac{1}{R^2}\left\{1-\left(\frac{R\Omega_F}{c}\right)^2\right\}\nabla\Psi\right] + \frac{\Omega_F}{c^2}\nabla\Omega_F\cdot\nabla\Psi + \frac{2\pi\Omega_F}{c}\nabla\cdot\boldsymbol{C} + \frac{2\pi}{cR}E^T - \frac{16\pi^2\xi}{c^2R^2}\left(I - \frac{\Phi}{4\pi}\right) = 0 \tag{3-11}$$

또는

$$\left\{1-\left(\frac{R\Omega_F}{c}\right)^2\right\}\Delta^*\Psi - \frac{1}{2c^2R^2}\nabla(R^4\Omega_F{}^2)\cdot\nabla\Psi + \frac{2\pi R^2\Omega_F}{c}\nabla\cdot\boldsymbol{C} + \frac{2\pi R}{c}E^T - \frac{16\pi^2\xi}{c^2}\left(I - \frac{\Phi}{4\pi}\right) = 0 \tag{3-12}$$

을 구할 수 있다(Park 2002).

그러면 여기서 시간에 따라 변하는 모든 변수를 0으로 놓았을 때 식 (3-11), (3-12)가 stationary force-free Grad-Shafranov 방정식으로 환원되는지 확인해보도록 하자. 먼저 식 (3-4)는 stationary 경우

$$\boldsymbol{j}^P = \xi \boldsymbol{B}^P \tag{3-13}$$

가 되어야 하므로 식 (2-11), (2-12)로부터

$$\xi = -\frac{1}{|\nabla\Psi|^2}\nabla I\cdot\nabla\Psi = -\frac{dI}{d\Psi} \tag{3-14}$$

를 얻는다. 식 (3-11), (3-12)에 식 (3-14)를 대입하고 시간으로 미분된 양들을 모두 0으로 놓으면

$$\nabla\cdot\left[\frac{1}{R^2}\left\{1-\left(\frac{R\Omega_F}{c}\right)^2\right\}\nabla\Psi\right] + \frac{\Omega_F}{c^2}\nabla\Omega_F\cdot\nabla\Psi + \frac{16\pi^2}{c^2R^2}I\frac{dI}{d\Psi} = 0 \tag{3-15}$$

또는

$$\left\{1-\left(\frac{R\Omega_F}{c}\right)^2\right\}\Delta^*\Psi - \frac{1}{2c^2R^2}\nabla(R^4\Omega_F{}^2)\cdot\nabla\Psi + \frac{16\pi^2 I}{c^2}\frac{dI}{d\Psi} = 0 \tag{3-16}$$

가 된다. 식 (3-15), (3-16)이 유명한 '펄사 방정식'이다. 이 경우 Ω_F와 I, 2개의 물리량은 integration of motion으로서 각각 $\Omega_F = \Omega_F(\Psi)$, $I = I(\Psi)$를 만족하며 자기력선을 따라 보존된다. 따라서 식 (3-14)의 마지막 항은 stationary 경우에만 적용된다는 사실을 알 수 있다.

4. Nonstationary Non-Force-Free Grad-Shafranov 방정식

4장에서는 3장과 달리 force-free 조건을 가정하지 않는다. 앞서 언급한 바와 같이 stationary Grad-Shfranov 방정식, 즉 제트 방정식'은 Okamoto(1975)에 의해 발견되었고 최근까지 많은 사람들이 관심을 가진 가운데 여러 가지 방법으로 유도되고 풀렸다(Okamoto 1975; Heinemann & Olbert 1978; Blandford & Payne 1982; Lovelace et al. 1986; Mestel & Shibata 1994). 또한 Park and Lee(2002)에서 그 유도를 상세히 다룬 바 있다.

먼저 stationary model에서 자기력선을 따라 보존되는 물리량들을 나열해 보면

$$\Omega_F = \Omega - \frac{xB^T}{R} \tag{4-1}$$

$$\eta \equiv \rho x \tag{4-2}$$

$$L \equiv R^2\Omega - \frac{RB^T}{4\pi\eta} \tag{4-3}$$

$$\varepsilon \equiv \frac{v^2}{2} - \frac{\Omega^F RB^T}{4\pi\eta} + \frac{\Gamma}{\Gamma-1}\frac{P}{\rho} \tag{4-4}$$

그리고 엔트로피 s가 있다. 여기서 Ω는 플라스마의 각속도($=v^T/R$), L은 단위 질량 당 각운동량, Γ는 adiabatic index, ε는 단위 질량 당 에너지가 된다. 즉 stationary 모델에서 Ω_F, η, L, ε, s 등 5개의 물리량들은 각각 integration of motion으로서 $\Omega_F = \Omega_F(\Psi)$, $\eta = \eta(\Psi)$, $L = L(\Psi)$, $\varepsilon = \varepsilon(\Psi)$, $s = s(\Psi)$를 만족하며 자기력선을 따라 보존된다. 그리고 stationary force-free 경우, 즉 식 (3-15), (3-16)이 적용되는 경우에는 5개의 물리량들이 2개의 물리량, $\Omega_F = \Omega_F(\Psi)$와 $I = I(\Psi)$로 대표되는 것이다. 하지만 nonstationary 모델에서는 모든 물리량들이 전혀 보존되지 않는다는 점이 가장 큰 차이점이다.

식 (4-1), (4-2), (4-3)으로부터 유용한 관계식

$$Rv^T = \frac{R^2\Omega_F - M_A^2 L}{1 - M_A^2} \tag{4-5}$$

$$RB^T = 4\pi\eta\frac{R^2\Omega_F - L}{1 - M_A^2} \tag{4-6}$$

을 얻는데 여기서

$$M_A^2 \equiv \frac{4\pi\eta^2}{\rho} = 4\pi\rho x^2 \tag{4-7}$$

은 Alfvenic Mach 수이다.

Nonstationary Grad-Shfranov 방정식은 변형된 Euler 방정식

$$\nabla\frac{v^2}{2} = \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v}) + \frac{1}{c\rho}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} + \frac{\rho_e}{\rho}\boldsymbol{E} - \frac{1}{\rho}\nabla P - \frac{1}{\rho}\dot{\boldsymbol{v}} \tag{4-8}$$

에서 구할 수 있다. 지금부터 자기력선에 수직인 단위 벡터

$$\mathbf{1}_\perp \equiv -\frac{\nabla\Psi}{|\nabla\Psi|} = -\frac{\nabla\Psi}{2\pi RB^P} \tag{4-9}$$

를 생각하고

$$(\mathbf{1}_\perp\cdot\nabla)f = -\frac{1}{|\nabla\Psi|}\nabla\Psi\cdot\nabla f \equiv D_\perp f \tag{4-10}$$

와 같이 나타내기로 한다. 그러면 식 (4-8) 좌변을 $\mathbf{1}_\perp$과 내적을 취하면

$$D_\perp\frac{v^2}{2} = D_\perp\left(\varepsilon + \frac{\Omega_F RB^T}{4\pi\eta} - \frac{\Gamma}{\Gamma-1}\frac{P}{\rho}\right) \tag{4-11}$$

가 된다.

식 (4-8)의 우변을 $\mathbf{1}_\perp$과 내적을 취하고 정돈하면

$$\mathbf{1}_\perp\cdot\left(\frac{\rho_e}{\rho}\boldsymbol{E} + \frac{1}{c\rho}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}\right) = \frac{R\Omega_F}{c\rho}B^P\rho_e - \frac{1}{c\rho}j^TB^P - \frac{B^T}{4\pi^2 c\rho R^2 B^P}\nabla I\cdot\nabla\Psi \tag{4-12}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_\perp\cdot\boldsymbol{v}^P\times(\nabla\times\boldsymbol{v})^T &= \frac{(B^P)^2}{2}D_\perp x^2 + \frac{4\pi x^2}{c}j^TB^P + \frac{x^2}{c}E^TB^P \\ &+ xD_\perp(\boldsymbol{v}_F^P\cdot\boldsymbol{B}^P) + (\boldsymbol{v}_F^P\cdot\boldsymbol{B}^P)D_\perp x \\ &- x\,\mathbf{1}_\perp\cdot(\boldsymbol{B}^P\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_F^P \\ &- x\,\mathbf{1}_\perp\cdot(\boldsymbol{v}_F^P\cdot\nabla)\boldsymbol{B}^P \\ &+ \frac{1}{2}D_\perp(v_F^P)^2 - \frac{1}{2}\mathbf{1}_\perp\cdot(\boldsymbol{v}_F^P\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_F^P\end{aligned} \tag{4-13}$$

$$\mathbf{1}_\perp\cdot\boldsymbol{v}^T\times(\nabla\times\boldsymbol{v})^P = \frac{v^T}{R}D_\perp(Rv^T) \tag{4-14}$$

$$\mathbf{1}_\perp\cdot\boldsymbol{v}^P\times(\nabla\times\boldsymbol{v})^P = 0 \tag{4-15}$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_\perp\cdot\left\{\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v}) + \frac{1}{c\rho}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} + \frac{\rho_e}{\rho}\boldsymbol{E} - \frac{1}{\rho}\nabla P - \frac{1}{\rho}\dot{\boldsymbol{v}}\right\} &= \frac{(B^P)^2}{2}D_\perp x^2 - \frac{1-M_A^2}{c\rho}j^TB^P + \frac{x^2}{c}E^TB^P \\ &+ \frac{R\Omega^F}{c\rho}B^P\rho_e + \frac{v^T}{R}D_\perp(Rv^T) - \frac{B^T}{4\pi\rho R}D_\perp(RB^T) \\ &- \frac{1}{\rho}D_\perp P - \frac{1}{\rho}\mathbf{1}_\perp\cdot\dot{\boldsymbol{v}} - \frac{B^T}{4\pi^2 c\rho R^2 B^P}\nabla I\cdot\nabla\Psi + H\end{aligned} \tag{4-16}$$

단,

$$\begin{aligned}H \equiv\ & xD_\perp(\boldsymbol{v}_F^P\cdot\boldsymbol{B}^P) + (\boldsymbol{v}_F^P\cdot\boldsymbol{B}^P)D_\perp x \\ & - x\,\mathbf{1}_\perp\cdot(\boldsymbol{B}^P\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_F^P \\ & - x\,\mathbf{1}_\perp\cdot(\boldsymbol{v}_F^P\cdot\nabla)\boldsymbol{B}^P \\ & + \frac{1}{2}D_\perp(v_F^P)^2 - \frac{1}{2}\mathbf{1}_\perp\cdot(\boldsymbol{v}_F^P\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_F^P\end{aligned}$$

가 된다.

따라서 식 (4-11)과 식 (4-16)을 등치하고 식 (4-6) 등을 이용하여 정돈하면

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\left[\frac{1}{R^2}\left\{1-\left(\frac{R\Omega_F}{c}\right)^2 - M_A^2\right\}\nabla\Psi\right] \\ &+ \frac{\Omega_F}{c^2}\nabla\Omega_F\cdot\nabla\Psi \\ &+ \frac{1}{R^2}\left(\nabla M_A^2 - \frac{M_A^2}{x}\nabla x\right)\cdot\nabla\Psi + \frac{2\pi}{cR}E^T \\ &+ \frac{2\pi\Omega_F}{c}\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{C}} + \frac{16\pi^2}{c^2R^2}\left(I - \frac{\Phi}{4\pi}\right)\frac{1}{|\nabla\Psi|^2}\nabla I\cdot\nabla\Psi\end{aligned} \tag{4-17}$$

$$
\begin{aligned}
= & -\frac{4\pi^2 M_A^2}{x^2|\nabla\Psi|^2}\{\nabla\varepsilon-\nabla(\Omega_F L)+Rv^T\nabla\Omega_F\}\cdot\nabla\Psi \\
& -\frac{4\pi^2 M_A^2}{x^2|\nabla\Psi|}H-\frac{16\pi^3}{|\nabla\Psi|^2}\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\Psi \\
& -\frac{4\pi^2 M_A^2 B^T}{xR|\nabla\Psi|^2}\nabla(Rv^T)\cdot\nabla\Psi \\
& +\frac{16\pi^3 P}{k_B|\nabla\Psi|^2}\nabla s\cdot\nabla\Psi
\end{aligned}
$$

또는

$$
\begin{aligned}
& \left\{1-\left(\frac{R\Omega_F}{c}\right)^2-M_A^2\right\}\Delta^*\Psi \\
& -\frac{1}{2c^2R^2}\nabla(R^4\Omega_F^2)\cdot\nabla\Psi \\
& -\frac{M_A^2}{x}\nabla x\cdot\nabla\Psi+\frac{2\pi R}{c}E^T+\frac{2\pi R^2\Omega_F}{c}\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{C}} \\
& +\frac{16\pi^2}{c^2}\left(I-\frac{\Phi}{4\pi}\right)\frac{1}{|\nabla\Psi|^2}\nabla I\cdot\nabla\Psi
\end{aligned}
\tag{4-18}
$$

$$
\begin{aligned}
= & \\
& -\frac{4\pi^2R^2 M_A^2}{x^2|\nabla\Psi|^2}\{\nabla\varepsilon-\nabla(\Omega_F L)+Rv^T\nabla\Omega_F\}\cdot\nabla\Psi \\
& -\frac{4\pi^2R^2 M_A^2}{x^2|\nabla\Psi|}H-\frac{16\pi^3R^2}{|\nabla\Psi|^2}\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla\Psi \\
& -\frac{4\pi^2 M_A^2 RB^T}{x|\nabla\Psi|^2}\nabla(Rv^T)\cdot\nabla\Psi \\
& +\frac{16\pi^3R^2P}{k_B|\nabla\Psi|^2}\nabla s\cdot\nabla\Psi
\end{aligned}
$$

가 된다.

5. 결론

식 (4-17), (4-18)에서 nonstationary 요소들을 모두 0으로 놓으면 stationary Grad-Shfranov 방정식

$$
\begin{aligned}
& \nabla\cdot\left[\frac{1}{R^2}\left\{1-\left(\frac{R\Omega_F}{c}\right)^2-M_A^2\right\}\nabla\Psi\right] \\
& +\frac{\Omega_F}{c^2}\nabla\Omega_F\cdot\nabla\Psi \\
& +\frac{1}{R^2}\left(\nabla M_A^2-\frac{M_A^2}{x}\nabla x\right)\cdot\nabla\Psi+\frac{16\pi^2 I}{c^2R^2}I' \\
= & -\frac{4\pi^2 M_A^2}{x^2}\{\varepsilon'-(\Omega_F L)'+Rv^T\Omega_F'\} \\
& +\frac{16\pi^3}{R^2}\eta RB^T(Rv^T)'+16\pi^3\frac{P}{k_B}s'
\end{aligned}
\tag{5-1}
$$

그리고

$$
\begin{aligned}
& \left\{1-\left(\frac{R\Omega_F}{c}\right)^2-M_A^2\right\}\Delta^*\Psi \\
& -\frac{1}{2c^2R^2}\nabla(R^4\Omega_F^2)\cdot\nabla\Psi \\
& -\frac{M_A^2}{x}\nabla x\cdot\nabla\Psi+\frac{16\pi^2 I}{c^2}I' \\
= & -\frac{4\pi^2R^2 M_A^2}{x^2}\{\varepsilon'-(\Omega_F L)'+Rv^T\Omega_F'\} \\
& +16\pi^3\eta RB^T(Rv^T)'+16\pi^3R^2\frac{P}{k_B}s'
\end{aligned}
\tag{5-2}
$$

으로 각각 환원된다. 여기서 $(')\equiv d/d\Psi$ 인데 이러한 표현이 가능한 이유는 앞에서 언급한 바와 같이 Ω_F, η, L, ε, s 등 5개의 물리량들이 각각 integration of motion으로서 $\Omega_F=\Omega_F(\Psi)$, $\eta=\eta(\Psi)$, $L=L(\Psi)$, $\varepsilon=\varepsilon(\Psi)$, $s=s(\Psi)$를 만족하며 자기력선을 따라 보존되기 때문이다. 실제로 식 (5-1), (5-2)에서 $I=I(\Psi)$를 소거하여 5개의 물리량만의 방정식

$$
\begin{aligned}
& \nabla\cdot\left[\frac{1}{R^2}\left\{1-\left(\frac{R\Omega_F}{c}\right)^2-M_A^2\right\}\nabla\Psi\right] \\
& +\frac{\Omega_F}{c^2}\nabla\Omega_F\cdot\nabla\Psi \\
& +\frac{1}{R^2}\left(\nabla M_A^2-\frac{M_A^2}{x}\nabla x\right)\cdot\nabla\Psi \\
= & -\frac{4\pi^2 M_A^2}{x^2}\{\varepsilon'-(\Omega_F L)'+Rv^T\Omega_F'\} \\
& +\frac{16\pi^3}{R^2}RB^T\{(\eta L)'-Rv^T\eta'\}+16\pi^3\frac{P}{k_B}s'
\end{aligned}
\tag{5-3}
$$

그리고

$$
\begin{aligned}
& \left\{1-\left(\frac{R\Omega_F}{c}\right)^2-M_A^2\right\}\Delta^*\Psi \\
& -\frac{1}{2c^2R^2}\nabla(R^4\Omega_F^2)\cdot\nabla\Psi-\frac{M_A^2}{x}\nabla x\cdot\nabla\Psi \\
= & -\frac{4\pi^2R^2 M_A^2}{x^2}\{\varepsilon'-(\Omega_F L)'+Rv^T\Omega_F'\} \\
& +16\pi^3RB^T\{(\eta L)'-Rv^T\eta'\}+16\pi^3R^2\frac{P}{k_B}s'
\end{aligned}
\tag{5-4}
$$

로 각각 나타낼 수도 있다. 이상으로부터 우리가 구한 nonstationary 방정식들은 주어진 가정 아래 모두 올바르게 유도되었다는 점을 확신할 수 있다.

식 (4-17), (4-18)에서 극한 $M_A^2\to 0$, $s\to 0$, $\dot{\boldsymbol{v}}\to\boldsymbol{0}$을 취하면 각각 nonstationary force-free Grad-Shafranov 방정식 (3-11), (3-12)로 환원된다. 식 (4-17), (4-18)은 물론 식 (3-11), (3-12)도 현재로서는 수치적으로 풀기 매우 힘들어 보인다. 만일 수치적으로 풀릴 수만 있다면 블랙홀 자기권 모델 발전에 커다란 기여를

할 수 있을 것으로 보인다.

참고문헌

Blandford, R. D., & Payne, D. G. 1982, MNRAS, 199, 883
Goldreich, P., & Julian, W. H. 1969, ApJ, 157, 869
Heinemann, M., & Olbert, S. 1978, J. Geophys. Res., 83, 2457
Julian, W. H. 1973, ApJ, 183, 967
Lovelace, R. V. E., Mehanian, C., Mobarry, C. M., & Sulkanen, M. E. 1986, ApJS, 62, 1
Macdonald, D. A., & Thorne, K. S. 1982, MNRAS, 198, 345
Mestel, L., & Shibata, S. 1994, MNRAS, 271, 621
Michel, F. C. 1973, ApJL, 180, 133
Novikov, I. D., & Frolov, V. P. 1988, Physics of Black Holes(Kluwer Academic Pub.)
Okamoto, I. 1975, MNRAS, 173, 357
Park, S. J. 2002, in <Current High-Energy Emission around Black Holes>, eds. C.-H. Lee & H.-Y. Chang(World Scientific), 231
Park, S. J, & Lee, T. H. 2002, 천문학논총, 17, 1
Park, S. J., & Vishniac, E. T. 1989, ApJ, 337, 78 (PV)
Scharlemann, E. T., & Wagoner, R. V. 1973, ApJ, 182, 951
Thorne, K. S., Price, R. H., & Macdonald, D. A. 1986, Black Holes: The Membrane Paradigm(Yale Univ. Press)